

یک روش طیفی بر پایه چند جمله‌ای‌های هان برای حل عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل مرتبه کسری با هسته به‌طور ضعیف منفرد

فریده صالحی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرمان، دانشکده ریاضی،

حبیب‌الله سعیدی*

دانشگاه شهید باهنر کرمان، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، بخش ریاضی کاربردی،

محمود محسنی مقدم

دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرمان، دانشکده ریاضی

پذیرش ۹۷/۰۴/۰۶

دریافت ۹۶/۰۸/۱۹

چکیده

در این مقاله، چند جمله‌ای‌های گسسته هان و کاربرد آنها برای حل عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل مرتبه کسری به‌طور ضعیف منفرد بررسی می‌شوند. این مقاله، برای اولین بار ماتریس عملیاتی انتگرال مرتبه کسری چند جمله‌ای‌های هان را ارائه می‌کند و با استفاده از آن معادله انتگرال مورد نظر به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌شود. هم‌چنین در این مقاله کران بالای خطای تقریب یک تابع بهوسیله این چند جمله‌ای‌ها محاسبه می‌شود. سپس با حل چند مثال عددی نشان داده می‌شود که با به‌کارگیری تعداد کمی از جملات بسط نتایج قابل قبولی حاصل می‌شوند که با نتایج حاصل از روش‌های دیگر مقایسه می‌شوند. دقت قابل قبول به همراه روند پیاده‌سازی ساده، از خصوصیات روش مورد بحث است.

واژه‌های کلیدی: معادلات انتگرال-دیفرانسیل مرتبه کسری منفرد ضعیف، چند جمله‌ای‌های هان، ماتریس عملیاتی، روش طیفی

مقدمه

امروزه بحث حسابان کسری در بسیاری از شاخه‌های علوم و مهندسی به‌دلیل دقت بیشتر عملگرهای مرتبه کسری در مدل‌سازی‌های پدیده‌های طبیعی به‌صورت گسترده‌ای ظهور پیدا کرده است [۱]، [۲]. از آن‌جا که حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل و انتگرال با مرتبه کسری مشکل است پژوهش‌گران بسیاری بر حل عددی این مسائل متمرکز شده‌اند روش‌هایی از قبیل روش عناصر متناهی [۳]، روش تاو عملیاتی [۴]، روش‌های ماتریس عملیاتی موجک‌های هار، سینوس-کسینوس و موجک برنولی [۵]، [۶]، [۷]، [۸] و استفاده از برخی از توابع مرتبه کسری [۹]، از جمله تکنیک‌های ارائه شده برای حل عددی این معادلات هستند.

معادلات انتگرال-دیفرانسیل مرتبه کسری با هسته به‌طور ضعیف منفرد، رده‌ای از معادلات کسری هستند که در مدل‌سازی فرایندهای فیزیکی [۱۰]، مسائل هدایت گرما [۱۱]، تشعشعات رادیو اکتیو [۱۲] و بسیاری زمینه‌های دیگر کاربرد دارند.

علیرغم وجود روش‌های متعددی که برای حل عددی معادلات دیفرانسیل و انتگرال مرتبه کسری ارائه شده‌اند، در زمینه حل عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل مرتبه کسری با هسته به‌طور ضعیف منفرد، تحقیقات نسبتاً کم‌تری

صورت گرفته و روش‌هایی از قبیل روش تجزیه آدومین [۱۳]، روش ماتریس عملیاتی موجک‌های هار و سینوس-کسینوس [۱۴] و چبیشف [۱۵]، ارائه شده‌اند.

تاکنون روش‌های عملیاتی با استفاده از پایه‌های متعامد پیوسته مانند چندجمله‌ای‌های ژاکوبی، چبیشف، لژاندر و غیره [۴]، [۵] برای حل انواع معادلات مرتبه کسری به‌کار گرفته شده‌اند. چندجمله‌ای‌های متعامد گسسته دسته‌ای دیگر از چندجمله‌ای‌های متعامد هستند که نسبت به ضرب داخلی گسسته متعامد هستند. در سال‌های اخیر این چندجمله‌ای‌ها برای حل عددی معادلات دیفرانسیل تصادفی [۱۶] و مسائل مکانیک سیالات [۱۷] به‌طور موفقیت‌آمیزی به‌کار گرفته شده‌اند.

در این مقاله روندی جدید برای حل عددی معادلات انتگرال کسری با هسته به‌طور ضعیف منفرد، با استفاده از دسته خاصی از پایه‌های گسسته به نام چندجمله‌ای‌های گسسته هان ارائه می‌شود. در ابتدا، برای اولین بار، ماتریس عملیاتی انتگرال کسری پایه‌های گسسته هان محاسبه می‌شود و با استفاده از آن، عملگر انتگرالی حذف و معادله به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌شود. این روش، روند به‌کارگیری ساده‌ای دارد و الگوریتم محاسبه جواب عددی، محاسبات پیچیده‌ای را شامل نمی‌شود. این ویژگی که در بسط تابع جواب با پایه‌های پیوسته، ضرایب بسط با یک انتگرال که غالباً به‌صورت عددی محاسبه می‌شود، به‌دست می‌آیند، در حالی که پایه‌های گسسته با محاسبه یک مجموع، ضرایب بسط را به‌طور دقیق محاسبه می‌کنند و طبیعتاً منجر به حصول جواب‌های دقیق‌تری برای معادله مورد نظر می‌شوند، از دیگر انگیزه‌های به‌کارگیری روش حاضر است.

در این مقاله قصد داریم کاربرد دسته‌ای خاص از این چندجمله‌ای‌ها را برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری با هسته به‌طور ضعیف منفرد به‌صورت کلی زیر با شرط اولیه $y(0) = 0$ بررسی کنیم:

$$D_c^\alpha y(t) = \lambda_1 \int_0^t \frac{y(s)}{(t-s)^\beta} ds + \lambda_2 \int_0^1 K(t,s) y(s) ds + f(t) \quad (1)$$

که در آن $y(t)$ تابع مجهول، $K(t,s)$ و $f(t)$ توابع معلوم و λ_1 و λ_2 ثابت‌های حقیقی هستند. همچنین $0 < \alpha, \beta < 1$ و D_c^α نماد عملگر مشتق کسری از مرتبه α در مفهوم کاپوتو است.

این مقاله به‌شرح ذیل سازماندهی شده است: در بخش دوم، تعاریف مورد نیاز حساب کسری و در بخش سوم تعریف و ویژگی‌های چندجمله‌ای‌های هان، آورده شده است. در این بخش، بحث تقریب توابع پیوسته با توابع گسسته مطرح می‌شود و یک کران بالای خطا نیز برای تقریب مورد نظر محاسبه می‌شود. همچنین، ماتریس عملیاتی انتگرال مرتبه کسری برای این چندجمله‌ای‌ها نیز در این بخش، محاسبه می‌شود. در بخش چهارم شرح روش ماتریس عملیاتی بر پایه چندجمله‌ای‌های هان مطرح می‌شود و در بخش پنجم، برای نشان دادن کارایی و دقت روش، مثال‌های عددی آورده شده است. بخش آخر نیز به نتیجه‌گیری اختصاص یافته است.

حسابان کسری

تعریف ۱. عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل مرتبه α ، J^α ، بدین صورت تعریف می‌شود [۱۵]:

$$J^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, & 0 \leq t-1 < \alpha < t, \\ f(t), & \alpha = 0. \end{cases} \quad (2)$$

به‌عنوان مثال، انتگرال کسری تابع $f(t) = t^\gamma$ برای $t > -1$ بدین صورت است:

$$J^\alpha t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} t^{\alpha+\gamma} \quad (3)$$

تعریف ۲. عملگر مشتق کسری کاپوتو D_c^α بدین صورت تعریف می‌شود:

$$D_c^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{d^r f(t)}{dt^r}, & \alpha = r \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{\Gamma(r-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(r)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-r+1}} d\tau, & 0 \leq r-1 < \alpha < r. \end{cases}$$

رابطه عملگر انتگرال ریمان-لیوویل و عملگر مشتق کاپوتو عبارت است از:

$$J^\alpha D_c^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!}, \quad t > 0. \quad (4)$$

برای بررسی جزئیات بیش‌تر به [۱۷] رجوع شود.

چندجمله‌ای‌های هان و ماتریس عملیاتی انتگرال مرتبه کسری آن:

۱. چندجمله‌ای‌های هان و ویژگی‌های آن

تعریف ۳. برای اعداد حقیقی $\mu, \nu > -1$ و برای $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ، چندجمله‌ای‌های هان درجه n ، برای $n = 0, 1, \dots, N$ در بازه $I = [0, N]$ با نماد $H_n(x; \mu, \nu, N)$ یا $H_n(x)$ نشان داده می‌شوند و به‌صورت (۵) تعریف می‌شوند [۱۸]:

$$H_n(x; \mu, \nu, N) = \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n + \mu + \nu + 1)_k (-x)_k}{(\mu + 1)_k (-N)_k k!}. \quad (5)$$

که $(a)_k$ ، نماد پوچهمر^۱ است و به‌صورت (۶) تعریف می‌شود:

$$(a)_0 := 1, \quad (a)_k := a(a+1)(a+2)\dots(a+k-1), \quad k \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

چندجمله‌ای‌های هان نسبت به ضرب داخلی گسسته زیر در بازه I متعامدند [۱۹]:

$$\langle f, g \rangle := \sum_{x=0}^N f(x)g(x)w(x)$$

که $w(x)$ تابع وزن است و بدین صورت تعریف می‌شود:

$$w(x) = \binom{\mu+x}{x} \binom{\nu+N-x}{N-x}.$$

این چندجمله‌ای‌ها در رابطه تعامد زیر صدق می‌کنند:

$$\langle H_m(x; \mu, \nu, N), H_n(x; \mu, \nu, N) \rangle = \begin{cases} \frac{(-1)^n (n + \mu + \nu + 1)_{N+1} (\nu + 1)_n n!}{(2n + \mu + \nu + 1)(\mu + 1)_n (-N)_n N!} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

۲. تقریب توابع پیوسته با استفاده از چندجمله‌ای‌های هان:

در قضیه ۱.۱ از مرجع [۲۰] اثبات می‌شود تابع $y \in C[-1, N+1]$ که تابعی با تغییرات کراندار است را می‌توان

با سری قطع شده زیر برحسب چندجمله‌ای‌های هان تقریب زد:

¹ Pochhammer

$$y(t) \approx \sum_{n=0}^N c_n H_n(t) = \mathbf{C}^T \mathbf{H}(t) \quad (7)$$

که

$$\mathbf{C} = [c_0, c_1, \dots, c_n]^T, \mathbf{H}(t) = [H_0(t), \dots, H_n(t)]^T$$

و ضرایب c_n بدین صورت محاسبه می‌شوند:

$$c_n = \langle y, H_n \rangle.$$

آنالیز همگرایی

در این بخش، یک کران بالای خطا، با توجه به قضیه وجود بهترین تقریب توابع در [۲۱] با روندی مشابه با آن چه در [۸] ارائه شده است، برای تقریب تابع f با سری چندجمله‌ای‌های گسسته هان محاسبه می‌شود. قضیه. فرض کنید $f \in C^{m+1}[0, t_f]$ و $Y := \text{span}\{H_i, i=1, \dots, m\}$. اگر $C^T H(t)$ بهترین تقریب f روی Y باشد، آن‌گاه کران بالای خطای تقریب تابع بدین صورت است:

$$\|f - C^T H\|_{\infty} \leq \frac{MS^{m+1}}{(m+1)!}$$

که $S = \max\{|t-t_0|, t_0\}$ و $M = \max_{t \in [0, t_f]} |f^{(m+1)}(t)|$ اثبات. چندجمله‌ای تیلور تابع دلخواه $f_1 \in C^{m+1}[0, t_f]$ را حول نقطه $[0, t_f]$ بدین صورت در نظر می‌گیریم:

$$f_1(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0) + f''(t_0) \frac{(t-t_0)^2}{2!} + \dots + f^{(m)}(t_0) \frac{(t-t_0)^m}{m!}$$

که

$$|f(t) - f_1(t)| = \left| f^{(m+1)}(\varepsilon) \frac{(t-t_0)^{m+1}}{(m+1)!} \right| \quad \exists \varepsilon \in (0, t_f)$$

چون $C^T H(t)$ بهترین تقریب برای f است، بنابراین داریم:

$$\|f - C^T H(t)\|_{\infty} \leq \|f - f_1\|_{\infty} \leq \max_{t \in [0, t_f]} \left| f^{(m+1)}(t) \right| \frac{|t-t_0|^{m+1}}{(m+1)!} \leq \frac{MS^{m+1}}{(m+1)!}.$$

به این ترتیب یک کران بالای خطا برای تقریب تابع پیوسته مورد نظر به دست می‌آید.

بسط چندجمله‌ای‌های هان بر حسب سری تیلور:

لم ۱. [۲۲] برای محاسبه مشتق و انتگرال کسری چندجمله‌ای‌های هان، نیاز است که این چندجمله‌ای‌ها را با استفاده از این رابطه بر حسب سری تیلور بسط دهیم:

$$(-x)_k = (-1)^k \sum_{m=0}^k s_k^{(m)} x^m \quad (8)$$

که $s_k^{(m)}$ اعداد استرلینگ نوع اول هستند و $s_0^{(0)} = 1$.

با استفاده از روابط (۵) و (۸)، بسط چندجمله‌ای‌های هان را بر حسب سری تیلور بدین صورت داریم:

$$H_n(x; \mu, \nu, N) = \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k (-1)^k \frac{(-n)_k (n + \mu + \nu + 1)_k}{(\mu + 1)_k (-N)_k k!} s_k^{(m)} x^m.$$

لم ۲. اگر $\mathbf{H}(x) := [H_0(x), H_1(x), \dots, H_N(x)]^T$ که $H_i(x) := H_i(x; \mu, \nu, N)$ و

$\mathbf{T}_N(x) = [1, x, \dots, x^N]^T$ به ترتیب بردارهای پایه هان و تیلور باشند، آن‌گاه

$$\mathbf{H}(x) = \mathbf{A} \mathbf{T}_N(x), \tag{۹}$$

که $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ یک ماتریس $(N+1) \times (N+1)$ است و

$$a_{i+1, j+1} = \begin{cases} \sum_{k=j}^i (-1)^k \frac{(-i)_k (i + \mu + \nu + 1)_k}{(\mu + 1)_k (-N)_k k!} s_k^{(j)}, & i \geq j, \\ 0, & i < j, \end{cases} \quad i, j = 0, \dots, N. \tag{۱۰}$$

اثبات. با ضرب ماتریس \mathbf{A} در \mathbf{T}_N ، رابطه (۹) به سادگی نتیجه می‌شود.

لم ۳. ماتریس \mathbf{A} معکوس‌پذیر است.

اثبات. ماتریس \mathbf{A} طبق تعریف یک ماتریس بالا مثلثی است، بنابراین داریم:

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=0}^N a_{i+1, i+1} = \prod_{i=0}^N (-1)^i \frac{(-i)_i (i + \mu + \nu + 1)_i}{(\mu + 1)_i (-N)_i i!} s_i^{(i)}$$

از طرفی از (۶) برای $i = 0, \dots, N$ و $\mu, \nu \geq -1$ داریم:

$$(-i)_i \neq 0, \quad (i + \mu + \nu + 1)_i \neq 0, \quad (\mu + 1)_i \neq 0, \quad (-N)_i \neq 0, \quad s_0^{(0)} = 1 \neq 0.$$

در نتیجه با توجه به معکوس‌پذیری ماتریس \mathbf{A} از رابطه (۹) نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{T}_N(x) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{H}(x). \tag{۱۱}$$

محاسبه ماتریس عملیاتی انتگرال کسری چندجمله‌ای‌های هان

قضیه ۱. فرض کنید $\mathbf{P}^a_{(N+1) \times (N+1)}$ ماتریس عملیاتی انتگرال کسری چندجمله‌ای‌های هان باشد یعنی

$$J^\alpha \mathbf{H}(x) = \mathbf{P}^a \mathbf{H}(x) \tag{۱۲}$$

آن‌گاه

$$\mathbf{P}^a = \mathbf{A} \mathbf{\Lambda}_\alpha \mathbf{B}_\alpha. \tag{۱۳}$$

اثبات. از روابط (۳) و (۹) داریم:

$$\begin{aligned} J^\alpha \mathbf{H}(x) &= J^\alpha \mathbf{A} \mathbf{T}_N = \mathbf{A} J^\alpha \mathbf{T}_N \\ &= \mathbf{A} \underbrace{\text{diag} \left[\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)}, \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha+2)}, \dots, \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(\alpha+N+1)} \right]}_{\mathbf{\Lambda}_\alpha} \underbrace{\left[x^\alpha \quad x^{\alpha+1} \quad \dots \quad x^{\alpha+N} \right]^T}_{\mathbf{x}_\alpha^T} = \mathbf{A} \mathbf{\Lambda}_\alpha \mathbf{X}_\alpha. \end{aligned} \tag{۱۴}$$

حال بردار \mathbf{X}_α را بر حسب پایه‌های هان بدین صورت تقریب می‌زنیم:

$$x^{\alpha+k} = \sum_{j=0}^N d_{kj} H_j(x) = \mathbf{B}_k^T \mathbf{H}(x) \tag{۱۵}$$

که در آن $\mathbf{B}_k^T = [b_{k0}, b_{k1}, \dots, b_{kN}]$ و $b_{kj} = \frac{\langle x^{\alpha+k}, H_j(x) \rangle}{\langle H_j(x), H_j(x) \rangle}$. بنابراین از (۱۴) و (۱۵) داریم:

$$J^\alpha \mathbf{T}_N(x) = \mathbf{\Lambda}_\alpha \mathbf{B}_\alpha \mathbf{H}(x) \tag{۱۶}$$

که $\mathbf{B}_\alpha = [\mathbf{B}_0^T, \mathbf{B}_1^T, \dots, \mathbf{B}_N^T]^T$ سرانجام از (۱۴) و (۱۶) قضیه اثبات می‌شود.

حل معادله انتگرال-دیفرانسیل مرتبه کسری با هسته به‌طور ضعیف منفرد با استفاده از

چندجمله‌ای‌های هان

ابتدا توابع $D_c^\alpha y(t)$ ، $k(s, t)$ و $f(t)$ بر حسب چندجمله‌ای‌های هان بدین صورت تقریب زده می‌شود:

$$D_c^\alpha y(t) \approx \mathbf{C}^T \mathbf{H}(t), \quad (17)$$

$$k(t, s) \approx \mathbf{H}(t)^T \mathbf{K} \mathbf{H}(s), \quad (18)$$

$$f(t) \approx \mathbf{F}^T \mathbf{H}(t), \quad (19)$$

که \mathbf{C} بردار مجهول و $\mathbf{K} = [k_{ij}]$ یک ماتریس $(N+1) \times (N+1)$ است و $k_{ij} = \frac{\langle H_i(t), \langle K(t, s), H_j(s) \rangle \rangle}{\langle H_i(t), H_i(s) \rangle^2}$ بردار \mathbf{F}

ضرایب تابع f بر حسب چندجمله‌ای‌های هان است.

با اعمال عملگر انتگرال ریمان-لیوویل J^α ، بر رابطه (۱۷) و با استفاده از رابطه (۴) داریم:

$$\begin{aligned} y(t) &= J^\alpha D_c^\alpha y(t) + \sum_{k=0}^{r-1} y^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} = \mathbf{C}^T J^\alpha \mathbf{H}(t) + \sum_{k=0}^{r-1} y^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} \\ &= \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \mathbf{H}(t) + \sum_{k=0}^{r-1} y^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} = \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \mathbf{H}(t) \end{aligned} \quad (20)$$

که تساوی آخر از شرط اولیه $y(0) = 0$ و $r = 1$ نتیجه می‌شود.

حال با در نظر گرفتن جملات انتگرالی معادله (۱) و جای‌گزینی معادله (۲۰) در آنها داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{y(s)}{(t-s)^\beta} ds &\approx \int_0^t \frac{\mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \mathbf{H}(s)}{(t-s)^\beta} ds = \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \mathbf{A} \int_0^t \frac{\mathbf{T}(s)}{(t-s)^\beta} ds \\ &= \Gamma(1-\beta) \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \underbrace{\mathbf{A} \mathbf{A}_{1-\beta} \mathbf{B}_{1-\beta}}_{\mathbf{P}^{1-\beta}} \mathbf{H}(t) = \Gamma(1-\beta) \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \mathbf{P}^{1-\beta} \mathbf{H}(t). \end{aligned} \quad (21)$$

و به‌همین ترتیب از (۱۸) و (۲۰) داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^1 k(t, s) y(s) ds &\approx \int_0^1 \mathbf{H}^T(t) \mathbf{K} \mathbf{H}(s) \mathbf{H}^T(s) (\mathbf{P}^\alpha)^T \mathbf{C} ds \\ &\approx \mathbf{H}^T(t) \mathbf{K} \int_0^1 \mathbf{H}(s) \mathbf{H}^T(s) ds (\mathbf{P}^\alpha)^T \mathbf{C} = \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \mathbf{I}^T \mathbf{K}^T \mathbf{H}(t), \end{aligned} \quad (22)$$

که در آن $\mathbf{I} = \int_0^1 \mathbf{H}(s) \mathbf{H}^T(s) ds$. سرانجام با جای‌گذاری روابط (۱۷)، (۱۸)، (۲۱) و (۲۲) در (۱) داریم:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{H} = \lambda_1 \Gamma(1-\beta) \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \mathbf{P}^{1-\beta} \mathbf{H} + \lambda_2 \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \mathbf{I}^T \mathbf{K}^T \mathbf{H} + \mathbf{F}^T \mathbf{H} \quad (23)$$

با استفاده از خاصیت تعامد این پایه‌ها دستگاه معادلات خطی زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{C}^T = \lambda_1 \Gamma(1-\beta) \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \mathbf{P}^{1-\beta} + \lambda_2 \mathbf{C}^T \mathbf{P}^\alpha \mathbf{I}^T \mathbf{K}^T + \mathbf{F}^T$$

با حل این دستگاه، ضرایب مجهول \mathbf{C}^T به‌دست می‌آیند و در نتیجه تقریبی از جواب معادله (۱) به‌صورت (۷) حاصل می‌شود.

آنالیز خطا و بحث همواری جواب معادله (۱)، مشابه با روند مطرح شده در [۲۳] است.

مثال‌های عددی

در این بخش برای نشان دادن دقت و کارایی روش، مثال‌هایی با روش مورد بحث حل می‌شوند و نتایج عددی حاصل با نتایج حاصل از روش موجک‌های CAS، SCW و Haar و روش تجزیه آدومیان مقایسه می‌شوند. قابل ذکر است که موجک‌های CAS و SCW با پارامتر تأخیر $n=1, 2, \dots, 2^{k-1}$ که $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ و $m' = 2^k (2M + 1)$ که M تعداد افزاز بازه‌ها است، تعریف شده‌اند. هم‌چنین در روش تجزیه آدومیان، پارامتر n تعداد تکرارهای روش است.

مثال ۱. معادله انتگرال دیفرانسیل کسری با هسته به‌طور ضعیف منفرد زیر را در نظر بگیرید [۱۵]:

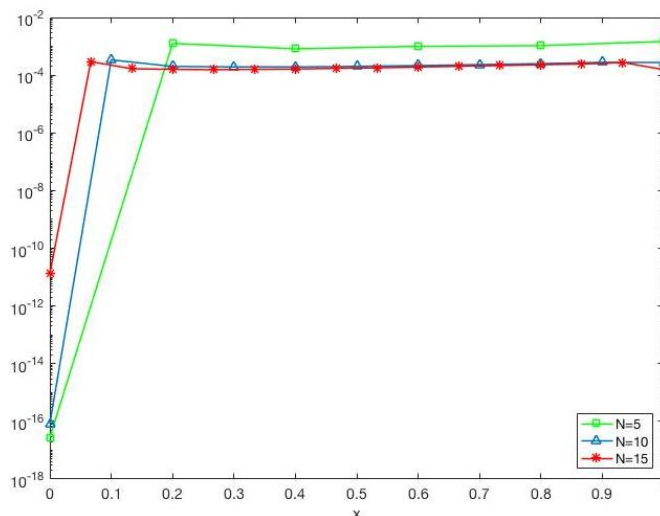
$$D_c^{0.15} y(t) = \frac{1}{4} \int_0^t \frac{y(s)}{(t-s)^{1/2}} ds + \frac{1}{7} \int_0^1 e^{t+s} y(s) ds + f(t), \quad y(0) = 0, \quad (24)$$

که در آن $f(t) = \frac{\Gamma(3)t^{1.85}}{\Gamma(2.85)} - \frac{\Gamma(2)t^{0.85}}{\Gamma(1.85)} - \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(3)t^{2.5}}{4\Gamma(3.5)} + \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(2)t^{1.5}}{4\Gamma(2.5)} - \frac{(e^{t+1}-3e^t)}{7}$ است و می‌دانیم که جواب دقیق معادله $y(t) = t^2 - t$ است. جدول ۱ مقایسه نتایج روش مذکور برای $\mu = \nu = 1$ ، با روش موجک CAS و روش موجک SCW از [۱۵] را نشان می‌دهد. شکل ۱ نیز نمودار خطا را برای N های مختلف نشان می‌دهد.

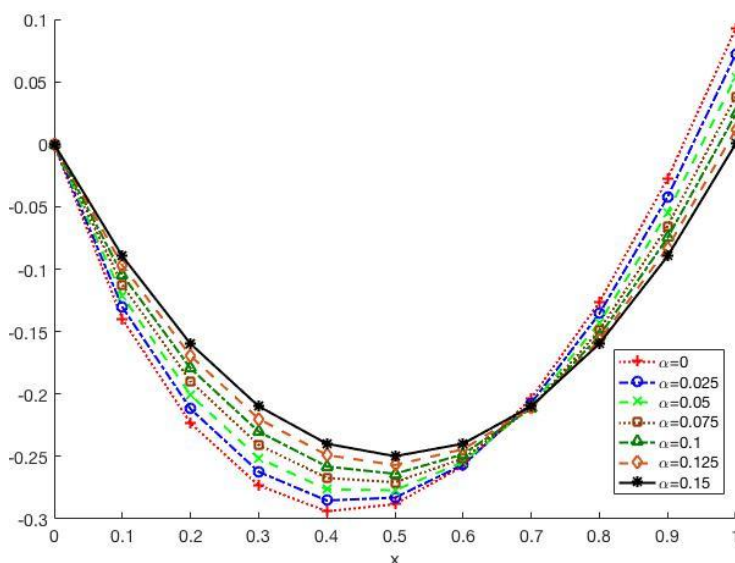
جدول ۱. مقایسه نرم خطاهای مطلق در نقاط مختلف برای مثال ۱

t	Hahn (N=5)	Hahn (N=10)	CAS (m'=12)	CAS (m' = 24)	SCW (k=2)
.	۲/۷۷۵۶e-۱۷	۸/۳۲۶۷e-۱۷	۲/۳۵۴e-۰۳	۹/۰۹۰e-۰۴	۱/۵۵۰۹e-۰۲
۱/۶	۱/۳۱۸۷e-۰۳	۲/۲۱۵۱e-۰۴	۱/۲۳۶e-۰۲	۵/۴۴۰e-۰۳	۵/۲۳۰e-۰۳
۲/۶	۹/۰۸۴۴e-۰۴	۱/۹۲۳۶e-۰۴	۱/۵۴۲e-۰۲	۶/۸۸۰e-۰۳	۶/۸۰۰e-۰۴
۳/۶	۸/۵۶۸۳e-۰۴	۲/۰۲۱۰e-۰۴	۱/۶۵۹۰e-۰۲	۷/۳۴۰e-۰۳	۶/۰۰۰e-۰۵
۴/۶	۱/۰۷۴۲e-۰۳	۲/۲۵۳۵e-۰۴	۱/۶۳۲e-۰۲	۷/۰۸۰e-۰۳	۹/۴۰۰e-۰۴
۵/۶	۱/۰۲۷۸e-۰۳	۲/۵۴۹۴e-۰۴	۱/۴۸۲e-۰۲	۶/۲۰۰e-۰۳	۱/۷۱۰e-۰۳
۶/۶	۱/۴۷۵۸e-۰۳	۲/۷۴۹۱e-۰۴	--	--	۱/۵۵۰۹e-۰۲

شکل ۲ جواب‌های تقریبی معادله (۲۴) را برای α های مختلف نشان می‌دهد که حاکی از این واقعیت است که وقتی $\alpha \rightarrow 0.15$ آن‌گاه جواب‌های تقریبی معادله نیز به جواب متناظر با $\alpha = 0.15$ میل می‌کند.



شکل ۱. مقایسه جواب‌های تقریبی و جواب دقیق در مثال ۱ برای $N = 5, 10, 15$



شکل ۲. جواب‌های تقریبی معادله (۲۴) به‌ازای α های مختلف

مثال ۲. معادله انتگرال دیفرانسیل کسری با هسته به‌طور ضعیف منفرد (۲۵) را در نظر بگیرید [۱۵]:

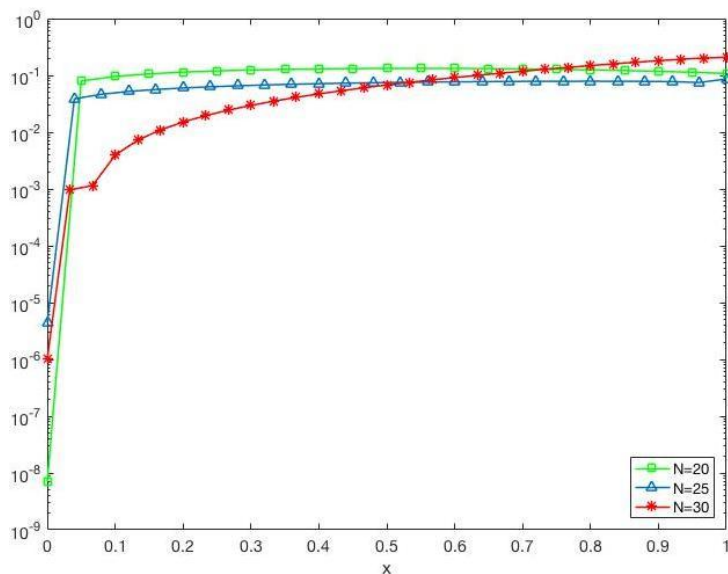
$$D_c^{0.25} y(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{y(s)}{(t-s)^{1/2}} ds + \frac{1}{3} \int_0^1 (t-s)y(s)ds + f(t), \quad y(0) = 0, \quad (25)$$

که در آن $f(t) = \frac{\Gamma(3)t^{1.75}}{\Gamma(2.75)} + \frac{\Gamma(4)t^{2.75}}{\Gamma(3.75)} - \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(3)t^{2.5}}{2\Gamma(3.5)} - \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(4)t^{3.5}}{2\Gamma(4.5)} - \frac{7t}{36} + \frac{3}{20}$ است و می‌دانیم که جواب دقیق معادله $y(t) = t^2 + t^3$ است.

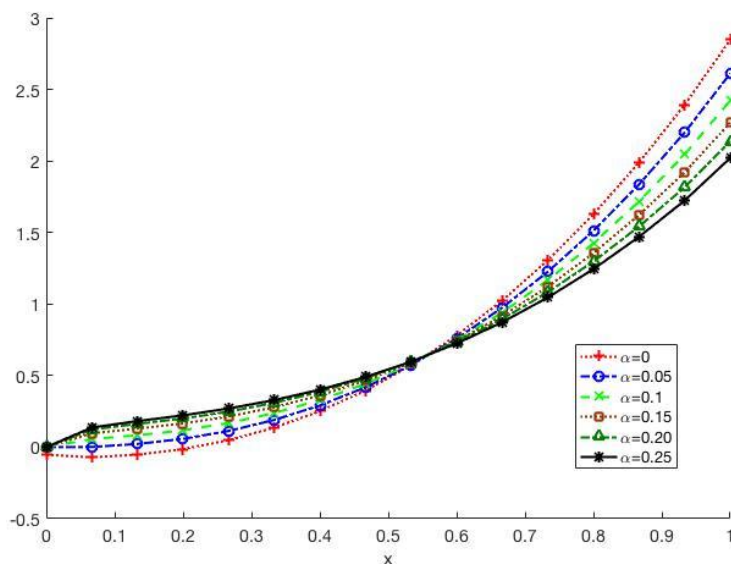
جدول ۲ مقایسه نتایج روش این مقاله را با روش موجک‌های CAS و Haar از مرجع [۱۴] و روش تجزیه آدومیان [۱۳] را نشان می‌دهد و شکل ۳ نیز نمودار خطا را برای N های مختلف نمایش می‌دهد. به‌علاوه شکل ۴ جواب‌های تقریبی معادله انتگرال (۲۵) را برای α های مختلف نشان می‌دهد که حاکی از این واقعیت است که وقتی $\alpha \rightarrow 0.25$ آن‌گاه جواب‌های تقریبی معادله نیز به جواب متناظر با $\alpha = 0.25$ میل می‌کند.

جدول ۲. مقایسه نرم خطاهای مطلق در نقاط مختلف برای مثال ۲

t	Hahn (N=20) $\mu = 0.5, \nu = 1$	Hahn (N=25) $\mu = 1, \nu = 0.9$	CAS (m'=12)	Haar (m=12)	ADM (n=3)
0	9.8455e-09	6.1340e-04	1.4328e-02	1.4637e-02	1.3865e-02
1/6	2.1311e-02	1.9821e-02	2.2762e-02	2.2962e-02	2.1426e-02
2/6	2.1954e-02	1.8472e-02	1.9409e-02	1.9651e-02	4.8235e-02
3/6	1.8696e-02	1.2096e-02	6.4173e-03	6.6357e-03	1.74571e-02
4/6	1.2461e-02	1.7469e-03	1.8012e-02	1.8301e-02	3.3671e-01
5/6	3.4020e-03	1.2270e-02	5.6450e-02	5.6553e-02	1.0679e-01
6/6	9.5902e-03	2.8197e-02	--	--	--



شکل ۲. مقایسه جواب‌های تقریبی و جواب دقیق در مثال ۲ برای $N = 15, 20, 25$



شکل ۴. جواب‌های تقریبی معادله (۲۵) به‌ازای α های مختلف

مثال ۳. معادله انتگرال دیفرانسیل کسری با هسته به‌طور ضعیف منفرد (۲۶) را در نظر بگیرید [۱۵]:

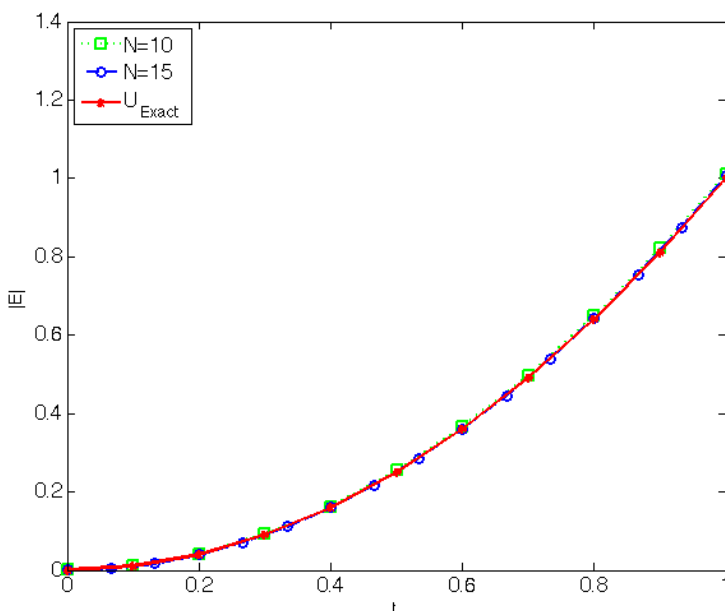
$$D_c^\alpha y(t) = \int_0^t \frac{y(s)}{(t-s)^{1/2}} ds + \int_0^1 (t + \sin(s)) y(s) ds + f(t), \quad y(0) = 0, \quad (26)$$

که در آن $f(t) = 2t - \frac{t}{3} - \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3)t^{5/2}}{2\Gamma(7/2)} - \cos(1) - 2\sin(1) + 2$ است. که جواب دقیق معادله برای $\alpha = 1$ ، برابر $y(t) = t^2$ است.

جدول ۳ قدر مطلق خطای حاصل از روش مورد بحث را به‌ازای $\mu = \nu = 1$ و $\alpha = 1$ نشان می‌دهد. به‌علاوه شکل ۵ جواب‌های تقریبی معادله انتگرال (۲۵) را برای $N = 10, 15$ نشان می‌دهد.

جدول ۳. خطاهای مطلق در نقاط مختلف برای مثال ۴

t	N=10	N=15
۰/۱۰	۱/۶۹۱۶e-۰۴	۱/۰۴۵۹e-۰۶
۰/۲۰	۶/۳۷۰۰e-۰۴	۲/۰۹۸۱e-۰۶
۰/۳۰	۱/۴۴۸۴e-۰۳	۲/۹۷۹۸e-۰۵
۰/۴۰	۲/۶۰۴۶e-۰۳	۱/۱۹۹۹e-۰۴
۰/۵۰	۴/۰۶۴۳e-۰۳	۳/۲۸۹۶e-۰۴
۰/۶۰	۵/۷۴۳۶e-۰۳	۷/۳۰۲۶e-۰۴
۰/۷۰	۷/۵۱۵۰e-۰۳	۱/۴۱۲۲e-۰۳
۰/۸۰	۹/۲۰۵۸e-۰۳	۲/۴۷۴۴e-۰۳
۰/۹۰	۱/۰۵۹۶e-۰۲	۴/۰۲۲۵e-۰۳



شکل ۵. جواب‌های تقریبی و جواب دقیق در معادله (۲۷) برای $N = 10, 15$

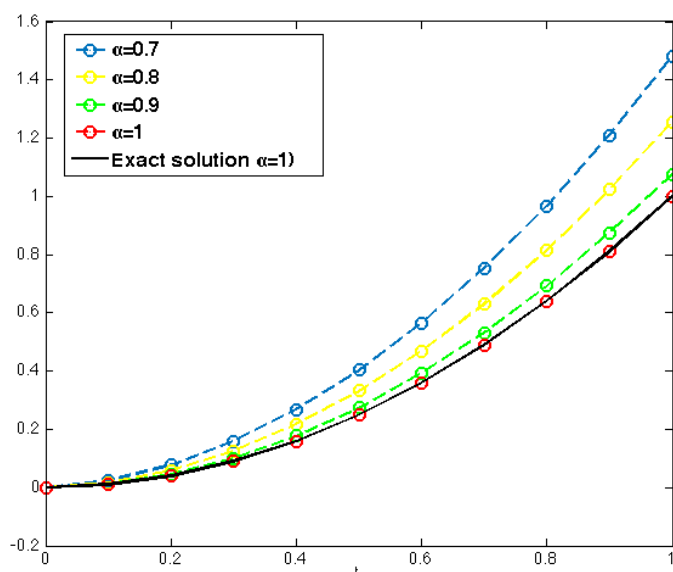
مثال ۴. معادله انتگرال دیفرانسیل کسری با هسته به‌طور ضعیف منفرد (۲۷) را در نظر بگیرید [۱۵]:

$$D_c^\alpha y(t) = \int_0^t \frac{y(s)}{(t-s)^{1/2}} ds + \int_0^1 (t^2 + \cos(s)) y(s) ds + f(t), \quad y(0) = 0, \quad (27)$$

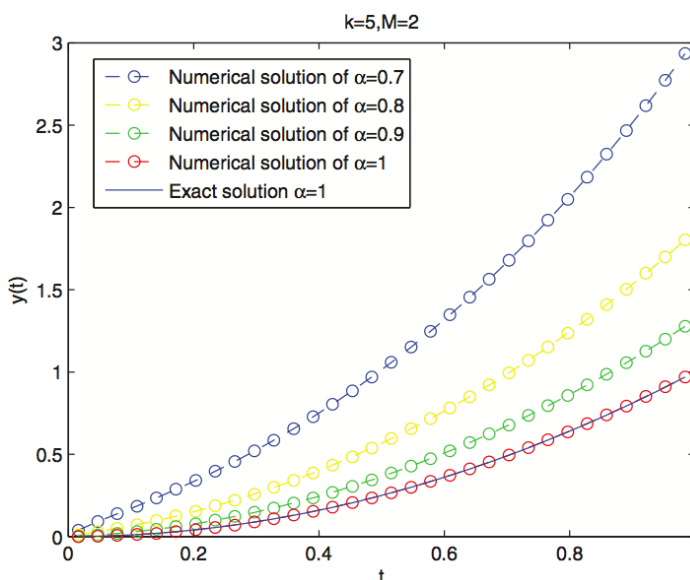
که در آن $f(t) = 2t - \frac{t^2}{3} - \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3)t^{5/2}}{\Gamma(7/2)} - 2\cos(1) + \sin(1)$ است. جواب دقیق معادله برای $\alpha = 1$ ، برابر $y(t) = t^2$ است.

شکل ۶ جواب‌های تقریبی معادله انتگرال (۲۷) را برای α های مختلف نشان می‌دهد که حاکی از این واقعیت

است که وقتی $\alpha \rightarrow 1$ آن‌گاه جواب‌های تقریبی معادله نیز به جواب متناظر با $\alpha = 1$ میل می‌کند. شکل ۷ برای مقایسه جواب‌های تقریبی روش ارائه شده در [۱۵] با نتایج حاصل در این مقاله آورده شده است.



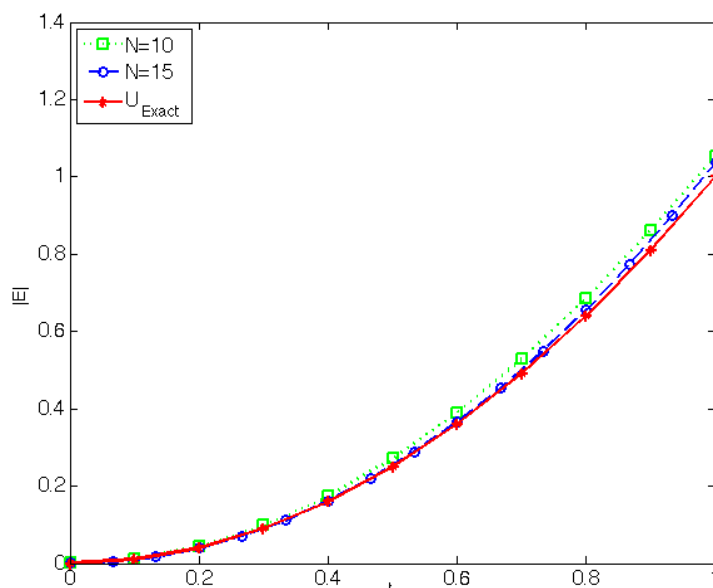
شکل ۶. جواب‌های تقریبی معادله (۲۷) به‌ازای α های مختلف



شکل ۷. جواب‌های تقریبی معادله (۲۷) به‌ازای α های مختلف مرجع [۱۵]

جدول ۴. خطاهای مطلق در نقاط مختلف برای مثال ۴

t	N=10	N=15
۰/۱۰	۹/۲۶۹۳e-۰۴	۱/۹۶۷۴e-۰۵
۰/۲۰	۳/۴۷۲۱e-۰۳	۱/۴۶۰۴e-۰۴
۰/۳۰	۷/۸۳۱۴e-۰۳	۵/۳۲۶۷e-۰۴
۰/۴۰	۱/۳۹۴۳e-۰۲	۱/۳۹۸۵e-۰۳
۰/۵۰	۲/۱۵۰۳e-۰۲	۳/۰۲۲۳e-۰۳
۰/۶۰	۲/۹۹۷۴e-۰۲	۵/۷۳۹۴e-۰۳
۰/۷۰	۳/۸۵۹۴e-۰۲	۹/۹۲۲۲e-۰۳
۰/۸۰	۴/۶۳۷۴e-۰۲	۱/۵۹۷۸e-۰۲
۰/۹۰	۵/۲۱۰۵e-۰۲	۲/۴۳۲۲e-۰۲



شکل ۷. جواب‌های تقریبی و جواب دقیق در معادله (۲۷) برای $N = 10, 15$

نتیجه‌گیری و بحث

در این مقاله ماتریس عملیاتی انتگرال پایه‌های گسسته هان محاسبه شده است و سپس با استفاده از آن، حل یک دسته معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری با هسته به‌طور ضعیف منفرد، بررسی شده است. تاکنون روش‌های عملیاتی برای حل انواع معادلات تابعی تنها با استفاده از پایه‌های پیوسته از قبیل پایه‌های چیشیف، لژاندر، ژاکوبی و غیره به‌کار گرفته شده‌اند. از این‌رو استفاده از پایه‌های گسسته که نسبت به ضرب داخلی گسسته متعامند می‌تواند به‌عنوان روندی نو برای حل انواع مختلف معادلات بررسی شود. مزیت استفاده از پایه‌های گسسته در تقریب تابع جواب این است که برای محاسبه ضرایب c_n با استفاده از ضرب داخلی گسسته پایه‌های هان کفایت مجموع (۷) محاسبه شود که در نتیجه ضرایب به‌طور دقیق محاسبه می‌شوند در حالی که در بسط تابع جواب بر حسب توابع پیوسته ضرایب بسط با محاسبه یک انتگرال که غالباً با روش‌های انتگرال‌گیری عددی تقریب زده می‌شوند، به‌دست می‌آیند. مثال‌های عددی داده شده، بیانگر این واقعیت است که پایه‌های گسسته هان جواب را با تقریب‌های خوبی به‌دست می‌دهند. روش مذکور می‌تواند برای انواع مختلف معادلات کسری، خصوصاً معادلات تصادفی که دامنه تعریف گسسته دارند، به‌کار گرفته شود.

منابع

1. Magin R., "Fractional Calculus in Bioengineering", Begell House Publishers (2006).
2. David S.A., Linares J.L., Pallone. E.M.J.A., "Fractional order calculus: historical apologia, basic concepts and some applications", Rev. Bras. Ensino Fs. (2011) 4302-4302.
3. Jiang Y., Ma J., "Higher order finite element methods for time fractional partial differential equations", J. Comput. Appl. Math, (2011) 3285-3290.

4. Bhrawy A., Zaky M., Gorder R.V., "A space-time Legendre spectral tau method for the two-sided space-time Caputo fractional diffusion-wave equation", *Numer. Algor* (2016)151-180.
5. Ray S., "On Haar wavelet operational matrix of general order and its application for the numerical solution of fractional Bagley-Torvik equation", *Appl. Math. Comput* (2012) 5239-5248.
6. Saeedi H., Mohseni Moghadam M., Mollahasani, N., Chuev, G.N., "A CAS wavelet method for solving nonlinear Fredholm integro-differential equations of fractional order", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, (2011) 1154-1163.
7. Rahimkhani P., Ordokhani Y., Babolian E., "Fractional-order Bernoulli wavelets and their applications", *Appl. Math. Model.*, vol. 40, no. 17 (2016) 8087-8107.
8. Rahimkhani P., Ordokhani Y., Babolian E., "A new operational matrix based on Bernoulli wavelets for solving fractional delay differential equations", *Numer. Algor.*, Vol. 74, No. 1, (2017) 223-245.
9. Rahimkhani P., Ordokhani Y., Babolian E., "Fractional-order Bernoulli functions and their applications in solving fractional Fredholm–Volterra integro-differential equations", *Appl. Numer. Math.*, vol. 122 (2017) 66-81.
10. Tang B.Q., Li X.F., "Solution of a class of Volterra integral equations with singular and weakly singular kernels", *Appl. Math. Comput* (2008) 406-413.
11. Zozulya V., Gonzalez-chi P., "Weakly singular, singular and hypersingular integrals in 3-Delasticty and fracture mechanics", *J. Chin. Inst. Eng.*, vol. 22 (1999) 763-775.
12. Kythe P., Puri P.K., "Computational Methods for Linear Integral Equations", Boston: Birkhauser, (2002) .
13. Niu H., Hao L., Yu Z., Yin J., "Adomian decomposition method for solving nonlinear integro-differential equations of fractional order", *J. Liaoning Tech. Univ. Nat. Sci.* (2013) 132-135.
14. Yi J., Huang J., "CAS wavelet method for solving the fractional integro-differential equation with a weakly singular kernel", *Int. J. Comput. Math.* (2015) 1715-1728.
15. Wang Y., Zhung L. , "SCW method for solving the fractional integro-differential equations with a weakly singular kernel", *Appl. Math. Comput.* (2016) 72-80.
16. Xiu G., Karniadakis G., "The Wiener-Askey Polynomial Chaos for Stochastic Differential Equations", *SIAM J. Sci. Comput* (2002) 619-644.
17. Glaubitz J., Öffner P., Sonar T., "Application of modal filtering to a spectral difference method", *Math. Comput* (2016) 1-32.
18. Karlin S., McGregor, J., "The Hahn polynomials, formulas and an application", *Scripta Math.* (1961) 33-46.

19. Koekoek R., Lesky P., Swarttouw R., "Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues", Springer Science & Business Media (2010).
20. Goertz, R., Öffner, P., "On Hahn polynomial expansion of a continuous function of bounded variation", arXiv:1610.06748v1 (2016)1-26.
21. Kreyszig E., "Introductory Functional Analysis with Applications", New York :John Wiley and Sons Press (1978).
22. Abramowitz M., Stegun I., "Handbook of Mathematical Functions", New York: Dover Publications (1972).
23. Mokhtary P., "Numerical analysis of an operational Jacobi Tau method for fractional weakly singular integro-differential equations", Appl. Numer. Math., vol. 121 (2017) 52-67.