بُعدهای انژکتیو گورنشتاین و کوهن-مکالی بودن

رضا سزیده*، فاطمه ساوجی

دانشگاه ارومیه، دانشکدهٔ علوم، گروه ریاضی

دریافت ۹۶/۰۸/۱۴ پذیرش ۹۷/۰۲/۰۲

چکیده

فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی، نوتری و جابه‌جایی باشد. در این مقاله وجود مدول‌های متناهی مولد از بُعد انژکتیو گورنشتاین متناهی روی حلقه‌های کوهن-مکالی را بررسی می‌کنیم. در ابتدا بُعدهای انژکتیو گورنشتاین کوهمولوژی موضعی هم‌بافت‌ها را بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: انژکتیو گورنشتاین، حلقه‌های کوهن-مکالی، مدول‌های کوهمولوژی موضعی.

مقدمه

در سرتا سر این مقاله، $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی، نوتری و جابه‌جایی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ است.

حدس زیر که به‌وسیلهٔ باس[1] [۱] پیشنهاد شد به‌وسیلهٔ پسکین[2] و اسپیرو[3] [۲] برای تقریباً همهٔ حلقه‌ها ثابت شده است:

(B) اگر حلقهٔ R یک R- مدول متناهی مولد ناصفر از بُعد انژکتیو متناهی داشته باشد، آن‌گاه حلقهٔ R کوهن-مکالی است.

مسائل مطرح شده در این مقاله با تعمیم زیر از حدس باس که هنوز باز است در ارتباط هستند:

(GB) اگر حلقهٔ R یک R- مدول با تولید متناهی ناصفر از بُعد انژکتیو گورنشتاینِ متناهی داشته باشد، آن‌گاه R حلقهٔ کوهن- مکالی است.

ایدهٔ ما به اولین قدم در حل حدس باس برمی‌گردد که به‌وسیلهٔ لوین[4] و واسکانسلوز[5] [۳] در سال ۱۹۶۸ ارائه شده است. آن‌ها ثابت کردند که اگر $x \in \mathfrak{m}\backslash\mathfrak{m}^2$ یک غیرمقسوم علیه صفر باشد، آن‌گاه برای هر R/xR- مدول متناهی مولد M، تساوی $\mathrm{id}_R M = \mathrm{id}_{R/xR} M + 1$ وجود دارد. با استفاده از این واقعیت، آن‌ها برای یک حلقهٔ کوهن-مکالی R، یک R- مدول با تولید متناهی از بُعد انژکتیو متناهی ساختند (عکس حدس B).

*نویسنده مسئول rsazeedeh@ipm.ir

1. Bass
2. Peskin
3. Szpiro
4. Levin
5. Vasconcelos

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.10.4]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.157]

یک نتیجهٔ مشابه از بُعد انژکتیو گورنشتاین به‌وسیلهٔ کریستنس[1] و همکاران ثابت شده است [۴]. در این مقاله بُعد انژکتیو گورنشتاین از کوهمولوژی موضعی را بررسی می‌کنیم و به‌عنوان یک کاربرد، اثبات جدیدی از قضیهٔ کریستنس و همکاران ارائه می‌دهیم. یک تکنیک مشابه [۳] برای ساختن یک مدول متناهی مولد از بُعد انژکتیو متناهی نشان می‌دهد که مسئله به‌وجود مدول‌های غیرآزاد از G-بُعد صفر روی حلقه‌های موضعیِ آرتینی برمی‌گردد.

یوشینو[2] [۵] ثابت کرد که این مدول‌ها به‌طورکلی حداقل در حالت $\mathrm{m}^2 = 0$ یا به‌طورکلی‌تر اگر R یک حلقهٔ موضعیِ کوهن مکالی با چندگانگی مینیمال باشد، وجود ندارند در حالت $\mathrm{m}^3 = 0$، حلقهٔ R تنها در حالت خاص یک مدول غیرآزاد از G- بُعد صفر دارد.

در این مقاله نشان می‌دهیم که اگر R حلقهٔ کوهن- مکالی با چندگانگی مینیمال باشد، آن‌گاه هر مدول متناهی مولد از بُعد انژکتیو گورنشتاین متناهی دارای بُعد انژکتیو متناهی است.

نتایج اصلی

این بخش را با این تعریف شروع می‌کنیم.

تعریف ۱. از [۶]، یک R- مدول G را **انژکتیو گورنشتاین** می‌نامیم هرگاه یک تحلیل انژکتیو تام (یک دنبالهٔ دقیق از مدول‌های انژکتیو) به‌صورت

$$\mathcal{G} := \cdots I_1 \xrightarrow{\delta_1} I_0 \xrightarrow{\delta_0} I_{-1} \xrightarrow{\delta_{-1}} \cdots$$

وجود داشته باشد به طوری‌که $G = \operatorname{Ker} \delta_0$ و فانکتور $\operatorname{Hom}_R(I, -)$ برای هر مدول انژکتیو I، تحلیل $\mathcal{G}$ را دقیق نگه دارد.

فرض می‌کنیم r یک عدد صحیح نامنفی باشد. می‌گوییم R- مدول M از بُعد انژکتیو گورنشتاین کم‌تر یا مساوی r است و آن‌را با $\operatorname{Gid}_R M \leq r$ نشان می‌دهیم هرگاه یک R- دنبالهٔ دقیق از R- مدول‌ها از طول r به‌صورت

$$0 \to M \to G_0 \to \cdots \to G_{-r} \to 0$$

وجود داشته باشد به‌طوری‌که هر G_i انژکتیو گورنشتاین باشد. اگر این چنین دنباله‌ای از طول کم‌تر از r وجود نداشته باشد، آن‌گاه می‌گوییم $\operatorname{Gid}_R M = r$.

ملاحظه۲. با توجه به اثبات [۷، قضیهٔ ۱.۳]، اگر a یک ایده‌آل از حلقهٔ نوتری و جابه‌جایی R (بدون هیچ شرط دیگری روی R) و G یک R- مدول انژکتیو گورنشتاین باشد، آن‌گاه برای هر $i > 0$ ، $H^i_{\mathrm{a}}(G) = 0$. در اثبات قضیهٔ زیر، از کاتگوری مشتق $D(R)$ و فانکتورهای مشتق راست $\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(-,-)$ و $\mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{a}}(-)$ برای ایده‌آل a از R استفاده می‌کنیم. برای جزییات بیش‌تر به [۸] و [۹] ارجاع می‌دهیم.

لم ۳. فرض کنیم (R,m) حلقهٔ موضعی و M یک R- هم‌بافت در $D^f_b(R)$ باشد. اگر $\operatorname{Gid}_R M < \infty$، آن‌گاه

$$\operatorname{Gid}_R M = \operatorname{Gid}_{\hat{R}}\big(M \otimes_R \hat{R}\big).$$

1 Christensen
2 Yoshino

اثبات. با توجه به قضیهٔ ۶.۳ [۱۰]، داریم $\mathrm{Gid}_{\hat{R}}\left(M \otimes_R \hat{R}\right) < \infty$ و $M \otimes_R \hat{R} \in D_b^f(\hat{R})$. حالا با توجه به نتیجه ۳.۲ [۱۱]، تساوی‌های زیر وجود دارند که ادعای مورد نظر را نتیجه می‌دهند

$$\mathrm{Gid}_{\hat{R}}\left(M \otimes_R \hat{R}\right) = \operatorname{depth} \hat{R} - \inf\left(M \otimes_R \hat{R}\right) = \operatorname{depth} R - \inf M = \mathrm{Gid}_R M.$$

لم ۴. فرض کنیم (R,m) یک حلقهٔ موضعی و M یک R- هم‌بافت در $D_b^f(R)$ باشد. در این‌صورت

$$\mathrm{Gid}_R \mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{m}}(M) = \mathrm{Gid}_{\hat{R}} \mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{m}}(M).$$

اثبات. چون $M \in D_b^f(R)$، پس یکریختی $\mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{m}}(M) \cong \mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{m}\hat{R}}\left(M \otimes_R \hat{R}\right)$ وجود دارد. فرض می‌کنیم

$$\mathrm{Gid}_{\hat{R}} \mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{m}}(M) = \mathrm{Gid}_{\hat{R}}\left(\mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{m}\hat{R}}\left(M \otimes_R \hat{R}\right)\right) = t$$

و تحلیل انژکتیو مینیمال

$$0 \to I_n \to \cdots \to I_{-t+1} \to I_{-t} \to \cdots$$

از $M \otimes_R \hat{R}$ به‌عنوان $\hat{R}$-هم‌بافت را در نظر می‌گیریم. چون $M \otimes_R \hat{R} \in D_b^f(\hat{R})$، پس می‌توانیم برای آن فرض کنیم که در هر I_i، تنها تعداد متناهی از کپی‌های $E(R/m)$ ظاهر شوند.

فرض کنیم $G_{-t} = \ker\left(I_{-t} \to I_{-t-1}\right)$. چون $\mathrm{Gid}_{\hat{R}} \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{m}}(M) = t$، پس با توجه به قضیهٔ ۳.۳ [۴]، $\Gamma_{\mathrm{m}}(G_{-t})$ یک $\hat{R}$-مدول انژکتیو گورنشتاین است و به‌علاوه آرتینی است.

حالا، با استفاده از لم ۶.۳ [۱۲] R- مدول $\Gamma_{\mathrm{m}}(G_{-t})$ انژکتیو گورنشتاین است بنابراین

$$\mathrm{Gid}_R \mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{m}}(M) \le \mathrm{Gid}_{\hat{R}}\left(\mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{m}\hat{R}}\left(M \otimes_R \hat{R}\right)\right) = t.$$

برعکس، فرض کنیم $\mathrm{Gid}_R \mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{m}}(M) = s$ و

$$0 \to J_n \to \cdots \to J_{-s+1} \to J_{-s} \to \cdots$$

یک تحلیل انژکتیو $M \otimes_R \hat{R}$ به‌عنوان $\hat{R}$-هم‌بافت باشد به‌طوری‌که در هر J_i تنها تعداد متناهی $E(R/m)$ ظاهر شود. اگر فانکتور$\Gamma_{\mathrm{m}}(-)$ را روی این هم‌بافت اثر دهیم، آن‌گاه با استفاده از قضیهٔ ۳.۳ [۴] داریم که $\Gamma_{\mathrm{m}}(C_{-s})$ انژکتیو گورنشتاین و یک R- مدول آرتینی است که $C_{-s} = \ker\left(J_{-s} \to J_{-s-1}\right)$. با استفاده از لم ۶.۳ [۱۲]، $\Gamma_{\mathrm{m}}(C_{-s})$ یک $\hat{R}$-مدول انژکتیو گورنشتاین و آرتینی است بنابراین داریم

$$\mathrm{Gid}_{\hat{R}} \mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{m}}(M) \le s = \mathrm{Gid}_R \mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{m}}(M).$$

لم ۵. فرض کنیم (R,m) یک حلقهٔ موضعی و M یک R- هم‌بافت در $D_b(R)$ باشد، در این‌صورت

$$\mathrm{Gfd}_{\hat{R}}\left(M \otimes_R \hat{R}\right) = \mathrm{Gfd}_R M.$$

اثبات. فرض کنیم که $\mathrm{Gfd}_R M = t$ و $X = \cdots \to P_{t+1} \to P_t \to P_{t-1} \to \cdots \to P_n \to 0$ یک تحلیل پروژکتیو از M باشد، یعنی $X \simeq M$.

طبق قضیهٔ ۵.۳ [۴] برای هر $i \ge t$، R-مدول $C_i = \mathrm{Coker}(P_{i+1} \to P_i)$ یک‌دست گورنشتاین است. حال با استفاده از گزاره ۱۰.۳ [۱۳] $C_t \otimes_R \hat{R}$ یک $\hat{R}$-مدول یک‌دست گورنشتاین است. این حقیقت نتیجه می‌دهد که

$$0 \to C_t \otimes_R \hat{R} \to P_{t-1} \otimes_R \hat{R} \to \cdots$$

یک تحلیل یک‌دست گورنشتاین از $M \otimes_R \hat{R}$ است بنابراین $\mathrm{Gfd}_{\hat{R}}\left(M \otimes_R \hat{R}\right) \le t = \mathrm{Gfd}_R M$.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.10.4]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.157]

برعکس، فرض می‌کنیم $\mathrm{Gfd}_{\hat{R}}\big(M \otimes_R \hat{R}\big) = s$ و X را به‌عنوان یک تحلیل پروژکتیو از R-مدول M به‌صورت بالا در نظر می‌گیریم. پس $X \otimes_R \hat{R}$ یک تحلیل یک‌دست از $M \otimes_R \hat{R}$ است. دوباره با استفاده از قضیهٔ ۵.۳ [۴] برای هر $i \geq s$،

$$C_i \otimes_R \hat{R} = \mathrm{Coker}(P_{i+1} \otimes_R \hat{R} \to P_i \otimes_R \hat{R})$$

یک $\hat{R}$-مدول یک‌دست گورنشتاین است. حال طبق نتیجه ۶.۲ [۱۴]، R -مدول C_i برای هر $i \geq s$ یک‌دست گورنشتاین است. این نتیجه می‌دهد که $\mathrm{Gfd}_R M \leq s = \mathrm{Gfd}_{\hat{R}}\big(M \otimes_R \hat{R}\big)$.

لم ۶. فرض کنیم (R,m) یک حلقهٔ موضعی دارای هم‌بافت دوگان ساز و M یک R- هم‌بافت در $D_b^f(R)$ باشد. در این‌صورت $\mathrm{Gid}_{\hat{R}}\big(M \otimes_R \hat{R}\big) < \infty$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Gid}_R M < \infty$.

اثبات. از این‌که $E\left(\frac{R}{\mathrm{m}}\right)$ یک R-مدول انژکتیو هم مولد است، طبق گزاره ۱.۵ [۴] داریم $\mathrm{Gid}_{\hat{R}}\big(M \otimes_R \hat{R}\big) < \infty$ اگر و تنها اگر

$$\mathrm{Gfd}_{\hat{R}}\left(\mathrm{Hom}_{\hat{R}}(M \otimes_R \hat{R}, E\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{m}}\right))\right) = \mathrm{Gfd}_{\hat{R}}\left(\mathrm{Hom}_R(M, E\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{m}}\right))\right) < \infty.$$

از طرف دیگر چون $\mathrm{Hom}_R(M, E\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{m}}\right)) \in D_b^{art}(R)$، پس این شبه یک‌ریختی را داریم:

$$\mathrm{Hom}_R\left(M, E\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{m}}\right)\right) \otimes_R \hat{R} \simeq \mathrm{Hom}_R\left(M, E\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{m}}\right)\right).$$

بنابراین با استفاده از لم ۵.۲ داریم $\mathrm{Gfd}_{\hat{R}}\left(\mathrm{Hom}_R(M, E\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{m}}\right))\right) < \infty$ اگر و تنها اگر

$$\mathrm{Gfd}_R\left(\mathrm{Hom}_R(M, E\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{m}}\right))\right) < \infty.$$

حال با استفاده از گزارهٔ ۱.۵ [۴] داریم:

$$\mathrm{Gfd}_R\left(\mathrm{Hom}_R(M, E\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{m}}\right))\right) = \mathrm{Gid}_R M$$

و در نتیجه $\mathrm{Gid}_{\hat{R}}\big(M \otimes_R \hat{R}\big) < \infty$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Gid}_R M < \infty$.

گزارهٔ ۷. فرض کنیم (R,m) یک حلقهٔ موضعی و M یک R- هم‌بافت در $D_b^f(R)$ باشد. $\mathrm{Gid}_{\hat{R}}\big(M \otimes_R \hat{R}\big) < \infty$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Gid}_R \mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{m}}(M) < \infty$. به‌ویژه، اگر R دارای هم‌بافت دوگان ساز باشد، آن‌گاه $\mathrm{Gid}_R M < \infty$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Gid}_R \mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{m}}(M) < \infty$.

اثبات. به‌وضوح $M \otimes_R \hat{R} \in D_b^f(\hat{R})$ و از طرف دیگر، با توجه به لم ۴ داریم:

$$\mathrm{Gid}_R \mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{m}}(M) = \mathrm{Gid}_{\hat{R}} \mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{m}}(M) = \mathrm{Gid}_{\hat{R}} \mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{m}\hat{R}}\big(M \otimes_R \hat{R}\big).$$

بنابراین بدون کم شدن از کلیت ادعا، فرض می‌کنیم حلقه موضعی، کامل باشد و بنابراین دارای هم بافت *دوگان‌ساز* است. در نتیجه با استفاده کردن از قضیهٔ ۹.۵ [۴] حکم ثابت می‌شود. ادعای دوم با استفاده از لم ۶ و قسمت اول گزاره اثبات می‌شود.

تعریف. فرض کنید a ایده‌آل از R باشد و $M \in D(R)$. عدد $\inf(R/\mathrm{a} \otimes_R^{\mathrm{L}} M)$ را $\mathrm{a}-\mathrm{width}_R(\mathrm{a},\mathrm{M})$ می‌نامیم.

فرض کنید $\underline{a} := a_1, \cdots, a_t$ یک مجموعه مولد برای a باشد. اگر $M \in D_+^f(R)$، آن‌گاه تساوی

$$\mathrm{width}_R(\mathrm{m}, M) = \inf\big(K(\underline{a}) \otimes_R M\big)$$

برقرار است. اگر (R,m) موضعی باشد، آن‌گاه قرار می‌دهیم $\mathrm{width}_R(\mathrm{m},M)=\mathrm{width}_R M$ و برای هر $\mathrm{p}\in\mathrm{Spec}(R)$ داریم:

$$\mathrm{width}_{R_\mathrm{p}} M_\mathrm{p} \geq \inf M_\mathrm{p} \geq \inf M\ .$$

برای هر $M\in D_+^f(R)$ داریم $\mathrm{width}_R(\mathrm{a},M)=\inf M$.

قضیهٔ ۸. فرض کنیم (R,m) حلقهٔ موضعی و M یک R- هم‌بافت در $D_b^f(R)$ باشد. در این‌صورت

$$\mathrm{Gid}_{\hat{R}}\big(M\otimes_R \hat{R}\big)=\ \mathrm{Gid}_R\mathbf{R}\Gamma_\mathrm{m}(M).$$

به‌ویژه، اگر R دارای یک هم‌بافت دوگان ساز باشد، آن‌گاه

$$\mathrm{Gid}_R M=\ \mathrm{Gid}_R\mathbf{R}\Gamma_\mathrm{m}(M).$$

اثبات. با توجه به گزارهٔ ۷ فرض می‌کنیم $\mathrm{Gid}_{\hat{R}}\big(M\otimes_R \hat{R}\big)$ و $\mathrm{Gid}_R\mathbf{R}\Gamma_\mathrm{m}(M)$ هر دو متناهی باشند.

از این‌که $M\in\ D_b^f(R)$ ، با استفاده از نتیجه ۳.۲ [۱۱] داریم:

$$\mathrm{Gid}_{\hat{R}}\big(M\otimes_R \hat{R}\big)=\mathrm{depth}\ \hat{R}-\inf\ \big(M\otimes_R \hat{R}\big)=\mathrm{depth}\ R-\inf\ M\ ..$$

حال بنابر قضیهٔ ۳.۶ [۴] داریم:

$$\mathrm{Gid}_R\mathbf{R}\Gamma_\mathrm{m}(M)\geq \mathrm{depth\ R}-\mathrm{width}\ \mathbf{R}\Gamma_\mathrm{m}(M).$$

از طرف دیگر اگر $\mathrm{m}=(x_1,\cdots,x_n)$ ، آن‌گاه

$$\begin{aligned}\mathrm{width}\ \mathbf{R}\Gamma_\mathrm{m}(M)&=\inf\big(k(\mathrm{m})\otimes_R \mathbf{R}\Gamma_\mathrm{m}(M)\big)=\inf\ \big((k(\mathrm{m})\otimes_R \mathbf{R}\Gamma_\mathrm{m}(M))[-n]\big)+n\\&=\inf\ \mathrm{Hom}\ _R(k(\mathrm{m}),\mathbf{R}\Gamma_\mathrm{m}(M))+n=\inf\ \mathrm{Hom}\ _R(k(\mathrm{m}),M)+n\\&=\inf M-\mathrm{pd}\ k(\mathrm{m})+n=\inf M,\end{aligned}$$

که در آن چهارمین تساوی با استفاده از اثبات قضیهٔ ۱.۲ [۱۵] و پنجمین تساوی با استفاده از لم ۱۴.۲.۶ [۱۶] به‌دست می‌آید.

بنابراین نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{Gid}_{\hat{R}}\big(M\otimes_R \hat{R}\big)\leq\ \mathrm{Gid_R}\mathbf{R}\Gamma_\mathrm{m}(M)$. برای اثبات طرف دیگر نامساوی، فرض می‌کنیم $\mathrm{Gid}_{\hat{R}}\big(M\otimes_R \hat{R}\big)=t$، با توجه به لم ۴ داریم:

$$\mathrm{Gid}_R\mathbf{R}\Gamma_\mathrm{m}(M)=\ \mathrm{Gid}_{\hat{R}}\mathbf{R}\Gamma_\mathrm{m}(M)=\mathrm{Gid}_{\hat{R}}\mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{m}\hat{R}}\big(M\otimes_R \hat{R}\big).$$

بدون کم شدن از کلیت ادعا، فرض می‌کنیم R حلقهٔ کامل است و بنابراین یک هم بافت دوگان ساز دارد. با توجه به قضیهٔ ۳.۳ [۴]، برای هر تحلیل انژکتیو

$$\mathcal{J}\coloneqq 0\to I_n\to I_{n-1}\to\cdots\to I_{-t+1}\to I_{-t}\to\cdots$$

از M ، مدول $G_{-t}=\mathrm{Im}(I_{-t+1}\to I_{-t})$ یک R- مدول انژکتیو گورنشتاین است. اگر فانکتور $\Gamma_\mathrm{m}(-)$ را روی هم‌بافت بالا اثر دهیم، آن‌گاه داریم $\mathbf{R}\Gamma_\mathrm{m}(M)\simeq\Gamma_\mathrm{m}(\mathcal{J})$ و طبق قضیهٔ ۲.۳ [۱۲] مدول $\Gamma_\mathrm{m}(G_{-t})$ انژکتیو گورنشتاین است. بنابراین این حقیقت نتیجه می‌دهد که $\mathrm{Gid}_R M=t\geq\ \mathrm{Gid}_R\mathbf{R}\Gamma_\mathrm{m}(M)$ و حکم ثابت می‌شود.

ادعای دوم بر اساس لم ۶ و لم ۳ و قسمت اول قضیهٔ به‌دست می‌آید.

یادآوری می‌کنیم که یک حلقهٔ موضعی کوهن-مکالی (R,m) دارای **چندگانگی مینیمال** است هرگاه یک سیستم از پارامترهای $\mathrm{x}=x_1,\cdots,x_d$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\mathrm{xm}=\mathrm{m}^2$.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1398.5.2.10.4]
[DOI: 10.29252/mmr.5.2.157]

هم‌چنین یادآوری می‌کنیم که فانکتور کامل‌سازی از هم‌بافت M به‌صورت $\mathbf{L}\Lambda^{\mathrm{m}}(M) = \Lambda^{\mathrm{m}}(P)$ تعریف شده است که در آن

$$\Lambda^{\mathrm{m}}(-) = \varprojlim_{n}(R/\mathrm{m}^n \otimes_R -)$$

یک فانکتور روی کاتگوری R-مدول‌ها است و P یک تحلیل پروژکتیو از M است.

وقتی‌که M یک R-مدول متناهی مولد است، به‌راحتی دیده می‌شود که $\mathbf{L}\Lambda^{\mathrm{m}}(M) \simeq \Lambda^{\mathrm{m}}(M) \cong M \otimes_R \widehat{\mathrm{R}}$.
فانکتور کامل‌سازی می‌تواند به‌وسیلهٔ هم‌بافت چک[1] از مولدهای m نیز، محاسبه شود. در حقیقت برای هر $M \in D(R)$ یک یک‌ریختی به‌صورت $\mathbf{L}\Lambda^{\mathrm{m}}(M) \simeq \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(C(\mathrm{m}), M)$ در $D(R)$ وجود دارد.
با توجه به صفحه ۶ [۱۷]، نتیجه، قسمت (iii) و (iv)]، برای هر هم‌بافت $M \in D(R)$ و هر ایده‌آل m از R، شبه یک‌ریختی $\mathbf{L}\Lambda^{\mathrm{m}}(M) \simeq \mathbf{L}\Lambda^{\mathrm{m}}\big(\mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{m}}(M)\big)$ وجود دارد.
یوشینو [۵] نشان داد که روی یک حلقهٔ موضعی کوهن-مکالی غیر گورنشتاین با چندگانگی مینیمال، مدول غیرآزاد از G-بُعد صفر وجود ندارد. این حقیقت قضیهٔ ۹ را نتیجه می‌دهد.

قضیهٔ ۹. فرض کنیم R یک حلقهٔ موضعی و کوهن-مکالی با چندگانگی مینیمال باشد که گورنشتاین نیست. در این‌صورت هر مدول متناهی مولد از بُعد انژکتیو گورنشتاین متناهی دارای بُعد انژکتیو متناهی است.

اثبات. بدون کم شدن از کلیت ادعا، فرض می‌کنیم R یک حلقهٔ کامل باشد. فرض کنیم M یک مدول متناهی مولد از بُعد گورنشتاین متناهی با $\mathrm{Gid}_R M = t$ باشد و تحلیل انژکتیو مینیمال

$$\mathcal{J} := 0 \to E^0 \to E^1 \to \cdots$$

از M با $K^i = \mathrm{Ker}\ (E^i \to E^{i+1})$ را در نظر می‌گیریم. طبق قضیهٔ ۱۲.۴ [۱۲] برابری

$$\mathrm{Gid}_R \mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{m}}(M) = \mathrm{Gid}_R M = t$$

را داریم و بنابراین $\Gamma_{\mathrm{m}}(K^t)$ مدول انژکتیو گورنشتاین آرتینی است. پس $\mathrm{Hom}_R(\Gamma_{\mathrm{m}}(K^t), E\left(\frac{R}{\mathrm{m}}\right))$ از G-بُعد صفر است. حالا، نتیجه ۵.۲ [۵] نتیجه می‌دهد که $\mathrm{Hom}_R(\Gamma_{\mathrm{m}}(K^t), E\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{m}}\right))$ آزاد است و بنابراین $\Gamma_{\mathrm{m}}(K^t)$ انژکتیو است. بنابراین $\mathrm{id}_R \mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{m}}(M) < \infty$. از طرف دیگر، چون R کامل است، دارای مدول دوگان ساز ω است و این شبه یک‌ریختی‌ها وجود دارند:

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R\left(\omega \otimes_R^L C(\mathrm{m}), \mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{m}}(M)\right) \simeq \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R\big(\omega, L\Lambda^{\mathrm{m}}\mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{m}}(M)\big)$$
$$\simeq \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(\omega, L\Lambda^{\mathrm{m}} M)) \simeq \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(\omega, M \otimes_R \hat{R})) \simeq \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(\omega, M).$$

چون $C(\mathrm{m})$ از بُعد یک‌دست متناهی است، پس از بُعد پروژکتیو متناهی است بنابراین به‌راحتی می‌توان نشان داد که $\mathrm{id}_R(\omega \otimes_R^L C(\mathrm{m})) < \infty$. حالا، چون $\mathrm{id}_R \mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{m}}(M) < \infty$، اولین هم‌بافت شبه یک‌ریختی‌های بالا از بُعد یک‌دست متناهی است از این‌رو، آخرین هم‌بافت از بُعد یک‌دست متناهی است. بنابراین $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(\omega, M)$ از بُعد پروژکتیو متناهی است و دارای تحلیل آزاد به‌صورت

$$0 \to F_t \to \cdots \to F_{s+1} \to F_s \to 0$$

است به‌طوری‌که هر F_i متناهی مولد است. از طرف دیگر چون $\mathrm{Gid}_R M < \infty$، پس شبه‌یک‌ریختی $\omega \otimes_R^L \mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(\omega, M) \simeq M$ وجود دارد و بنابراین دنبالهٔ دقیق

1.Cesh Complex

$$0 \to \omega \otimes_R F_t \to \cdots \to \omega \otimes_R F_{s+1} \to \omega \otimes_R F_s \to M \to 0$$

را داریم. چون برای هر i، $\mathrm{id}_R(M \otimes_R \mathrm{F}_i) < \infty$، پس داریم $\mathrm{id}_R M < \infty$.

قضیهٔ ۱۰. فرض کنیم (R,m,k) حلقهٔ موضعی و کوهن-مکالی باشد.در این‌صورت R -مدول متناهی مولد ناصفر N موجود است به‌طوری‌که $\mathrm{Gid}_R N < \infty$.

اثبات. فرض می‌کنیم $x_1 . x_2 . \cdots . x_d \in \mathrm{m}$ یک سیستم پارامتری از R باشد و قرار می‌دهیم

$$\mathrm{X} := R/< x_1 . x_2 . \cdots . x_d >.$$

پس X یک R -مدول با طول متناهی است و $\mathrm{pd}_R X = d$.

حال به‌راحتی می‌توان نشان داد که $N = \mathrm{Hom}_R(X, E(k))$ یک R-مدول متناهی مولد ناصفر با $\mathrm{id}_R N = d$ است. بنابراین $\mathrm{Gid}_R N = \mathrm{id}_R N < \infty$.

منابع

1. Bass H., "On the ubiquity, Stable of Gornestein rings", Math. Z. 82 (1963) 8-28.
2. Peskine C., Szpiro L., "Dimension projective finite et cohomologie local", Publ. Math. I. H. E. S. 42 (1972) 47-119.
3. Levin G., Vasconcelos W. V., "Homological dimensions and Macaulay rings", Pacific J. Math, 25 (1968) 315-323.
4. Christensen L. W., Frankild A., Holm H., "On Gorentein projective, injective and flat dimensions-A factorial descripotion with applications", J. Algebra, 302 (2006) 231-279.
5. Yoshino Y.," Modules of G-dimension zero over local rings with the cube of maximal ideal being zero", commutative algebra, singularities and computer algebra (Sinaia, 2002) NATo Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., vol, 115, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (2003) 255-273.
6. Enochs E., Jenda O. M. G., "Gorestein injective and projective modules", Math. Z, 220 (1995) 611-633.
7. Sazeedeh R., "Gorenstein injective modules and local cohomology", Proc. Amer. Math. Soc, 132 (2004) 2885-2891.
8. Weibel C. A., "An introduction to homological algebra", Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol 38 Cambridge University Press (1994).
9. Lipman J., "Lectures on local cohomology and duality", in perparation.
10. Foxby H. B., Frankild A. J., "Cyclic modules of finite Gorenstein injective dimension and Gorenstien rings", Illinois. J. Math, 51 (2007) 67-82.
11. Christensen L. W., Sather-Wagstaff S., "Transfer of Gorenstein dimension along ring homomorphisms", J. Pure Appl. Algebra, 214 (2010) 982-989.

12. Sazeedeh R., "Gorenstein injectivity of the section functor", Forum. Math, 22 (2010) 1117-1127.

13. Holm H., "Gorenstein homological dimensions", J. Pure Appl. algebra, 189 (2004) 167-193.

14. Esmkhani M. A., Tousi M., "Gorenstein homological dimensions and Auslander categories", J. Algebra, 308 (2007) 321-329.

15. Foxby H. B., Iyengar S., "Depth and amplitude for unbounded complexes", Contemporary Mathematics 331 (2003) 119-137.

16. Christensen L. W., Foxby H. B., "Hyperhomological algebra with application to commutative rings", (10 Dec 2006) notes in preparation.

17. Tarro L. A., Lopez A. J., Lipman J., "Local homology and cohomology on schemes", Ann. Sci. Ecole Norm. Sup, 30 (1997) 1-39.