

## حل دستگاه معادلات برگرز دوبعدی با استفاده از طرح‌های تفاضلات متناهی نیمه-لاگرانژی

رضا مختاری، الهام فیض‌اللهی  
دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده علوم ریاضی

دریافت ۹۶/۰۹/۱۱ پذیرش ۹۸/۰۲/۱۸

### چکیده

در این مقاله قصد داریم طرح‌های تفاضلات متناهی نیمه-لاگرانژی را برای دستگاه معادلات برگرز دوبعدی تعمیم دهیم. طرح پیشنهادی به شرط کورانت-فردریش-لوی (CFL) محدود نیست و بنابراین می‌توان اندازه گام‌های زمانی بزرگی انتخاب کرد. طرح پیشنهادی قابلیت موازی‌سازی خوبی دارد و در اصل یک طرح یک-بعدی موضعی (LOD) است که بر اساس راه‌کار معادله تغییر یافته به دست آمده است و برای حل دستگاه معادلات برگرز به کار می‌رود. یک ویژگی خوب روش مطرح شده آن است که در هر تکرار زمانی کافی است دو دستگاه خطی سه‌قطری حل شود و از این نظر حجم محاسباتی روش پائین است.

واژه‌های کلیدی: دستگاه معادلات برگرز، طرح تفاضلات متناهی نیمه-لاگرانژی، راه‌کار معادله تغییر یافته، طرح یک-بعدی موضعی.

### مقدمه

از زمانی که رایانه‌ها برای انجام کارهای محاسباتی ارتقاء یافتند، پیدا کردن روش‌های عددی برای حل مسائل پیچیده شامل معادلات دیفرانسیل معمولی و پاره‌ای و معادلات انتگرال یا انتگرال و دیفرانسیل با مشتقات عادی یا کسری بیش‌تر و بیش‌تر نیاز می‌شود [۱]-[۲۷]. بدون شک یکی از روش‌های ساده و محبوب در حل مسائل متنوع شامل معادلات با مشتقات جزئی در سیالات، اپتیک، اقیانوس‌شناسی، هواشناسی، ریاضیات زیستی، آکوستیک، پردازش تصویر و الکترومغناطیس روش تفاضلات متناهی (FDM) است [۱]-[۳]، [۴]، [۷]، [۲۳]. امروزه FDM نه تنها به‌طور مستقیم در حل مسائل مختلف به کار می‌رود بلکه می‌توان آن را با روش‌های دیگر ترکیب کرده و روش‌های قدرتمندتری ساخت [۵]، [۱۱]، [۱۳]-[۱۶]. متأسفانه ساختن روش‌های تفاضلی کارا و دقیق به سادگی پیاده‌سازی آنها نیست. برای استخراج یک روش تفاضلی کارا باید تعداد کمی گره در طرح استفاده شوند در حالی که دقت روش بالا نگه داشته شود. از طرف دیگر باید خطاهای پراکندگی (اتلاف) و پاشیدگی (پاشندگی) در یک طرح تفاضلی قابل قبول به خوبی کنترل شوند. با استفاده از راه‌کار معادله تغییر یافته که به وسیله هیرت [۱۰] و وارمینگ و همکاران [۲۵] برای معادلات با مشتقات جزئی خطی وابسته به زمان ابداع شد می‌توان روش‌های تفاضلی متنوعی ساخت که دقت و کارایی بیش‌تری با کم‌ترین خطای پراکندگی و پاشیدگی داشته باشند. این راه‌کار با موفقیت برای معادلات با مشتقات جزئی خطی و غیرخطی به کار رفته است، برای نمونه [۲۴]، [۲۶] ملاحظه شود.

به تازگی ونگ و همکاران [۲۶] یک خانواده از طرح‌های تفاضلات متناهی نیمه-لاگرانژی را بر اساس راه‌کار معادله تغییر یافته ساخته و آن را برای حل معادله برگرز یک بعدی به کار برده‌اند. در فرمول‌بندی نیمه-لاگرانژی [۲]، [۴]،

[۸]، [۲۶]، مشتق اویلری و جمله همرفت در یک مشتق لاگرانژی (کلی) ترکیب شده و سپس در طول منحنی مشخصه (خط سیر) گسسته‌سازی می‌شود. با ترکیب دقت متعارف طرح‌های اویلری و پایداری بالای طرح‌های لاگرانژی، طرح‌های نیمه-لاگرانژی ساخته می‌شوند که در آنها اندازه گام زمانی به شرط CFL محدود نشده و دقت زیاد آنها حفظ می‌شود [۲۶]. روش ونگ و همکاران [۲۶] را می‌توان در حل برخی مسائل یک-بعدي مانند معادله برگرز به کار برد و آن را در حل معادلات تحولی مانند KdV نیز توسعه داد [۹].

در این مقاله به کمک یک طرح LOD روش ونگ را برای برخی معادلات تحولی دو-بعدي تعمیم داده و آن را در حل یک دستگاه معادلات دو-بعدي برگرز به کار می‌بریم. در واقع طرح پیشنهادی یک طرح یک-بعدي موضعی است که بر اساس راه کار معادله تغییر یافته به دست می‌آید، قابلیت موازی‌سازی خوبی داشته و به شرط CFL محدود نیست. بنابراین می‌توان اندازه گام‌های زمانی بزرگی انتخاب کرد در حالی که دقت زیاد روش حفظ شود. چون برخی از طرح‌های تفاضلات متناهی به شرط CFL محدود هستند باید اندازه گام زمانی را بسیار کوچک در نظر گرفت تا پایداری نتیجه شود. ولی در طرح پیشنهاد شده می‌توان اندازه گام زمانی را بزرگ انتخاب کرد و هم دقت زیاد روش حفظ شود و هم نتایج رضایت‌بخشی به دست آورد (بخش نتایج عددی را ببینید). از طرفی معادله برگرز دوبعدي کاربردهای بسیار زیادی دارد و پیش از این به آنها اشاره شد و از روش‌هایی که هم دقت خوبی داشته و هم حجم محاسبات معقولی داشته باشند به خوبی استقبال می‌شود. بنابراین از [۲۶] ایده گرفته و طرح‌های تفاضلات متناهی نیمه-لاگرانژی را برای معادله برگرز دوبعدي تعمیم دادیم. ادامه ساختار مقاله بدین شرح است. در بخش ۲ راه کار معادله تغییر یافته را به اختصار مرور می‌کنیم. با ترکیب ایده نیمه-لاگرانژی با راه کار معادله تغییر یافته و به کمک طرح LOD چند طرح صریح و ضمنی در بخش ۳ استخراج می‌شود. بخش ۴ به تشریح چگونگی استفاده از درون‌یاب‌های لاگرانژی و بی-اسپلاین در طرح‌های استخراج شده اختصاص داده شده است. در بخش ۵ به تجزیه طرح پیشنهادی پرداخته و تخمین خطا به دست می‌آوریم. برای تأیید نتایج نظری به دست آمده در بخش ۶ به بررسی و پیاده‌سازی دو مثال عددی می‌پردازیم. مقاله با یک نتیجه‌گیری خلاصه پایان می‌یابد.

### راه کار معادله تغییر یافته

چنان که در [۲۵] تشریح شده و در [۲۴] و [۲۶] بیان شده است، در ابتدا یک PDE خطی به صورت (۱) در نظر می‌گیریم:

$$u_t = Lu \quad (1)$$

که در آن  $t$  متغیر زمان و  $L$  یک عملگر دیفرانسیلی مکانی به صورت (۲) است:

$$L = \sum_{m=1}^k a_m \frac{\partial^m}{\partial x^m}. \quad (2)$$

بدون از دست دادن کلیت، یک طرح تفاضل متناهی دو سطحی به شکل کلی زیر برای (۲) به صورت (۳) در نظر می‌گیریم:

$$u_j^{n+1} = \sum_{m \neq 0} d_m u_{j+m}^{n+1} + \sum_k c_k u_{j+k}^n \quad (3)$$

که در آن اندیس زیر به شبکه مکانی و اندیس بالا به شبکه زمانی اشاره می‌کند و  $d_m (m = 1, 2, \dots)$  و  $c_k (k = 0, 1, \dots)$  ضرایب مجهولی هستند که باید آنها را تعیین کرد. اگر ضرایب  $d_m$  همگی صفر باشند طرح صریح و در غیر این صورت

ضمنی است. با نوشتن بسط تیلور جملات (۳) حول نقطه  $(x_i, t_n) = (i\Delta x, n\Delta t)$  و فاکتورگیری جملات مشابه داریم

$$(u_t + \gamma_{11}u_x + \gamma_{20}u_{tt} + \gamma_{21}u_{tx} + \gamma_{22}u_{xx} + \dots + \gamma_{m0} \frac{\partial^m u}{\partial t^m} + \dots + \gamma_{mm} \frac{\partial^m u}{\partial x^m} + \dots) \Big|_{(x,t)=(x_i,t_n)} = 0 \quad (4)$$

که در آن ضرایب  $\gamma_{ij}$  ترکیب خطی ضرایب  $d_m$  و  $c_k$  هستند. با استفاده مکرر از (۴) به منظور حذف جملات شامل مشتقات زمانی، معادله (۵) معروف به معادله تغییر یافته به دست می‌آید:

$$u_t(x_i, t_n) - Lu(x_i, t_n) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m \frac{\partial^m u(x_i, t_n)}{\partial x^m}. \quad (5)$$

سمت راست (۵) به مانده طرح تفاضلی (۳) معروف است و معرف بسیاری از ویژگی‌های اساسی آن طرح است [۲۵]، [۲۶]. به منظور طراحی روش‌های تفاضلی مرتبه بالا، کافی است یک طرح تفاضلی به صورت (۳) با ضرایب نامعین در نظر گرفت و سپس با متحد صفر قرار دادن ضرایب جملات مرتبه پائین در مانده طرح، یک دستگاه معادلات خطی ساخت و برای تعیین ضرایب  $d_m$  و  $c_k$  آن را به طور نمادین حل کرد.

### طرح‌های نیمه-لاگرانژی

در این بخش برای تعمیم روش ونگ و همکاران [۲۶] به مسائل دو بعدی، دستگاه معادلات برگز دو-بعدی (۶) را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vv_y &= \mathcal{E}(u_{xx} + u_{yy}), & (x, y, t) \in \Omega \times (0, T], \\ v_t + uv_x + vv_y &= \mathcal{E}(v_{xx} + v_{yy}), & (x, y, t) \in \Omega \times (0, T], \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ،  $T > 0$  و  $\mathcal{E}$  یک ثابت مثبت (در اصل ضریب چسبندگی) است. فرض می‌کنیم (۶) با شرایط اولیه و مرزی مناسبی همراه باشد. ابتدا (۶) را بدین صورت بازنویسی می‌کنیم:

$$u_t = \mathcal{E}(u_{xx} + u_{yy}), \quad (7)$$

$$v_t = \mathcal{E}(v_{xx} + v_{yy}), \quad (8)$$

که در آن زیراندیس  $t$  به مشتق کلی  $u$  در طول خطوط سیر زیر اشاره دارد:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad (9)$$

$$\frac{dy}{dt} = v. \quad (10)$$

در واقع دستگاه معادلات غیرخطی برگز (۶) به دستگاه معادلات خطی (۷) و (۸) شامل معادلات گرما تبدیل شده است که در راستای مشخصه‌های (۹) و (۱۰) معتبر هستند. حال می‌توان از راه کار معادله تغییر یافته به منظور استخراج طرح‌های متناظر با (۷) و (۸) بهره برد. در ادامه فرض می‌کنیم برای  $i = 1, 2, \dots$  و  $j$  ثابت،  $(x_i, y_j, t_n)$  بیانگر موقعیت خروجی (جریان بالادست) نقطه شبکه  $(x_i, y_j, t_{n+1})$  باشد.  $(x_i, y_j, t_n)$  به طور مشابه در نظر گرفته می‌شود. لازم نیست که این موقعیت‌های خروجی بر نقاط شبکه در سطح زمانی  $n$  منطبق باشند. برای سادگی فرض می‌کنیم برای  $j$  ثابت،  $x_i$  بین  $x_{i-1}$  و  $x_i$  و برای  $i$  ثابت،  $y_j$  بین  $y_{j-1}$  و  $y_j$  قرار دارد و سایر حالات به طور مشابه هستند. برای هر  $i$  و  $j$  و در هر سطح زمانی، تعریف می‌کنیم.

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad (11)$$

$$\Delta y_j = y_{j+1} - y_j, \quad (12)$$

$$\alpha_i = x_i - x_{i-1}, \quad (13)$$

$$\beta_j = y_j - y_{j-1}. \quad (14)$$

(۱۱) فاصله بین هر دو موقعیت خروجی مجاور در راستای  $x$  را و (۱۲) فاصله بین هر دو موقعیت خروجی مجاور در راستای  $y$  را اندازه‌گیری می‌کند در حالی که (۱۳) فاصله بین یک موقعیت خروجی و گره مجاور آن در شبکه در راستای  $x$  را و (۱۴) فاصله بین یک موقعیت خروجی و گره مجاور آن در شبکه در راستای  $y$  را اندازه‌گیری می‌کند. مقدار  $u$  در موقعیت خروجی  $(x_i, y_j, t_n)$  را با  $u_{i,j}^n$  نشان می‌دهیم و به‌طور مشابه تعریف می‌شود.

با ترکیب مقادیر  $u$  در نقاط ورودی در سطح زمانی  $n+1$  و نقاط خروجی در سطح زمانی  $n$ ، یک طرح کلی به‌صورت (۱۵) در نظر می‌گیریم

$$u_{i,j}^{n+1} = \sum_{m=0} (d_m u_{i+m,j}^{n+1} + d'_m u_{i,j+m}^{n+1}) + \sum_k (c_k u_{i+k,j}^n + c'_k u_{i,j+k}^n), \quad (15)$$

که متناظر با (۷) است و در آن  $u_{i,j}^{n+1}$  تقریبی برای مقدار دقیق  $u(x_i, y_j, t_{n+1})$  است و ضرایب  $d_m$  و  $c_k$  را باید به‌کمک ایده معادله تغییر یافته تعیین کرد. باید توجه داشت که مقادیر خروجی  $u_{i+k,j}^n$  و  $u_{i,j+k}^n$  را نمی‌توان به‌طور مستقیم ارزیابی کرد و باید آنها را به‌کمک درون‌یابی به‌دست آورد (بخش ۴ را ببینید).

### ۱. طرح شش نقطه‌ای صریح

یک تقریب صریح ساده برای  $u_{i,j}^{n+1}$  نسبت به مقادیر  $u_{i-1,j}^n, u_{i,j}^n, u_{i+1,j}^n, u_{i,j-1}^n, u_{i,j}^n, u_{i,j+1}^n$  را می‌توان به‌صورت (۱۶) در نظر گرفت:

$$u_{i,j}^{n+1} = c_{-1} u_{i-1,j}^n + c_0 u_{i,j}^n + c_1 u_{i+1,j}^n + c'_{-1} u_{i,j-1}^n + c'_0 u_{i,j}^n + c'_1 u_{i,j+1}^n, \quad (16)$$

که در آن ضرایب  $c_{-1}, c_0, c_1$  و  $c'_{-1}, c'_0, c'_1$  را باید به‌دست آورد. در واقع این طرح متناظر با طرح تفاضل متناهی FTCS برای معادله گرما است. از طرفی به‌کمک روش رونگه-کوتای مرتبه دو [۹]، [۲۲]، [۲۶]، به‌سادگی می‌توان روابط (۱۷) و (۱۸) را برای هر  $i$  و  $j$  در هر سطح زمانی  $n$  نوشت:

$$\alpha_i = \Delta t u(x_i - \frac{1}{2} \alpha_i, y_j, t_n + \frac{1}{2} \Delta t) + O(\Delta t^3) = O(\Delta t), \quad (17)$$

$$\beta_j = \Delta t u(x_i, y_j - \frac{1}{2} \beta_j, t_n + \frac{1}{2} \Delta t) + O(\Delta t^3) = O(\Delta t). \quad (18)$$

با استفاده از (۱۷) و (۱۸) و دنبال کردن ایده معادله تغییر یافته، به‌کار بردن بسط تیلور  $u_{i+1,j}^n$  و  $u_{i-1,j}^n$  در طرح (۱۶) حول موقعیت خروجی  $(x_i, y_j, t_n)$  (به‌جای نقطه  $(x_i, y_j, t_n)$ ) و هم‌چنین بسط تیلور  $u_{i,j+1}^n$  و  $u_{i,j-1}^n$  در طرح (۱۶) حول موقعیت خروجی  $(x_i, y_{j-1}, t_n)$  (به‌جای نقطه  $(x_i, y_j, t_n)$ )، داریم:

$$u_t - \varepsilon(u_{xx} + u_{yy}) = \frac{1}{\Delta t} (c_{-1} + c_0 + c_1 - 1/2)u + \frac{1}{\Delta t} (c_1 \Delta x_i - c_{-1} \Delta x_{i-1})u_x \\ + \frac{1}{2\Delta t} (c_1 \Delta x_i^2 + c_{-1} \Delta x_{i-1}^2 - 2\varepsilon \Delta t)u_{xx} + \frac{1}{\Delta t} (c'_{-1} + c'_0 + c'_1 - 1/2)u$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\Delta t} (c'_1 \Delta y_j - c'_{-1} \Delta y_{j-1}) u_y + \frac{1}{2\Delta t} (c'_1 \Delta y_j^2 + c'_{-1} \Delta y_{j-1}^2 - 2\varepsilon \Delta t) u_{yy} \\
 & + \frac{1}{6\Delta t} ((c_1 \Delta x_i^3 - c_{-1} \Delta x_{i-1}^3) u_{xxx} + (c'_1 \Delta y_j^3 - c'_{-1} \Delta y_{j-1}^3)) u_{yyy} + \dots
 \end{aligned} \tag{۱۹}$$

بنابراین کافی است داشته باشیم

$$\begin{aligned}
 c_{-1} + c_0 + c_1 - 1/2 &= 0, & c'_{-1} + c'_0 + c'_1 - 1/2 &= 0, \\
 c_1 \Delta x_i - c_{-1} \Delta x_{i-1} &= 0, & c'_1 \Delta y_j - c'_{-1} \Delta y_{j-1} &= 0, \\
 c_1 \Delta x_i^2 + c_{-1} \Delta x_{i-1}^2 - 2\varepsilon \Delta t &= 0, & c'_1 \Delta y_j^2 + c'_{-1} \Delta y_{j-1}^2 - 2\varepsilon \Delta t &= 0.
 \end{aligned}$$

از این روابط داریم

$$\begin{aligned}
 c_{-1} &= \frac{2\varepsilon \Delta t}{\Delta x_{i-1} (\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)}, & c'_{-1} &= \frac{2\varepsilon \Delta t}{\Delta y_{j-1} (\Delta y_{j-1} + \Delta y_j)}, \\
 c_0 &= 1/2 - \frac{2\varepsilon \Delta t}{\Delta x_i \Delta x_{i-1}}, & c'_0 &= 1/2 - \frac{2\varepsilon \Delta t}{\Delta y_j \Delta y_{j-1}}, \\
 c_1 &= \frac{2\varepsilon \Delta t}{\Delta x_i (\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)}, & c'_1 &= \frac{2\varepsilon \Delta t}{\Delta y_j (\Delta y_{j-1} + \Delta y_j)}.
 \end{aligned} \tag{۲۰}$$

به‌وضوح،  $c_{-1}, c_1, c'_1$  و  $c'_0$  مثبت هستند زیرا  $\varepsilon > 0$ . برای اینکه داشته باشیم  $c_0 \geq 0$  و  $c'_0 \geq 0$  باید نابرابری‌های (۲۱) و (۲۲) برقرار باشند:

$$\frac{\varepsilon \Delta t}{\Delta x_i \Delta x_{i-1}} \leq \frac{1}{2}, \tag{۲۱}$$

$$\frac{\varepsilon \Delta t}{\Delta y_j \Delta y_{j-1}} \leq \frac{1}{2}. \tag{۲۲}$$

نابرابری‌های (۲۱) و (۲۲) را می‌توان به‌عنوان شرایط پایداری برای طرح (۱۶) در نظر گرفت. با جای‌گذاری ضرایب (۲۰) در معادله تغییر یافته (۱۹)، خطای برش کلی طرح تفاضلی (۱۶) را می‌توان به‌صورت (۲۳) به‌دست آورد:

$$\frac{-1}{2} ((6\varepsilon \Delta t - \Delta x_{i-1}^2 + \Delta x_i \Delta x_{i-1} - \Delta x_i^2) + (6\varepsilon \Delta t - \Delta y_{j-1}^2 + \Delta y_j \Delta y_{j-1} - \Delta y_j^2)). \tag{۲۳}$$

با استفاده از (۱۱)-(۱۴) و (۱۷) و (۱۸)، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
 \Delta x_{i-1} \Delta x_{i-1} &= O(\Delta t, \Delta t \Delta x, \Delta x^2), & \Delta y_{j-1} \Delta y_{j-1} &= O(\Delta t, \Delta t \Delta y, \Delta y^2), \\
 \Delta x_{i-1} \Delta x_i &= O(\Delta t, \Delta t \Delta x, \Delta x^2), & \Delta y_{j-1} \Delta y_j &= O(\Delta t, \Delta t \Delta y, \Delta y^2), \\
 \Delta x_i \Delta x_i &= O(\Delta t, \Delta t \Delta x, \Delta x^2), & \Delta y_j \Delta y_j &= O(\Delta t, \Delta t \Delta y, \Delta y^2).
 \end{aligned} \tag{۲۴}$$

بنابراین، خطای برش کلی طرح تفاضلی (۱۶) عبارت است از:

$$O(\Delta t, \Delta t \Delta x, \Delta t \Delta y, \Delta x^2, \Delta y^2).$$

## ۲. طرح‌های ضمنی

اگرچه طرح‌های صریح به سادگی پیاده‌سازی می‌شوند ولی پایداری مشروط دارند یعنی شرایطی مانند (۲۱) و (۲۲) انتخاب اندازه گام زمانی  $\Delta t$  را محدود می‌کنند. یک راه‌کار ممکن به‌کار بردن ایده معادله تغییر یافته برای ساختن طرح‌های تفاضلی ضمنی است. به‌همین منظور، با دنبال کردن ایده LOD، معادله (۷) را به دو معادله (۲۵) و (۲۶) تفکیک می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}u_t = \varepsilon u_{xx}, \quad (25)$$

$$\frac{1}{2}u_t = \varepsilon u_{yy}. \quad (26)$$

در گذر زمان از  $t = n\Delta t$  به  $t = (n+1)\Delta t$ ، فرض می‌کنیم معادله (۲۵) از  $t = n\Delta t$  تا  $t = (n+1/2)\Delta t$  و معادله (۲۶) از  $t = (n+1/2)\Delta t$  تا  $t = (n+1)\Delta t$  برقرار باشد. همین عملیات را به‌طور مشابه و موازی روی (۸) دنبال می‌کنیم. به‌عبارت دیگر، ابتدا  $u$  و  $v$  را در سطح زمانی به‌دست آورده، سپس به‌کمک آنها مقادیر  $u$  و  $v$  را در سطح زمانی به مشخص می‌کنیم. از طرف دیگر، بر اساس معادلات (۹) و (۱۰) و به‌کمک روش رونگه-کوتای مرتبه دو [۹]، برای هر  $i$  و  $j$ ، به‌سادگی داریم:

$$\alpha_i = \frac{\Delta t}{2}u(x_i - \frac{1}{2}\alpha_i, y_j, t_n + \frac{1}{4}\Delta t) + O(\Delta t^3) = O(\Delta t), \quad (27)$$

$$\beta_j = \frac{\Delta t}{2}v(x_i, y_j - \frac{1}{2}\beta_j, t_n + \frac{3}{4}\Delta t) + O(\Delta t^3) = O(\Delta t). \quad (28)$$

### ۱.۲. طرح ضمنی شش نقطه‌ای

با ترکیب  $u_{i,j}^n, u_{i,j}^{n+1}, u_{i-1,j}^{n+1}, u_{i+1,j}^{n+1}, u_{i,j-1}^{n+1}, u_{i,j+1}^{n+1}$  یک تقریب ضمنی برای  $u_{i,j}^{n+1}$  به‌صورت (۲۹) در نظر می‌گیریم:

$$u_{i,j}^{n+1} = d_{-1}u_{i-1,j}^{n+1} + c_0u_{i,j}^n + d_1u_{i+1,j}^{n+1} + d'_{-1}u_{i,j-1}^{n+1} + c'_0u_{i,j}^{n+1/2} + d'_1u_{i,j+1}^{n+1}. \quad (29)$$

با دنبال کردن ایده LOD و به موجب معادلات (۲۵) و (۲۶)، طرح ضمنی شش نقطه‌ای (۲۹) به دو طرح سه نقطه‌ای به‌صورت (۳۰) و (۳۱) جداسازی می‌شود:

$$u_{i,j}^{n+1/2} = d_{-1}u_{i-1,j}^{n+1/2} + c_0u_{i,j}^n + d_1u_{i+1,j}^{n+1/2}, \quad (30)$$

$$u_{i,j}^{n+1} = d'_{-1}u_{i,j-1}^{n+1} + c'_0u_{i,j}^{n+1/2} + d'_1u_{i,j+1}^{n+1}, \quad (31)$$

که در آن ضرایب  $d_{-1}, c_0, d_1, d'_{-1}, c'_0, d'_1$  مانند قبل به‌کمک معادله تغییر یافته تعیین می‌شوند و به سادگی می‌توان نشان داد که:

$$\begin{aligned} d_{-1} &= \frac{\varepsilon\Delta t}{2\varepsilon\Delta t + \Delta x^2}, & d'_{-1} &= \frac{\varepsilon\Delta t}{2\varepsilon\Delta t + \Delta y^2}, \\ c_0 &= \frac{\Delta x^2}{2\varepsilon\Delta t + \Delta x^2}, & c'_0 &= \frac{\Delta y^2}{2\varepsilon\Delta t + \Delta y^2}, \\ d_1 &= \frac{\varepsilon\Delta t}{2\varepsilon\Delta t + \Delta x^2}, & d'_1 &= \frac{\varepsilon\Delta t}{2\varepsilon\Delta t + \Delta y^2}. \end{aligned} \quad (32)$$

صرف‌نظر از مقادیر  $\Delta t, \Delta x$  و  $\Delta y$ ، همه ضرایب در (۳۲) مثبت هستند. بنابراین طرح به‌طور نامشروط پایدار است. با جای‌گذاری این ضرایب، خطاهای برشی (۳۳) و (۳۴) به‌دست می‌آیند:

$$\frac{\varepsilon}{12}(6\varepsilon\Delta t + \Delta x^2)u_{xxxx}, \quad (33)$$

$$\frac{\varepsilon}{12}(6\varepsilon\Delta t + \Delta y^2)u_{yyyy}. \quad (34)$$

به‌وضوح، با ترکیب (۳۳) و (۳۴)، خطای برش کلی طرح عبارت است از  $O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2)$ . در واقع این طرح با طرح سنتی BTCS برای معادله گرما متناظر است.

## ۲.۲ طرح ضمنی پنج نقطه‌ای

برای رسیدن به دقت بالاتر در کنار پایداری نامشروط، طرح‌های شش نقطه‌ای صریح و ضمنی را ترکیب کرده تا یک طرح ده نقطه‌ای ضمنی به صورت (۳۵) بسازیم:

$$u_{i,j}^{n+1} = d_{-1}u_{i-1,j}^{n+1} + c_{-1}u_{i-1,j}^n + c_0u_{i,j}^n + c_1u_{i+1,j}^n + d_1u_{i+1,j}^{n+1} + d'_{-1}u_{i,j-1}^{n+1} + c'_{-1}u_{i,j-1}^n + c'_0u_{i,j}^n + c'_1u_{i,j+1}^n + d'_1u_{i,j+1}^{n+1}. \quad (35)$$

با دنبال کردن ایده LOD و بر اساس معادلات (۲۵) و (۲۶)، طرح ده نقطه‌ای (۳۵) را به دو طرح پنج نقطه‌ای بدین صورت تفکیک می‌کنیم:

$$u_{i,j}^{n+1/2} = d_{-1}u_{i-1,j}^{n+1/2} + d_1u_{i+1,j}^{n+1/2} + c_{-1}u_{i-1,j}^n + c_0u_{i,j}^n + c_1u_{i+1,j}^n, \quad (36)$$

$$u_{i,j}^{n+1} = d'_{-1}u_{i,j-1}^{n+1} + d'_1u_{i,j+1}^{n+1} + c'_{-1}u_{i,j-1}^{n+1/2} + c'_0u_{i,j}^{n+1/2} + c'_1u_{i,j+1}^{n+1/2}, \quad (37)$$

که در آن ضرایب مجهول را به کمک راه کار معادله تغییر یافته تعیین می‌کنیم. روابطی مشابه برای  $v$  نیز داریم. به دست آوردن ضرایب مجهول به حجم قابل ملاحظه‌ای عملیات جبری نیاز دارد که می‌توان از یک نرم‌افزار جبر محاسباتی (CAS) مانند Mathematica یا Maple استفاده کرد. باید توجه داشت که بسیاری از عملیات مشابه بوده است و نیازی به انجام کارهای تکراری نیست. از طرف دیگر، ضرایب یک بار به دست می‌آیند و بارها استفاده می‌شوند. چون کارهای نمادین مربوط به ضرایب را یک بار انجام داده و بارها استفاده می‌کنیم، بنابراین حجم عملیات روش فقط مربوط به (۳۶) و (۳۷) است که در عمل به حل دو دستگاه خطی سه قطری منجر می‌شود که به کمک الگوریتم توماس حجم عملیاتی از مرتبه  $O(N)$  دارد که در این جا  $N$  تعداد نقاط گسسته‌سازی مکانی است.

## درون‌یابی در نقاط خروجی

چون نقاط خروجی روی نقاط شبکه منطبق نیستند باید به کمک درون‌یابی مقادیر تابع در این نقاط را بر حسب مقادیر تابع در نقاط مجاور آنها مشخص کرد. این کار را برای طرح صریح شش نقطه‌ای (۱۶) با ضرایب  $c_{-1}$ ،  $c_0$ ،  $c_1$ ،  $c'_{-1}$ ،  $c'_0$ ،  $c'_1$  داده شده در (۲۰) دنبال می‌کنیم. برای سایر طرح‌ها به طور مشابه عمل می‌کنیم. به عنوان یک روش پر کاربرد [۲۱]، از درون‌یاب لاگرانژ درجه دو بدین صورت استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} = & \frac{c_{-1}}{\Delta x^2} \left( \frac{1}{2} \alpha_{i-1} (\alpha_{i-1} - \Delta x) u_{i-3,j}^n + \alpha_{i-1} (2\Delta x - \alpha_{i-1}) u_{i-2,j}^n \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (\Delta x - \alpha_{i-1}) (2\Delta x - \alpha_{i-1}) u_{i-1,j}^n \right) \\ & + \frac{c_0}{\Delta x^2} \left( \frac{1}{2} \alpha_i (\alpha_i - \Delta x) u_{i-2,j}^n + \alpha_i (2\Delta x - \alpha_i) u_{i,j}^n + \frac{1}{2} (\Delta x - \alpha_i) (2\Delta x - \alpha_i) u_{i+1,j}^n \right) \\ & + \frac{c_1}{\Delta x^2} \left( \frac{1}{2} \alpha_{i+1} (\alpha_{i+1} - \Delta x) u_{i+1,j}^n + \alpha_{i+1} (2\Delta x - \alpha_{i+1}) u_{i+2,j}^n \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (\Delta x - \alpha_{i+1}) (2\Delta x - \alpha_{i+1}) u_{i+3,j}^n \right) \\ & + \frac{c'_{-1}}{\Delta y^2} \left( \frac{1}{2} \beta_{j-1} (\beta_{j-1} - \Delta y) u_{i,j-3}^n + \beta_{j-1} (2\Delta y - \beta_{j-1}) u_{i,j-2}^n \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (\Delta y - \beta_{j-1}) (2\Delta y - \beta_{j-1}) u_{i,j-1}^n \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{c'_0}{\Delta y^2} \left( \frac{1}{2} \beta_j (\beta_j - \Delta y) u_{i,j-2}^n + \beta_j (2\Delta y - \beta_j) u_{i,j}^n + \frac{1}{2} (\Delta y - \beta_j) (2\Delta y - \beta_j) u_{i,j+1}^n \right) \\
& + \frac{c'_1}{\Delta y^2} \left( \frac{1}{2} \beta_{j+1} (\beta_{j+1} - \Delta y) u_{i,j+1}^n + \beta_{j+1} (2\Delta y - \beta_{j+1}) u_{i,j+2}^n \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} (\Delta y - \beta_{j+1}) (2\Delta y - \beta_{j+1}) u_{i,j+3}^n \right).
\end{aligned}$$

از طرف دیگر بر اساس معادلات (۱۷)، هر  $\alpha_i (k-1 \leq i \leq k+1)$  را می‌توان با دقت  $O(\Delta t^3)$  به صورت (۳۸) تقریب زد

$$\alpha_i \cong \frac{\Delta t}{2} u(x_i - \frac{1}{2} \alpha_i, y_j, t_n + \frac{1}{4} \Delta t) \cong \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{3}{2} u(x_i - \frac{\alpha_i}{2}, y_j, t_n) - \frac{1}{2} u(x_i - \frac{\alpha_i}{2}, y_j, t_{n-1/2}) \right). \quad (38)$$

مقادیر  $u(x_i - \alpha_i/2, y_j, t_n)$  و  $u(x_i - \alpha_i/2, y_j, t_{n-1/2})$  را نیز باید به کمک درون‌یابی حساب کرد (در این‌جا چون درجه درون‌یاب اهمیتی ندارد، می‌توان از درون‌یاب خطی استفاده کرد [۲۰]). اگر درون‌یاب خطی (که در عمل مناسب است [۲۲]) به کار رود،  $\alpha_i$  را می‌توان به صورت (۳۹) تقریب زد

$$\alpha_i \cong \frac{2\Delta t(3u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1/2})}{4\Delta x + 3\Delta t(u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n) - \Delta t(u_{i,j}^{n-1/2} - u_{i-1,j}^{n-1/2})}. \quad (39)$$

به‌طور مشابه می‌توان  $\beta_j$  را به‌ازای  $k-1 \leq j \leq k+1$ ، به صورت (۴۰) تقریب زد:

$$\beta_j \cong \frac{2\Delta t(3v_{i,j}^{n+1/2} - v_{i,j}^n)}{4\Delta y + 3\Delta t(v_{i,j}^{n+1/2} - v_{i,j-1}^{n+1/2}) - \Delta t(v_{i,j}^n - v_{i,j-1}^n)}. \quad (40)$$

از میان سایر درون‌یاب‌ها، به درون‌یاب بی-اسپلاین [۲۱، ۶] اشاره می‌کنیم که می‌توان به‌جای درون‌یاب لاگرانژ به‌کار برد. بی-اسپلاین درجه  $p$  برای  $p = 1, 2, \dots$ ، یک تابع قطعه‌ای چندجمله‌ای است که به‌کمک این رابطه بازگشتی معروف به‌دست می‌آید:

$$B_i^p(x) = \left( \frac{x - x_i}{x_{i+p} - x_i} \right) B_i^{p-1}(x) + \left( \frac{x_{i+p+1} - x}{x_{i+p+1} - x_{i+1}} \right) B_{i+1}^{p-1}(x),$$

که در آن بی-اسپلاین درجه صفر بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$B_i^0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_i, x_{i+1}), \\ 0, & x \notin [x_i, x_{i+1}). \end{cases}$$

بی-اسپلاین‌ها ویژگی‌های متعددی دارند که دو مورد زیر در بخش بعد مورد نیاز است

$$B_i^p(x) \geq 0, \quad \sum_i B_i^p(x) = 1, \quad p = 0, 1, \dots$$

### آنالیز خطا

در این بخش، خطا را با نرم بی‌نهایت در سطح زمانی  $n$  بدین‌صورت در نظر می‌گیریم:

$$e^n = \max_{i,j} |u_{i,j}^n - u(x_i, y_j, t_n)|. \quad (41)$$

به‌علاوه فرض می‌کنیم  $I_p$  و  $J_p$  عملگرهای درون‌یاب درجه  $p$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) به‌ترتیب در راستای  $x$  و  $y$  هستند که به‌صورت کلی (۴۲) بیان می‌شوند:



$$\begin{aligned} I_p(u(x, y, t)) &= \sum_{m \in Q_x} \phi_m(x) u(x_m, y, t), \\ J_p(u(x, y, t)) &= \sum_{m \in Q_y} \psi_m(y) u(x, y_m, t), \end{aligned} \quad (42)$$

که در آن  $Q_x$  و  $Q_y$  به ترتیب مجموعه اندیس‌های نقاط به کار رفته در درون‌یاب‌های در راستای  $x$  و  $y$  و  $\phi_m$  و  $\psi_m$  توابع پایه در روش درون‌یابی هستند. بنابر قضایای مربوط به خطای درون‌یابی [۲۱] می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} I_p(u) - u &= O(\Delta x^{p+1}), \\ J_p(u) - u &= O(\Delta y^{p+1}). \end{aligned} \quad (43)$$

در ادامه لازم است فرض کنیم توابع پایه درون‌یابی در نابرابری‌های (۴۴) صدق می‌کنند:

$$\begin{aligned} \sum_{m \in Q_x} |\phi_m(x)| &\leq 1, \\ \sum_{m \in Q_y} |\psi_m(y)| &\leq 1. \end{aligned} \quad (44)$$

طرح صریح شش نقطه‌ای (۱۶) را می‌توان بدین صورت بازنویسی کرد:

$$u_{i,j}^{n+1} = c_{-1} I_p(u_{i-1,j}^n) + c_0 I_p(u_{i,j}^n) + c_1 I_p(u_{i+1,j}^n) + c'_{-1} J_p(u_{i,j-1}^n) + c'_0 J_p(u_{i,j}^n) + c'_1 J_p(u_{i,j+1}^n), \quad (45)$$

که در آن ضرایب داده شده در (۲۰) در برابری (۴۶) صدق می‌کنند:

$$c_{-1} + c_0 + c_1 + c'_{-1} + c'_0 + c'_1 = 1. \quad (46)$$

با احتساب خطای برش طرح تفاضلی، خطای درون‌یابی و ترکیب آن دو، خطای  $|u_{i,j}^{n+1} - \hat{u}_{i,j}^{n+1}|$  را بدین صورت به سه بخش تقسیم می‌کنیم:

$$|u_{i,j}^{n+1} - u(x_i, y_j, t_{n+1})| \leq e_1 + e_2 + e_3 \quad (47)$$

که در آن

$$\begin{aligned} e_1 &= |u_{i,j}^{n+1} - (c_{-1} I_p(u(x_{i-1}, y_j, t_n)) + c_0 I_p(u(x_i, y_j, t_n)) + c_1 I_p(u(x_{i+1}, y_j, t_n)) + \\ &\quad c'_{-1} J_p(u(x_i, y_{j-1}, t_n)) + c'_0 J_p(u(x_i, y_j, t_n)) + c'_1 J_p(u(x_i, y_{j+1}, t_n)))|, \\ e_2 &= |(c_{-1} I_p(u(x_{i-1}, y_j, t_n)) + c_0 I_p(u(x_i, y_j, t_n)) + c_1 I_p(u(x_{i+1}, y_j, t_n)) + \\ &\quad c'_{-1} J_p(u(x_i, y_{j-1}, t_n)) + c'_0 J_p(u(x_i, y_j, t_n)) + c'_1 J_p(u(x_i, y_{j+1}, t_n))) - \\ &\quad (c_{-1} u(x_{i-1}, y_j, t_n) + c_0 u(x_i, y_j, t_n) + c_1 u(x_{i+1}, y_j, t_n) + \\ &\quad c'_{-1} u(x_i, y_{j-1}, t_n) + c'_0 u(x_i, y_j, t_n) + c'_1 u(x_i, y_{j+1}, t_n))|, \\ e_3 &= |(c_{-1} u(x_{i-1}, y_j, t_n) + c_0 u(x_i, y_j, t_n) + c_1 u(x_{i+1}, y_j, t_n) + \\ &\quad c'_{-1} u(x_i, y_{j-1}, t_n) + c'_0 u(x_i, y_j, t_n) + c'_1 u(x_i, y_{j+1}, t_n)) - u(x_i, y_j, t_{n+1})|. \end{aligned}$$

به موجب نتایج به دست آمده از ایده معادله تغییر یافته، تخمین خطای برش موضعی بدین صورت است:

$$e_3 = O(\Delta t^2, \Delta t^2 \Delta x, \Delta t^2 \Delta y, \Delta t \Delta x^2, \Delta t \Delta y^2). \quad (48)$$

سپس به کمک (۴۳) و (۴۶)، داریم:

$$e_2 = O(\Delta x^{p+1}, \Delta y^{p+1}). \quad (49)$$

با جای گذاری (۴۵) در  $e_1$  و با استفاده از (۴۴) و (۴۶) به سادگی می‌توان نشان داد که:

$$e_1 \leq e^n. \quad (50)$$

به کمک کران‌های به دست آمده در (۵۰)-(۴۸)، از (۴۷) نتیجه می‌گیریم:

$$|u_{i,j}^{n+1} - u(x_i, y_j, t_{n+1})| \leq e^n + O(\Delta t^2, \Delta t^2 \Delta x, \Delta t^2 \Delta y, \Delta t \Delta x^2, \Delta t \Delta y^2, \Delta x^{p+1}, \Delta y^{p+1}).$$

چون این نابرابری به ازای هر  $i$  و  $j$  برقرار است، با ماکسیمم‌گیری داریم:

$$e^{n+1} \leq e^n + O(\Delta t^2, \Delta t^2 \Delta x, \Delta t^2 \Delta y, \Delta t \Delta x^2, \Delta t \Delta y^2, \Delta x^{p+1}, \Delta y^{p+1}). \quad (۵۱)$$

با به کار بردن (۵۱) به صورت بازگشتی داریم:

$$e^{n+1} \leq e^0 + nO(\Delta t^2, \Delta t^2 \Delta x, \Delta t^2 \Delta y, \Delta t \Delta x^2, \Delta t \Delta y^2, \Delta x^{p+1}, \Delta y^{p+1}),$$

که در آن  $e^0$  بیان‌گر خطای داده اولیه است. چون  $n = O(\Delta t^{-1})$ ، به سادگی نتیجه می‌گیریم:

$$e^{n+1} \leq e^0 + O(\Delta t, \Delta t \Delta x, \Delta t \Delta y, \Delta x^2, \Delta y^2, \frac{\Delta x^{p+1}}{\Delta t}, \frac{\Delta y^{p+1}}{\Delta t}), \quad (۵۲)$$

و اگر  $\Delta x = \Delta y$ ، نابرابری خطا بدین صورت در می‌آید:

$$e^{n+1} \leq e^0 + O(\Delta t, \Delta t \Delta x, \Delta x^2, \frac{\Delta x^{p+1}}{\Delta t}).$$

و عبارتهای  $O(\Delta x^{p+1} / \Delta t)$  و  $O(\Delta y^{p+1} / \Delta t)$  در (۵۲) مشابه هستند با آن‌چه که در [۲۶] به دست آمده و بر رفتار غیریکنوای دقت روش‌های نیمه-لاگرانژی نسبت به  $\Delta t$  دلالت دارند. سایر جملات در کران خطای (۵۲) یعنی  $O(\Delta t, \Delta t \Delta x, \Delta t \Delta y, \Delta x^2, \Delta y^2)$ ، بیان‌گر خطای برش کلی طرح صریح شش نقطه‌ای هستند.

یک خطای مشابه می‌توان برای طرح ضمنی شش نقطه‌ای (۲۹) یا به طور معادل (۳۰) و (۳۱) به دست آورد. به

همین منظور، (۳۰) را به صورت (۵۳) بازنویسی می‌کنیم:

$$u_{i,j}^{n+1/2} = d_{-1}u_{i-1,j}^{n+1/2} + c_0 I_p(u_{i,j}^{n+1/2}) + d_1 u_{i+1,j}^{n+1/2}, \quad (۵۳)$$

که در آن ضرایب داده شده در (۳۲)، در برابری (۵۴) صدق می‌کنند:

$$d_{-1} + c_0 + d_1 = 1. \quad (۵۴)$$

برای خطای میانی می‌توان نوشت:

$$|u_{i,j}^{n+1/2} - u(x_i, y_j, t_{n+1/2})| \leq e_1 + e_2 + e_3, \quad (۵۵)$$

که در آن

$$e_1 = |u_{i,j}^{n+1/2} - (d_{-1}u(x_{i-1}, y_j, t_{n+1/2}) + c_0 I_p(u(x_i, y_j, t_{n+1/2})) + d_1 u(x_{i+1}, y_j, t_{n+1/2}))|,$$

$$e_2 = |(d_{-1}u(x_{i-1}, y_j, t_{n+1/2}) + c_0 I_p(u(x_i, y_j, t_{n+1/2})) + d_1 u(x_{i+1}, y_j, t_{n+1/2})) -$$

$$(d_{-1}u(x_{i-1}, y_j, t_{n+1/2}) + c_0 u(x_i, y_j, t_{n+1/2}) + d_1 u(x_{i+1}, y_j, t_{n+1/2}))|,$$

$$e_3 = |(d_{-1}u(x_{i-1}, y_j, t_{n+1/2}) + c_0 u(x_i, y_j, t_{n+1/2}) + d_1 u(x_{i+1}, y_j, t_{n+1/2})) - u(x_i, y_j, t_{n+1/2})|.$$

برای  $e_1$  در سمت راست (۵۵)، پس از جای‌گذاری (۵۳) و به کار بردن (۴۴)، کران زیر برقرار است:

$$e_1 \leq (d_{-1} + d_1) \max_i |u_{i,j}^{n+1/2} - u(x_i, y_j, t_{n+1/2})| + c_0 \max_i |u_{i,j}^n - u(x_i, y_j, t_n)| = (d_{-1} + d_1)e^{n+1/2} + c_0 e^n.$$

$e_2$  در سمت راست (۵۵) بیان‌گر خطای درون‌یابی است و دارای کران  $O(\Delta x^{p+1})$  است.  $e_3$  در سمت راست (۵۵)

خطای برش موضعی یعنی  $O(\Delta t^2, \Delta t \Delta x^2)$  است که به سادگی به کمک معادله تغییر یافته به دست می‌آید. از این‌رو،

برای هر  $i$  و  $j$  داریم

$$|u_{i,j}^{n+1/2} - u(x_i, y_j, t_{n+1/2})| \leq (d_{-1} + d_1)e^{n+1/2} + c_0 e^n + O(\Delta t^2, \Delta t \Delta x^2, \Delta x^{p+1}),$$

و بلافاصله داریم:

$$e^{n+1/2} \leq (d_{-1} + d_1)e^{n+1/2} + c_0 e^n + O(\Delta t^2, \Delta t \Delta x^2, \Delta x^{p+1})$$

که با استفاده از (۵۴) بدین صورت در می‌آید:

$$e^{n+1/2} \leq e^n + O(\Delta t^2, \Delta t \Delta x^2, \Delta x^{p+1}).$$

به‌طور مشابه برای طرح (۳۱) می‌توان نوشت:

$$e^{n+1} \leq e^{n+1/2} + O(\Delta t^2, \Delta t \Delta y^2, \Delta y^{p+1}).$$

و بنابراین

$$e^{n+1} \leq e^n + O(\Delta t^2, \Delta t \Delta x^2, \Delta t \Delta y^2, \Delta x^{p+1}, \Delta y^{p+1}).$$

با استفاده بازگشتی از این نابرابری، چون  $n = O(\Delta t^{-1})$  داریم:

$$e^{n+1} \leq e^0 + O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2, \frac{\Delta x^{p+1}}{\Delta t}, \frac{\Delta y^{p+1}}{\Delta t}).$$

به‌طور مشابه می‌توان کران خطای (۵۶) را برای طرح ضمنی پنج نقطه‌ای (۳۶) و (۳۷) استخراج کرد:

$$e^{n+1} \leq e^0 + O(\Delta t^2, \Delta t \Delta x^2, \Delta t \Delta y^2, \frac{\Delta x^{p+1}}{\Delta t}, \frac{\Delta y^{p+1}}{\Delta t}). \quad (۵۶)$$

### نتایج عددی

بر اساس نتایج بخش‌های قبل، پایداری طرح صریح شش نقطه‌ای (۱۶) مشروط است و نسبت به زمان همگرایی خطی دارد ولی پیاده‌سازی آن ساده است. اگرچه طرح ضمنی شش نقطه‌ای (۲۹) پایداری نامشروط دارد ولی همگرایی آن نسبت به زمان خطی است. در مقابل طرح ضمنی پنج نقطه‌ای (۳۶) و (۳۷) پایداری نامشروط داشته و نسبت به زمان همگرایی مرتبه دو دارد و در محیط‌های موازی به خوبی قابل پیاده‌سازی است. بنابراین در این بخش این طرح را برای حل دو مثال به کار می‌بریم که از [۲۷] استخراج شده‌اند. زمان نهایی  $T = 1$  انتخاب شده است و درون‌یاب خطی  $(p = 1)$  و مربعی  $(p = 2)$  بی-اسپلاین به همراه درون‌یاب درجه دو  $(p = 2)$  لاگرانژ بررسی می‌شوند. در مثال اول با تقویت درون‌یاب مرتبه همگرایی افزایش می‌یابد ولی در مثال دوم با افزایش درجه درون‌یاب مرتبه همگرایی تغییر نمی‌کند. این اتفاق بر اساس عبارت خطای (۵۶) قابل تفسیر است.

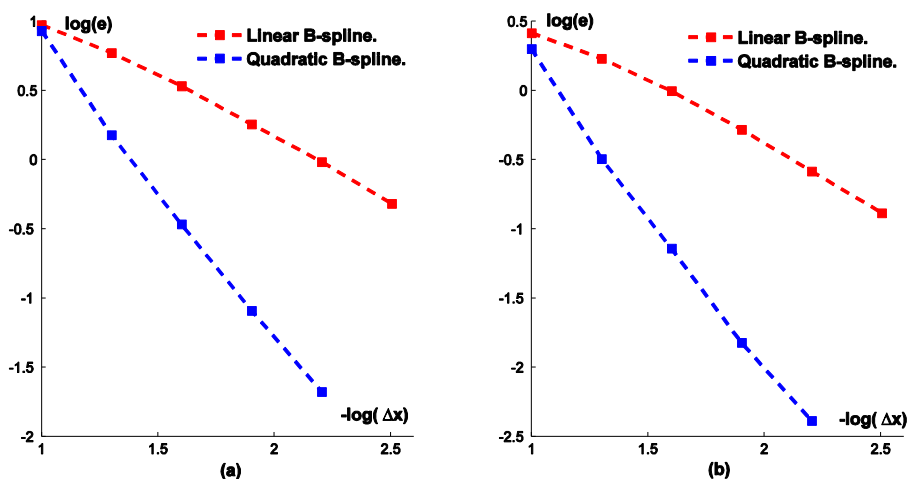
**مثال ۱.** در این مثال، دستگاه معادلات دو-بعدی برگرد (۶) را روی دامنه  $\Omega = (0,1) \times (0,1)$  در نظر گرفته و قرار می‌دهیم  $\varepsilon = 0.001$ . برای سادگی، شرایط اولیه و مرزی دیریکله را از جواب دقیق زیر استخراج می‌کنیم

$$u(x, y, t) = -2\varepsilon \frac{2\pi e^{-5\pi^2 \varepsilon t} \cos(2\pi x) \sin(\pi y)}{2 + e^{-5\pi^2 \varepsilon t} \sin(2\pi x) \sin(\pi y)}, \quad v(x, y, t) = -2\varepsilon \frac{\pi e^{-5\pi^2 \varepsilon t} \sin(2\pi x) \cos(\pi y)}{2 + e^{-5\pi^2 \varepsilon t} \sin(2\pi x) \sin(\pi y)}.$$

با فرض  $\Delta x = \Delta y = \Delta t$ ، عبارت خطای (۵۶) به  $O(\Delta x^2 + \Delta x^3 + \Delta x^p)$  ساده می‌شود.  $\Delta x$  را نصف کرده و نرم بی‌نهایت  $(L^\infty)$  و نرم دو  $(L^2)$  خطا را حساب کرده و نتایج را برای  $u$  گزارش داده‌ایم. نتایج جدول ۱ حاکی از آن است که طرح به کار رفته نسبت به  $\Delta x$  همگرایی مرتبه یک و دو به ترتیب برای درون‌یاب بی-اسپلاین خطی (LB) و بی-اسپلاین درجه دو (QB) و لاگرانژ درجه دو (QL) دارد. همگرایی مرتبه یک و مرتبه دو درون‌یاب‌های LB و QB در شکل ۱ نشان داده شده است.

جدول ۱. خطاها و مرتبه همگرایی برای درون‌یاب‌های مختلف برای مثال ۱

$p = 1$		LB		
$\Delta x$	$L^\infty \times 10^{-5}$	order	$L^2 \times 10^{-5}$	order
۱/۵	۱۳		۴/۱	
۱/۱۰	۹/۴	۰/۴۶	۲/۶	۰/۶۵
۱/۲۰	۵/۹	۰/۶۷	۱/۷	۰/۶۱
۱/۴۰	۳/۴	۰/۷۹	۰/۹۹	۰/۷۸
۱/۸۰	۱/۸	۰/۹۱	۰/۵۲	۰/۹۲
۱/۱۶۰	۰/۹۶	۰/۹۰	۰/۲۶	۱/۰۰
$p = 2$		QB		
$\Delta x$	$L^\infty \times 10^{-5}$	order	$L^2 \times 10^{-5}$	order
1/5	26		7.9	
۱/۵	۲۶		۷/۹	
۱/۱۰	۸/۵	۱/۶	۲/۰	۱/۹
۱/۲۰	۱/۵	۲/۵	۰/۳۲	۲/۶
۱/۴۰	۰/۳۴	۲/۱	۰/۰۷۲	۲/۱
۱/۸۰	۰/۰۸۱	۲	۰/۰۱۵	۲/۲
۱/۱۶۰	۰/۰۲۱	۱/۹	۰/۰۰۴۱	۱/۸
$p = 2$		QL		
$\Delta x$	$L^\infty \times 10^{-5}$	order	$L^2 \times 10^{-5}$	order
۱/۵	۲۰		۷/۹	
۱/۱۰	۷/۳	۱/۴	۱/۷	۲/۲
۱/۲۰	۱/۴	۲/۳	۰/۳۷	۲/۱
۱/۴۰	۰/۴۷	۱/۶	۰/۱۱	۱/۷
۱/۸۰	۰/۱۴	۱/۷	۰/۰۳۲	۱/۷
۱/۱۶۰	۰/۰۳۹	۱/۸	۰/۰۰۷۹	۲



شکل ۱. رشد نرم بی‌نهایت خطا (a) و نرم دو خطا (b) نسبت به  $\Delta x$

مثال ۲. در این مثال، معادله دو-بعدی برگرز ذیل را روی دامنه  $\Omega = (0,2) \times (0,2)$  در نظر گرفته و قرار می‌دهیم  $\varepsilon = 0.1$

$$u_t + uu_x + uu_y = \varepsilon(u_{xx} + u_{yy}), \quad (x, y, t) \in \Omega \times (0, T].$$

به‌سادگی می‌توان این معادله را به‌صورت دستگامی مانند (۶) بازنویسی کرد. برای سادگی، شرایط اولیه و مرزی دیریکله را از جواب دقیق زیر استخراج می‌کنیم

$$u(x, y, t) = \frac{1}{1 + e^{(x+y-t)/2\varepsilon}}.$$

با فرض  $\Delta y = \Delta x$  و  $\Delta t = \Delta x^p$  عبارت خطای (۵۶) به  $O(\Delta x + \Delta x^{p+2} + \Delta x^{2p})$  ساده می‌شود.  $\Delta x$  را نصف کرده و نرم بی‌نهایت ( $L^\infty$ ) و نرم دو ( $L^2$ ) خطا را حساب کرده و نتایج را گزارش داده‌ایم. چنان‌که انتظار داریم نتایج جدول ۲ حاکی از آن است که طرح به‌کار رفته نسبت به  $\Delta x$  همگرایی مرتبه یک برای درون‌یاب بی-اسپلاین خطی (LB) و بی-اسپلاین درجه دو (QB) و لاگرانژ درجه دو (QL) دارد.

جدول ۲. خطاها و مرتبه همگرایی برای درون‌یاب‌های مختلف برای مثال ۲

$p = 1$		LB		
$\Delta x$	$L^\infty \times 10^{-5}$	order	$L^2 \times 10^{-5}$	order
۱/۴۰	۱/۱		۰/۷۴	
۱/۸۰	۰/۵۵	۱/۰۲	۰/۳۷	۰/۹۶
۱/۱۶۰	۰/۲۷	۱/۰۲	۰/۱۹	۰/۹۶
۱/۳۲۰	۰/۱۳	۱/۰۲	۰/۰۹۹	۰/۹۵
$p = 2$		QB		
$\Delta x$	$L^\infty \times 10^{-5}$	order	$L^2 \times 10^{-5}$	order
۱/۴۰	۰/۴۷		۰/۲۰	
۱/۸۰	۰/۱۷	۱/۴	۰/۰۷	۱/۴
۱/۱۶۰	۰/۰۵	۱/۶	۰/۰۲	۱/۴
۱/۳۲۰	۰/۰۲	۱/۲	۰/۰۱	۰/۹۷
$p = 2$		QL		
$\Delta x$	$L^\infty \times 10^{-5}$	order	$L^2 \times 10^{-5}$	order
1/5	20		7.9	
۱/۵	۲۰		۷/۹	
۱/۴۰	۰/۱۶		۰/۰۹۷	
۱/۸۰	۰/۰۸۳	۰/۹۶	۰/۰۵۰	۰/۹۳
۱/۱۶۰	۰/۰۴۰	۱/۰۲	۰/۰۲۶	۰/۹۲
۱/۳۲۰	۰/۰۲۱	۱/۰۲	۰/۰۱۳	۰/۹۷

### جمع‌بندی

با دنبال کردن و تعمیم کار زیبای ونگ و همکاران [۲۶]، طرح‌های جدیدی بر اساس گسسته‌سازی نیمه-لاگرانژی، نظریه معادله تغییر یافته و طرح یک-بعدی موضعی برای حل عددی دستگاه معادلات دو-بعدی برگز ساخته شد. آنالیز خطای دقیقی به‌منظور نشان دادن دقت طرح‌های تفاضلات متناهی نیمه-لاگرانژی پیشنهادی انجام شد. با بررسی یک مثال در حل دستگاه معادلات غیرخطی دو-بعدی برگز، دقت زیاد روش و پایداری نامشروط روش ضمنی پنج نقطه‌ای (۳۶) و (۳۷) نمایش داده شد. نتایج به‌دست آمده به همراه نتایج [۲۶] تأیید می‌کنند که راه‌کار معادله تغییر یافته به‌سادگی برای مسائل غیرخطی یک و دو بعدی قابل پیاده‌سازی است. به‌علاوه دیدگاه جدیدی برای توسعه روش‌های نیمه-لاگرانژی کارا باز شده است. طرح‌های پیشنهادی بدون استفاده از درون‌یاب‌های مناسب برای تولید مقادیر تابع در

نقاط خروجی قابل استفاده نیستند. به جای بررسی اثر روش‌های درون‌یابی مختلف، بیش‌تر روی ساختن طرح‌های متنوع صریح و ضمنی تمرکز شده است. از میان درون‌یاب‌های موجود [۶]، [۲۰]، [۲۱]، روش‌های پرکاربرد لاگرانژ و بی-اسپلاین استفاده شده‌اند. بنابراین می‌توان در آینده به بررسی سایر درون‌یاب‌ها و اثرات آنها روی طرح‌ها پرداخت. در بخش ۳ تعدادی طرح نیمه-لاگرانژی با استفاده از ایده معادله تغییر یافته گسترش یافتند که عبارتند از: روش صریح شش نقطه‌ای (پایداری مشروط داشته و نسبت به خطا همگرایی خطی دارد)، طرح ضمنی شش نقطه‌ای (پایداری نامشروط داشته و نسبت به خطا همگرایی خطی دارد) و روش پنج نقطه‌ای (۳۶) و (۳۷)، که پایداری نامشروط داشته و نسبت به خطا همگرایی مربعی دارد. در هر تکرار روش باید دستگاه‌های خطی سه‌قطری حل شوند و از این بابت هزینه محاسباتی روش پائین است. به علاوه به سادگی می‌توان روش را در محیط‌هایی که قابلیت برنامه‌نویسی موازی دارند پیاده‌سازی کرده و از مزایای آنها بهره برد. چنان‌که در [۲۶] بیان شده است، ایده پیشنهادی را به صورت طبیعی می‌توان برای توسعه طرح‌های نیمه-لاگرانژی کارا و با دقت زیاد برای سایر مسائل غیرخطی وابسته به زمان مانند KdV و معادلات ناویه-استوکس که در آنها جمله انتقال (پهن‌رفت) نقش مهمی بازی می‌کند نیز به سادگی گسترش داد. در این رابطه در [۹] کارهایی در رابطه با معادله KdV با موفقیت انجام شده است و کار روی سایر معادلات ادامه دارد. اما باید توجه داشت که ساختن یک روش ضمنی که پایداری نامشروط را در کنار دقت مرتبه بالا داشته باشد به محاسبات نمادین قابل توجهی برای به دست آوردن ضرایب طرح نیاز دارد. در ارتباط با برتری روش پیشنهاد شده با سایر روش‌های تفاضلات متناهی باید توجه داشت بسیاری از روش‌های تفاضلات متناهی (و حتی سایر روش‌ها مانند روش عناصر متناهی و روش گالرکین ناپیوسته [۲۷]) زمانی پایداری عددی نتیجه می‌شود که شرط CFL برقرار باشد، ولی روش پیشنهاد شده به این شرط محدود نیست و برای رسیدن به پایداری عددی نیازی نیست اندازه گام زمانی را خیلی کوچک در نظر گرفت و با اندازه گام زمانی بزرگ نیز نتایج رضایت‌بخشی به دست می‌آید.

### منابع

1. Akbari R., Mokhtari R., "A new compact finite difference method for solving the generalized long wave equation", *Numer. Funct. Anal. Optim.* 35(2) (2014) 133-152.
2. Benítez M., Bermúdez A., "Pure Lagrangian and semi-Lagrangian finite element methods for the numerical solution of Navier-Stokes equations", *Appl. Numer. Math.* (2014) In Press.
3. Borhani S., Seirafianpour S., Ravandi S.A.H., Sheikhzadeh M., Mokhtari R., "Computational and experimental investigation of moisture transport of spacer fabrics", *J. Eng. Fabrics Fibers* 5(3) (2010) 6th paper.
4. Carlini E., Ferretti R., "A Semi-Lagrangian approximation for the AMSS model of image processing", *Appl. Numer. Math.* 73 (2013) 16-32.
5. Chegini N.G., Salaripanah A., Mokhtari R., Isvand D., "Numerical solution of the regularized long wave equation using nonpolynomial splines", *Nonlinear Dyn.* 69(1-2) (2012) 459-471.
6. de Boor C., "A Practical Guide to Splines", Springer-Verlag, New York (1976).
7. Dovgilevich L., Sofronov I., "High-accuracy finite-difference schemes for solving elastodynamic problems in curvilinear coordinates within multiblock approach", *Appl.*

- Numer. Math. 93 (2015) 176-194.
8. Falcone M., Finzi Vita S., Giorgi T., Smits R. G., "A semi-Lagrangian scheme for the game p-Laplacian via p-averaging", Appl. Numer. Math. 73 (2013) 63-80.
  9. Feizollahi E., "Numerical solution of the nonlinear evolution equations based on semi-Lagrangian finite difference schemes, MSc. Thesis", Department of Mathematical Sciences, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran (2013).
  10. Hirt C. W., "Heuristic stability theory for finite difference equations", J. Comput. Phys. 2 (1968) 339-355.
  11. Kazolea M., Delis A. I., "A well-balanced shock-capturing hybrid finite volume-finite difference numerical scheme for extended 1D Boussinesq models", Appl. Numer. Math. 67 (2013) 167-186.
  12. Mashayekhi S., Ordokhani Y., Razzaghi M., "A hybrid functions approach for the Duffing equation", Phys. Scr. 88 (2013) 025002 (8pp).
  13. Mokhtari R., Mohammadi M., "Numerical solution of GRLW equation using Sinc-collocation method", Comput. Phys. Comm. 181(7) (2010) 1266-1274.
  14. Mokhtari R., Mohseni M., "A meshless method for solving mKdV equation", Comput. Phys. Comm. 183(6) (2012) 1259-1268.
  15. Mokhtari R., Isvand D., Chegini N. G., Salaripanah A., "Numerical solution of the Schrödinger equations by using Delta-shaped basis functions", Nonlinear Dyn. 74 (1-2) (2013) 77-93.
  16. Mokhtari R., Ziaratgahi S. T., "Numerical solution of RLW equation using integrated radial basis functions", Appl. Comput. Math. 10(3) (2011) 428-448.
  17. Rahimkhani P., Ordokhani Y., Babolian E., "Fractional-order Bernoulli wavelets and their applications", Applied Mathematical Modelling 40 (2016) 8087-8107.
  18. Rahimkhani P., Ordokhani Y., Babolian E., "A new operational matrix based on Bernoulli wavelets for solving fractional delay differential equations", Numer. Algor., DOI 10.1007/s11075-016-0146-3.
  19. Sabermahani S., Ordokhani Y., Yousefi S. A., "Numerical approach based on fractional-order Lagrange polynomials for solving a class of fractional differential equations", Comp. Appl. Math., DOI 10.1007/s40314-017-0547-5.
  20. Staniforth A., Cote J., "Semi-Lagrangian integration schemes for atmospheric models-A review J., Monthly Weat. Rev. 119 (1991) 2206-2223.
  21. Stoer J., Bulirsch R., "Introduction to Numerical Analysis, third ed.", Springer-Verlag, NewYork (2003).
  22. Temperton C., Staniforth A., "An efficient two-time-level semi-Lagrangian semi-implicit

- integration scheme", Q. J. R. Meteorol. SOC. 113 (1987) 1025-1039.
23. Venutelli M., "New optimized fourth-order compact finite difference schemes for wave propagation phenomena", Appl. Numer. Math. 87 (2015) 53-73.
24. Wang J., "Accurate and efficient difference methods for linear advection-diffusion equations", Int. J. Appl. Math. Mech. 6 (2010) 63-73.
25. Warming R. F., Hyett B. J., "The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite difference method", J. Comput. Phys. 14 (1974) 159-179.
26. Wang J., Layton A., "New numerical methods for Burgers' equation based on semi-Lagrangian and modified equation approaches", Appl. Numer. Math. 60 (2010) 645-657.
27. Zhao G., Yu X., Zhang R., "The new numerical method for solving the system of two-dimensional Burgers' equations", Comput. Math. Appl. 62 (2011) 3279-3291.