خمینه‌های تخت با ابعاد پایین با رده‌هایی از مترهای فینسلری

سیده صدیقه علوی اندراجمی، مهدی رفیعی‌راد*
دانشگاه مازندران، دانشکدهٔ، علوم ریاضی، گروه ریاضی

دریافت ۹۶/۰۹/۱۳ پذیرش ۹۷/۱۰/۲۴

چکیده

منیفلدهای ریمانی موضعاً مسطح، تا حد ایزومتری، خارج قسمت فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ بر یک گروه بیبرباخ Γ است و رده‌بندی دقیقی از آنها در ابعاد ۲ و ۳ وجود دارد. در این مقاله، دو رده از خمینه‌های فینسلری موضعاً مسطح دوبعدی و سه‌بعدی را بررسی کرده و رده‌بندی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: متر ریشه چهارم، خمینه تخت دوبعدی، ایزومتری، گروه بیبرباخ، متر راندرز

مقدمه

یک خمینهٔ ریمانی n-بعدی M همراه با متر ریمانی $\alpha(x,y)=\sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ موضعاً تخت[1] (یا موضعاً اقلیدسی[2]) نامیده می‌شود هرگاه حول هر نقطه از آن، دستگاه مختصاتی وجود داشته باشد که در آن ضرایب a_{ij}، به x بستگی نداشته باشند. قضیه‌ای کلاسیک بیان می‌کند که یک خمینهٔ ریمانی، تخت است اگر و تنها اگر انحنای برشی[3] آن مساوی صفر باشد. پوشش جهانی[4] یک خمینهٔ ریمانی تخت و کامل[5] عبارت است از فضای اقلیدسی[6] $\mathbb{R}^n$. بیبرباخ[7] ثابت کرد که خمینه‌های فشرده[8] ریمانی تخت، به‌صورت خارج قسمت[9] $\frac{\mathbb{R}^n}{\Gamma}$ هستند که در آن Γ یک زیرگروه گسسته[10]، هم-فشرده[11] و بدون تاب[12] گروه اقلیدسی[13]، یعنی گروه $E(n)=O(n)\ltimes\mathbb{R}^n$ است. در بعد ۱، تنها خمینه‌های کامل موضعاً تخت و هم‌بند عبارتند از $\mathbb{R}$ و $\mathbb{S}^1$ [۳]. در بعد ۲، تنها خمینه‌های کامل تخت و هم‌بند[14] عبارتند از صفحه[15]، استوانه[16]، نوار موبیوس[17]، چنبره[18] و بطری کلاین[1]. در بعد ۳، تنها ۱۰ خمینهٔ ریمانی کامل تخت و هم‌بند وجود دارند که ۶ تای آنها جهت‌پذیر و مابقی جهت‌ناپذیرند [۸] .

---

*نویسنده مسئول rafie-rad@umz.ac.ir

1. Locally flat
2. Locally Euclidean
3. Sectional curvature
4. Universal covering
5. Complete
6. Euclidean space
7. Bieberbach
8. Compact manifolds
9. Qoutient
10. Discrete subgroup
11. Cocompact
12. Torsion free
13. Euclidean group
14. Connected
15. Plane
16. Cylinder
17. Möbius band
18. Torus

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.7.8]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.261]

یک خمینهٔ فینسلری n-بعدی M همراه با متر فینسلری

$$\alpha(x,y)=\sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}F(x,y)=\sqrt{g_{ij}(x,y)y^iy^j}$$

تخت[۲] (یا موضعاً مینکوفسکی[۳]) نامیده می‌شود هرگاه حول هر نقطه از آن، دستگاه مختصاتی وجود داشته باشد که در آن ضرایب g_{ij}، به x بستگی نداشته باشند. هرگاه یک خمینهٔ فینسلری تخت باشد آن‌گاه انحنای پرچمی آن مساوی با صفر است؛ در حالی‌که عکس آن ممکن است برقرار نباشد. مثال (۱):

مثال ۱. [۶] اگر $a\epsilon\mathbb{R}^n$ که $|a|<1$ یک بردار ثابت دلخواه باشد. متر فینسلری زیر تصویری تخت (یعنی به‌طور موضعی ژئودزی‌هایش خط راستند)، با انحنای پرچمی صفر دارد $K=0$.

$$F=\frac{\left[(1+\langle a,x\rangle)\left(\langle x,y\rangle+\sqrt{|y|^2-(|x|^2|y|^2-\langle x,y\rangle^2)}\right)+(1-|x|^2)\langle a,y\rangle\right]^2}{(1-|x|^2)^2\sqrt{|y|^2-(|x|^2|y|^2-\langle x,y\rangle^2)}}$$

که متریکش یک تعمیم مستقیم از مثال مشهور بروالد است.

در این مقاله ابتدا لم ۲ را ثابت می‌کنیم:

لم ۲. در فضای $\mathbb{R}^2$ حاصل از متر ریشه چهارم تنها دو زیرگروه ایزومتری، بیبرباخ هستند.

سپس در ابعاد ۲ و ۳ قضیهٔ ۳ را ثابت می‌کنیم:

قضیهٔ ۳. *الف) در بعد ۲، تنها خمینه راندرزی فشرده موضعاً تخت و هم‌بند عبارت است از چنبره* $\mathbb{T}^2$.

ب) در بعد ۳، تنها خمینه راندرزی فشرده موضعاً تخت و هم‌بند عبارت است از چنبره $\mathbb{T}^3$.

با شناسایی ساختار گروه‌های ایزومتری در ابعاد ۲ و ۳ و نمایش آنها به‌کمک ماتریس‌های از مرتبهٔ ۳ که با عمل ضرب ماتریس‌ها تشکیل گروه می‌دهند، سعی می‌کنیم به زیرگروه‌های گسسته و بدون تاب توجه کنیم.

ماتریس‌ها و ساخت گروه‌های بیبرباخ با متر متقارن

تعریف ۴. یک زیرگروه گسسته و هم –فشرده از گروه ایزومتری‌های فضای اقلیدسی را یک گروه کریستالوگرافی می‌نامند.

تعریف ۵. یک زیر گروه کریستالوگرافی بدون تاب را گروه بیبرباخ می‌نامند.

یادآوری ۱. یک زیرگروه ایزومتری $\Gamma\subseteq \mathrm{E(n)}$ هم –فشرده (یا یونیفرم[۴]) است، هرگاه فضای خارج قسمتی $\frac{\mathbb{R}^n}{\Gamma}$(یا $\frac{E(n)}{\Gamma}$) فشرده باشد ([۴] و[۷] را ببینید).

بیبرباخ گروه‌های کریستالو گرافی از بعد دلخواه را بررسی کرد. به‌ویژه قضایای زیر را اثبات کرد:

۱. هر گروه کریستالو گرافی Γ، شامل n انتقال موازی مستقل خطی است. یعنی گروه G حاصل از تبدیلات خطی Γ متناهی است.
۲. دو گروه کریستالوگرافی هم ارزند، اگر و تنها اگر به مفهوم جبر مجرد یکریخت باشند.
۳. در هر بعدn -به تقریب ایزومتری- تعدادی متناهی گروه کریستالو گرافی از آن بعد وجود دارند.(که پاسخی برای ۱۸امین مسئله هیلبرت است.)

تعریف ۶. اگر $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ یک نگاشت وd متری دلخواه روی $\mathbb{R}^2$ باشد آن‌گاه در صورت برقراری شرط:

---
1. Klein bottle
2. Flat
3. Locally Minkowski
4. Uniform

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.7.8]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.261]

$d(x,y)=d\big(f(x),f(y)\big)$، f را یک ایزومتری روی $\mathbb{R}^2$ می‌نامیم.

در ادامه، ابتدا $\mathbb{R}^2$ را با متر ریشه چهارم در نظر می‌گیریم. توپولوژی مورد نظر همان توپولوژی تولید شده به‌وسیلهٔ پایه حاصل از گوی‌های باز این متر است:

$$U(x,\delta)=\{y\in\mathbb{R}^2\mid d(x,y)<\delta\}=\left\{y\in\mathbb{R}^2\ \middle|\sqrt[4]{(x_1-y_1)^4+(x_2-y_2)^4}<\delta\right\}$$

البته توجه داریم که این متر در واقع می‌تواند حاصل این نرم روی $\mathbb{R}^2$ باشد:

$$\begin{cases}\|.\|:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ \|x\|=\sqrt[4]{{x_1}^4+{x_2}^4}\end{cases}$$
$$\begin{cases}d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ d(x,y)=\|x-y\|\end{cases}$$

در گروه $GL(2,\mathbb{R})$ به سراغ زیرگروهی می‌رویم که درآیه‌های آن از مجموعهٔ $M=\{-1,0,1\}$ انتخاب شوند. طبیعی است که ۸۱ ماتریس متفاوت با این درآیه‌ها می‌توان ساخت که در میان آنها یک ماتریس با درآیه‌های تمام صفر، ۸ ماتریس با داشتن ۳ درآیه صفر، ۱۶ ماتریس با داشتن یک سطر یا یک ستون صفر، ۴ ماتریس با داشتن ۴ درایه غیرصفر اما داشتن دو سطر یا ستون یکسان، دترمینانی برابر صفر دارند که مانع عضویت زیرگروه مورد نظر هستند. ۵۲ ماتریس باقی مانده را در نظر می‌گیریم. از سوی دیگر برای آن‌که خاصیت ایزومتری گروه کنترل شود می‌توان شرط $\|AX\|=\|X\|$، که در آن A ماتریسی مربعی از مرتبهٔ ۲ است، را کنترل کرد؛ که حاصل این محاسبات هشت ماتریس است:

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\text{ و }\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\text{ و }\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\text{ و }\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\text{ و }\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\text{ و }\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}\text{ و }\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\text{ و }\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$$

گروه‌های ایزومتری حاصل از این ماتریس‌ها در ترکیب با بردار انتقال دوبعدی که برای راحتی محاسبات در قالب ماتریس مربعی مرتبهٔ ۳ نمایش داده شده اند[۴] در جدول ۱ بررسی شده‌اند:

اکنون به ساخت فضاهای خارج قسمتی $\frac{E(2)}{\Gamma_i}\ (i=1,\cdots,7)$ می‌پردازیم. البته تقریب یکریختی را هم در نظر گرفته از محاسبات اضافی پرهیز می‌کنیم.

۱. در حالت اول $\frac{E(2)}{\Gamma_1}=\frac{O(2)\ltimes\mathbb{R}^2}{\Gamma_1}\cong\frac{GP(2)\ltimes\mathbb{R}^2}{\mathbb{R}^2}\cong GP(2)$ که چون $GP(2)$ (گروه ماتریس‌های جای‌گشت تعمیم یافته) فشرده است، زیر گروه Γ_1 هم-فشرده[۱] نامیده می‌شود [۴]. از سوی دیگر توپولوژی $GP(2)$ با توپولوژی القایی حاصل از همئومورف بودن $M(2,\mathbb{R})$ با $\mathbb{R}^4$ گسسته است. در نتیجه Γ_1 کریستالوگرافی است، حال بنا به جدول ۱ که Γ_1 بدون تاب شناسایی شده است بیبرباخ است. که فضای خارج قسمتی حاصل از آن همان چنبره است.

۲. Γ_2 و Γ_7 دو گروه تابدار هستند پس طبیعتاً بیبرباخ نخواهند بود.

۳. Γ_3، Γ_4، Γ_5 و Γ_6 که همگی گروه‌هایی یک‌ریخت هستند فضای خارج قسمتی حاصل از آنها همئومورف است که یکی برای تعیین ساختار کافی است. فضای خارج قسمتی حاصل آنها بطری کلاین است.

۴. آن‌چه مطرح شد در واقع لم ۲ را به اثبات رساند.

خمینه‌های فینسلری

تعریف ۷. [۵]، تابع نامنفی F، یک نرم مینکوفسکی روی فضای V نامیده می‌شود اگر این شرایط را داشته باشد:

۱. F روی فضای $V-\{0\}$ از رده C^∞ باشد.

1. Cocompact

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.7.8]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.261]

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.7.8]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.261]

جدول ۱.

ردیف نام زیرگروه	نمایش زیر گروه	زیرگروه ایزومتری $E(2)$ به پیمانه یکریختی تابدار یا بدون تاب
1	$\{I\}$	$\Gamma_1=\left\{\begin{bmatrix}1&0&na\\0&1&nb\\0&0&1\end{bmatrix} \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$ $(a,b\in\mathbb{R})$بدون تاب
2	$\left\{I_{(2)},\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\right\}$	$\Gamma_2=\left\{\begin{bmatrix}-1&0&a\\0&-1&b\\0&0&1\end{bmatrix},I_{(3)}\right\}$ $(a,b\in\mathbb{R})$تابدار
3	$\left\{I_{(2)},\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\right\}$	$\Gamma_3=\left\{\begin{bmatrix}1&0&na\\0&-1&b\\0&0&1\end{bmatrix}n_{\text{فرد}},\begin{bmatrix}1&0&na\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}n_{\text{زوج}} \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$ $(a,b\in\mathbb{R})$بدون تاب
4	$\left\{I_{(2)},\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$	یکریخت با Γ_3 پس بدون تاب Γ_4
5	$\left\{I_{(2)},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right\}$	$\Gamma_5=\left\{\begin{bmatrix}0&1&\frac{n+1}{2}a+\frac{n-1}{2}b\\1&0&\frac{n-1}{2}a+\frac{n+1}{2}b\\0&0&1\end{bmatrix}n_{\text{فرد}},\begin{bmatrix}1&0&\frac{n}{2}a+\frac{n}{2}b\\0&1&\frac{n}{2}a+\frac{n}{2}b\\0&0&1\end{bmatrix}n_{\text{زوج}} \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$ و یکریخت با Γ_3 $(a,b\in\mathbb{R})$بدون تاب
6	$\left\{I_{(2)},\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}\right\}$	$\Gamma_6=\left\{\begin{bmatrix}0&-1&\frac{n+1}{2}a-\frac{n-1}{2}b\\-1&0&-\frac{n-1}{2}a+\frac{n+1}{2}b\\0&0&1\end{bmatrix}n_{\text{فرد}},\begin{bmatrix}1&0&\frac{n}{2}a-\frac{n}{2}b\\0&1&-\frac{n}{2}a+\frac{n}{2}b\\0&0&1\end{bmatrix}n_{\text{زوج}} \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$ و یکریخت با Γ_3 $(a,b\in\mathbb{R})$بدون تاب
7 ≤	$\left\{I_{(2)},\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\right\}$	$\Gamma_7=\left\{\begin{bmatrix}0&1&a\\-1&0&b\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&0&a+b\\0&-1&b-a\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-1&b\\1&0&-a\\0&0&1\end{bmatrix},I_{(3)}\right\}$ $(a,b\in\mathbb{R})$تابدار

۱. F همگن مثبت درجه[1] ۱ باشد.

۲. به‌ازای هر $y\in V-\{0\}$، g_y با تعریف زیر یک نگاشت دو خطی[2]، متقارن[3] و معین مثبت[4] روی V باشد:

$$g_y(u,v)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\left[F^2(y+su+tv)\right]_{|s=t=0}$$

دوتایی (V,F) را یک فضای مینکوفسکی[5] می‌نامیم هرگاه F یک نرم مینکوفسکی روی فضای V باشد. متر القایی از این نرم روی فضای V را متر مینکوفسکی[6] می‌نامیم و به‌صورت $(u,v\in V)$ $d(u,v)=F(v-u)$ تعریف می‌کنیم.

1. Positively homogenous of order 1
2. Billinear
3. Symmetric
4. Positive definite
5. Minkowski space
6. Minkowski metric

مثال ۸. [۵]، (نرم راندرز[1]) اگر α یک نرم اقلیدسی و β یک فرمی(ص ۱۸۴، [۱] را ببینید) خطی روی فضای n-بعدی V باشد. نگاشت $F(y) = \alpha(y) + \beta(y)$ در صورتی که $\|\beta\| < 1$ یک نرم مینکوفسکی است؛ که نرم راندرز نامیده می‌شود.

تعریف ۹. [۵]، یک تابع $F: TM \to [0, +\infty[$ در صورت داشتن شرایط زیر یک متر فینسلری است:

۱. F روی فضای مماس بدون صفر$(TM - \{0\})$ از هر مرتبه ای مشتق پذیر باشد.

۲. برای هر عضو منیفلد M تحدید تابع F به فضای مماس در آن نقطه$(F|_{T_xM})$ یک نرم مینکوفسکی باشد.

گاهی تابع F شرط $F(x, -y) = F(x, y)$ را دارد. در این حالت در واقع حالتی خاص از $F(x, \lambda y) = |\lambda| F(x, y)$ روی داده است، که همگنی مطلق[2] نامیده می‌شود. توجه می‌کنیم که برای مثال نرم راندرز چنین خاصیتی را ندارد [۲].

مثال ۱۰. فضای راندرزی[۱]، فرض کنیم (M, a_{ij}) یک منیفلد ریمانی و $w = w_i dx^i$ یک میدان یک فرمی روی M باشد. اگر $\alpha(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x) y^i y^j}, \beta(x, y) = w_i(x) y^i$ را در نظر بگیریم آن‌گاه می‌توانیم متر فینسلری را $F = \alpha + \beta$ معرفی کنیم.

چنین متری را متر راندرزی می‌نامیم. فضای حاصل از چنین متری در ارائه مدل هندسی نظریه نسبیت کاربرد دارد.

مثال ۱۱. فضای ماتسوموتو[3][۱]، فرض کنیم αوβ همانند مثال ۱۰) معرفی شوند. زیر فضایی از TM_0 را، که در آن متر فینسلری به شکل $F(x, y) = \frac{\alpha^2}{a\alpha - b\beta}$ معرفی شود، در نظر می‌گیریم. فضای (M, F) را فضای ماتسوموتو می‌نامیم.

مثال ۱۲. [۲]، یک دستورالعمل ویژه ساخت خانواده‌ای از نرم‌های مینکوفسکی بدین‌ترتیب است:

$$F(x_1, x_2) = \sqrt{\sqrt{(x_1)^4 + (x_2)^4} + \lambda[(x_1)^2 + (x_2)^2]}$$

که در آن λ هر مقدار ثابت نامنفی می‌تواند باشد. این نرم از تغییرشکل یا اختلال در متر ریشه چهارم[4] حاصل می‌شود. می‌شود. اگر $\lambda = 0$ تابع F، که تانسور اصلی[5] (تانسور متریک) متر درجهٔ چهارم نامیده می‌شود. به‌دلیل آن‌که تحدب تحدب قوی‌اش در برخی مقادیر غیرصفر نقض می‌شود نمی‌تواند نرم مینکوفسکی شود. اما اگر $\lambda > 0$ شرط معین مثبت بودن تامین، و ساختار فینسلری F نرم مینکوفسکی می‌شود.

فرض کنیم (E, π, N, F) یک کلاف تاری و $f: M \to N$ یک نگاشت هموار بین دو منیفلد باشد. کلاف برگردان E به‌وسیلهٔ f روی M را با نماد f^*E نمایش می‌دهند و بدین‌صورت تعریف می‌شود:

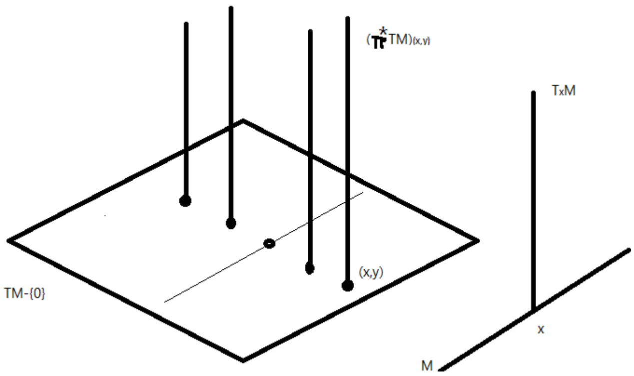
$$f^*E = \{(x, v) \in M \times E \mid f(x) = \pi(v)\}$$

تارهای کلاف برگردان f^*E در نقطه ای مثل b، نسخه‌ای از تارهای E به شکل $F_{f(b)}$ هستند. اگر f^*E را روی مؤلفهٔ اول تصویر کنیم، یک کلاف تاری روی M داریم. اگر این تصویر روی مؤلفهٔ دوم انجام شود این دیاگرام جابه‌جایی حاصل می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\text{تصویر روی مؤلفهٔ دوم}} & E \\ \text{تصویر روی مؤلفهٔ اول}\downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

1. Randers norm
2. Absolute homogeneity
3. Matsumoto space
4. Perturbation of the quartic metric
5. Fundamental tensor

آن‌چه ما از کلاف برگردان انتظار داریم، آنست که در تعریف مذکور، منیفلد M با بعد m باشد، TM همان منیفلد E و با کمک همسایگی باز U حول هر نقطه دلخواه منیفلد M، منیفلد F، را $\mathbb{R}^m$ در نظر بگیریم و π نگاشت تصویر از TM به M باشد که هر $T_pM = \pi^{-1}(p)$ یک تار این کلاف تاری باشد. در این صورت کلاف برگردان ما π^*TM خواهد بود که یک کلاف‌برداری کلاف مماسی سفته $TM - \{0\}$ است. تارهای آن در هر نقطه (x, y) از فضاهای مماس T_pM تشکیل می‌شود (شکل ۱).



تعریف ۱۳. [۵]، فرض کنیم $g_{ij}(y) = \frac{1}{2}[F^2]_{y^iy^j}(y)$ و $G^i(y) = \frac{1}{4}g^{ij}(y)\{[F^2]_{x^ky^l}(y)y^k - [F^2]_{x^l}(y)\}$، نگاشت موضعی G^i ضرایب ژئودزیک[1] نامیده می‌شود. این ضرایب یک میدان برداری روی $TM - \{0\}$ بدین‌صورت تعریف می‌کند:

$$\boldsymbol{G} = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}$$

که روی $TM - \{0\}$، C^∞ و روی بردارهای مماس در TM، C^1 است. $\boldsymbol{G}$ اسپری القایی[2] به‌وسیلهٔ F نامیده می‌شود.

تعریف ۱۴. [۵]، اگر (M, F) یک فضای فینسلری از بعد n باشد. انحنای ریمانی[3] در سوی[4] $y \in T_xM$ یک تبدیل خطی $\mathbf{R}_y: T_xM \to T_xM$ است.

تعریف ۱۵. [۵]، اگر $\{b_i\}_{i=1}^n$ یک پایهٔ دلخواه برای T_xM و $u = u^kb_k \in T_xM$،

$$\left(R^i{}_k(y) = 2\frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^j\frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} + 2G^j\frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{\partial G^i}{\partial y^k}\right), \begin{cases} \mathbf{R}_y: T_xM \to T_xM \\ \mathbf{R}_y(u) = R^i{}_k(y)u^kb_i \end{cases}$$

باشند آن‌گاه انحنای ریچی را $\mathbf{Ric}(y) = \sum_{i=1}^n R^i{}_j(y)$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۶. [۵]، اگر $P \subset T_xM$ یک صفحه مماس و $y \in P - \{0\}$ یک بردار باشد:

$$\mathbf{K}(P, y) = \frac{g_y\big(\mathbf{R}_y(u), u\big)}{g_y(y, y)g_y(u, u) - g_y(y, u)g_y(y, u)}$$

را انحنای پرچمی می‌نامیم (شکل ۲). اگر انحنای پرچمی $\mathbf{K}(y, P)$ یک مقدار ثابت باشد، می‌گوییم F انحنای پرچمی ثابت دارد (ص۳۱۱ [۲] را ببینید).

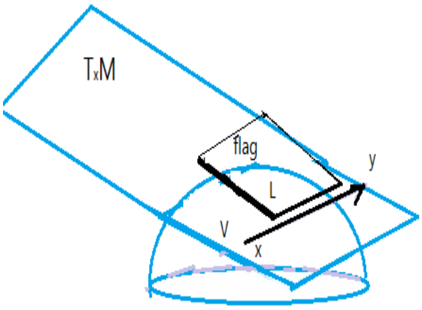
قضیهٔ ۱۷. (قضیهٔ اکبر-زاده)[۵]، *فرض کنیم (M, F) یک منیفلد فینسلری فشرده، همبند و بدون مرز با انحنای پرچمی ثابت λ باشد.*

الف) اگر $\lambda < 0$، آن‌گاه (M, F) ریمانی است.

1. Geodesic coefficients
2. Spray
3. Riemann curvature
4. direction

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.7.8]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.261]

ب) اگر $\lambda = 0$*، آن‌گاه* (M, F) *تخت (موضعاً مینکوفسکی) است.*



شکل ۲.

تعریف ۱۸. (**منیفلدهای فینسلری تخت**) منیفلد فینسلری (M, F)، موضعاً تخت (یا موضعاً مینکوفسکی[1]) نامیده می‌شود اگر در هر نقطه $p \in M$ یک دستگاه مختصات موضعی $(x^1, \cdots, x^n) = (x^i): U \to \mathbb{R}^n$ در M موجود باشد، به‌طوری‌که $\begin{cases} F: \pi^{-1}(U) \to [0, \infty) \\ (x, y) \mapsto F(x, y) \end{cases}$ مستقل از x باشد.

قضیهٔ ۱۹. *الف) منیفلد ریمانی* (M, α) *موضعاً تخت است اگر وتنها اگر* $\boldsymbol{K} = 0$.

ب) اگر منیفلد فینسلری (M, F) *تخت باشد، آن‌گاه* $\boldsymbol{K} = 0$.

برهان: *الف) می دانیم یک خمینه ریمانی، موضعاً تخت است اگر و تنها اگر موضعا اقلیدسی باشد و این یعنی اگر و تنها اگر انحنای برشی آن مساوی صفر باشد.*

ب) اگر منیفلد فینسلری تخت (موضعاً مینکوفسکی) باشد، بنا به تعریف ۱۸ F *مستقل از* x *است و بنا به تعریف* ۱۶ وقتی انحنای پرچمی $\mathbf{K}(y, P)$ یک مقدار ثابت باشد، می‌گوییم F انحنای پرچمی ثابت دارد که این‌جا صفر است، یعنی $g_y\big(\mathbf{R}_y(u), u\big) = 0$ پس $\big(\mathbf{R}_y(u), u\big) = 0$ و این ایجاب می‌کند که $\mathbf{R}_y(u) = 0$، یعنی انحنای ریچی صفر است.

ماتریس‌ها و ساخت گروه‌های بیبرباخ با متر راندرز

نرم اقلیدسی روی $\mathbb{R}^n$ را با $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ، $\|x\| = \sqrt{{x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2}$ در نظر می‌گیریم، دوتایی $(\mathbb{R}^n, \|\ \ \|)$ فضای اقلیدسی n-بعدی نامیده می‌شود. ضرب داخلی روی $\mathbb{R}^n$ را با نماد $\langle\,,\rangle$ نشان داده، و با کمک آن نرم راندرز را روی $\mathbb{R}^n$ بدین‌صورت تعریف می کنیم:

$$\begin{cases} F_v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ F_v(x) = \|x\| + \langle x, v\rangle \end{cases}$$

شبه متر[2] حاصل از این نرم روی $\mathbb{R}^n$ عبارت است از:

$$\begin{cases} d_v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ d_v(x, y) = F_v(x - y) = \|x - y\| + \langle x - y, v\rangle \end{cases}$$

ساختار توپولوژی استانده حاصل از این متر، یعنی توپولوژی تولیدی به‌وسیلهٔ گوی‌های باز

$$U(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d_v(x, y) < \delta\} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid F_v(x - y) < \delta\}$$

را روی $\mathbb{R}^n$ اساس بررسی قرار می‌دهیم. برای یافتن گروه‌های بیبرباخ احتمالی در این فضا نیاز به زیرگروه‌های گسسته حاصل از ایزومتری‌های متر d_v داریم.

1. Locally Minkowski
2. Quasi- metric

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.7.8]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.261]

لم ۲۰. ایزومتری‌های متر d_v به‌صورت $\begin{cases}\phi(x) = Ax + b\\ Av = v\end{cases}$ ظاهر می‌شوند.

برهان: خاصیت ایزومتری در این فضا برای یک تبدیل دلخواه $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ معادل است با:
$d_v\left(\phi(x), \phi(y)\right) = d_v(x, y)$ این موضوع بنا به قضیهٔ مازور- اولام[1] (ر.ک. [۹]) ایجاب می‌کند، $\begin{cases}\phi(x) = Ax + b\\ Av = v\end{cases}$، که در آن $A \in O(n) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) | AA^T = I\}, b \in \mathbb{R}^2$ باشد و بلعکس.

برهان قضیهٔ ۱. ساختار دقیق ماتریس‌های A : (حالت کلی $\mathbb{R}^n$ که در این مرحله حالت $n = 2$ مدنظر است). برای برقراری شرط ایزومتری که در بالا مطرح شد داریم:

$$\begin{cases} d\left(\phi(X), \phi(Y)\right) = d(X, Y) \to \left\|\phi(X) - \phi(Y)\right\| + \langle v, \phi(X) - \phi(Y)\rangle = \|X - Y\| + \langle v, X - Y\rangle \\ \\ d\left(\phi(Y), \phi(X)\right) = d(Y, X) \to \left\|\phi(Y) - \phi(X)\right\| - \langle v, \phi(X) - \phi(Y)\rangle = \|X - Y\| - \langle v, X - Y\rangle \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} \left\|\phi(X) - \phi(Y)\right\| = \|X - Y\| \to \phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{E}^n) = O(n) \ltimes \mathbb{R}^n \to \phi(x) = Ax + b, A \in O(n) \\ \langle v, \phi(X) - \phi(Y)\rangle = \langle v, X - Y\rangle \end{cases}$$

برقراری دومین شرط را با شرطی معادل که از محاسبات بالا به‌دست می‌آید، بررسی می‌کنیم و سپس $n = 2$ فرض می‌شود :

$$\langle v, X - Y\rangle = \langle v, AX - AY\rangle \leftrightarrow \langle v, AX\rangle = \langle v, X\rangle \leftrightarrow \langle A^T v, X\rangle = \langle v, X\rangle \leftrightarrow A^T v = v \leftrightarrow Av = v$$

که آخرین شرط با توجه به ساختار گروه ها در ستون آخر جدول ۱ ایجاب می‌کند که تنها گروه بیبرباخ حاصل از این گروه‌ها در صورت آزاد بودن بردار v ، همان تبدیل همانی باشد که فضای خارج قسمتی‌اش چنبره است. اما اگر $v = 0$ آن‌گاه متر فینسلری ریمانی بوده و گروه بیبرباخ بعدی به تقریب ایزومتری، فضای خارج قسمتی‌اش بطری کلاین می‌شود.

$$A \in O(2), v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \to \begin{cases} A \in SO(2) \to A = I_2 \\ A \notin SO(2) \to \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \end{cases}$$

(این نتایج از تعریف ماتریس‌های متعامد به‌دست آمده است.)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \to \begin{cases} av_1 + bv_2 = v_1 \\ bv_1 - av_2 = v_2 \end{cases} \to (1 - a)v_1 = bv_2$$

که این شرایط زمانی برآورده می‌شود که بردار v در راستای محور افقی یعنی به‌صورت $\begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ یا موازی محور عمودی یعنی $\begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \end{bmatrix}$ باشد تا به‌ترتیب از ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ یا $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ بتوان استفاده کرد. که البته با توجه به جدول ۱ گروه تولیدی این دو ماتریس تابدار است و نمی‌تواند بیبرباخ شود .

اکنون فضای سه‌بعدی: شرط ایزومتری بودن، ساختار ماتریس A را که 3×3 است به یکی از صورت‌های جدول ۲ تبدیل می‌کند[۷]:

آن‌چه از جدول ۲ و محاسبات موجود در آن حاصل می‌شود آن است که: برای حفظ ده گروه بیبر باخ لازم است تا بردار $v = 0$ باشد یعنی متر فینسلری ریمانی شود. زیرا در تعریف متر راندرز سازندهٔ هندسهٔ فضا، اگر $v \neq 0$ تعداد گروه‌های بیبرباخ کم‌تر از ده خواهد بود. چون هر گروه بیبرباخ موجود در جدول ۲ بخواهد ظاهر شود شرطی بر مؤلفه‌های v تحمیل می‌کند، برای نمونه در ردیف دوم ماتریس سازنده گروه بدون تاب مورد نظر بردار $v = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ را

1. Mazur – Ulam theorem

بدون تغییر حفظ می‌کند. در ردیف سوم بردار $v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$ با شرایط مورد نظر سازگار است. در ردیف چهارم بردار $v = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ c \end{bmatrix}$ قابل استفاده است؛ در حالی‌که در ردیف نهم باید $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ باشد که دو ماتریس سازنده گروه آن را حفظ کنند . پس برآورده شدن همهٔ آنها یعنی بردار $v = 0$.

پس هر *خمینه فینسلری تخت، یک خمینه ریمانی تخت است*. از سوی دیگر تنها ماتریس A که بتواند هر بردار دلخواه v را حفظ کند ماتریس همانی است. یعنی بند ب) قضیهٔ ۱ به اثبات رسید که: اگر v دلخواه باشد تنها گروه بیبرباخ چنبره است.

جدول ۲

زیرگروه	نمایش زیرگروه	زیرگروه ایزومتری $E(3)$ به پیمانه یک‌ریختی؛ تابدار یا بدون تاب
$1)G_1$	$\{I\}$	$\Gamma_1 = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & na \\ 0 & 1 & 0 & nb \\ 0 & 0 & 1 & nc \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ بدون تاب ؛
$2)G_2$	$\left\{I_{(3)}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$	$\Gamma_2 = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{(2n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 1 & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 & n \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ برقراری شرط $Av = v$ ایجاب می کند $v = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ بدون تاب؛ $(a \in \mathbb{R})$
$3)G_3$	$\left\{I_{(3)}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}$	$\Gamma_3 = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2n-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2n-1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ شرط $Av = v$ ایجاب می کند $v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$ بدون تاب؛ $(a, b \in \mathbb{R})$
$4)G_4$	$\left\{I_{(3)}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}$	$\Gamma_4 = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2n-1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ شرط $Av = v$ ایجاب می کند $v = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ c \end{bmatrix}$ بدون تاب؛ $(a, c \in \mathbb{R})$
$5)G_3, G_4 \leq G_5$	$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, I_{(3)}\right\}$	$\Gamma_5 = \left\langle\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right\rangle$ برقراری شرط $\begin{cases} A_1 v = v \\ A_2 v = v \end{cases}$ ایجاب می کند $v = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ بدون تاب؛ $(a \in \mathbb{R})$
$6)G_6$	$\left\{I_{(3)}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right\}$	$\Gamma_6 = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{(3n-2)}{3} \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{(3n-1)}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid n \in \square\right\}$ برقراری شرط $\begin{cases} A_1 v = v \\ A_2 v = v \end{cases}$ ایجاب می کند $v = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ بدون تاب و $(a \in \square)$
$7)G_4 \leq G_7$	$\left\{I_{(3)}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$	$\Gamma_7 = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{(4n-3)}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{(4n-2)}{4} \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{(4n-1)}{4} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid n \in \square\right\}$ برقراری شرط $\begin{cases} A_1 v = v \\ A_2 v = v \end{cases}$ ایجاب می کند $v = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ بدون تاب $(a \in \square)$

$8)G_8$	$\left\{ I_{(3)}, \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&-1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&1\end{bmatrix} \right\}$	$\Gamma_8 = \left\{ \left(\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{(6n-5)}{6}\\0&1&-1&1\\0&1&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0&\frac{(6n-4)}{6}\\0&0&-1&1\\0&1&-1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}, , \begin{bmatrix}1&0&0&\frac{(6n-3)}{6}\\0&-1&0&0\\0&0&-1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0&\frac{(6n-2)}{6}\\0&-1&1&-1\\0&-1&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix} , \begin{bmatrix}1&0&0&\frac{(6n-1)}{6}\\0&0&1&-1\\0&-1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0&n\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \middle\| n \in \square \right) \right\}$ ($a \in \square$) بدون تاب $v = \begin{bmatrix}a\\0\\0\end{bmatrix}$ ایجاب می کند $Av = v$ برقراری شرط
$9)G_9$	$\left\{ I_{(3)}, \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix} , \begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix} , \begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \right\}$	$\Gamma_9 = \langle \left\{ \begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&\frac{1}{2}\\0&0&-1&\frac{1}{2}\\0&0&0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}\\0&-1&0&\frac{1}{2}\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \right\} \rangle$ ؛ بدون تاب $v = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ ایجاب می کند $\begin{cases}A_1 v = v\\A_2 v = v\end{cases}$ برقراری شرط
$10)G_{10}$	$\left\{ I_{(3)}, \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix} \right\}$	$\Gamma_{10} = \langle \left\{ \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&1\\0&0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}\\0&-1&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \right\} \rangle$ ($a \in \square$) ؛ بدون تاب $v = \begin{bmatrix}a\\0\\0\end{bmatrix}$ ایجاب می کند $\begin{cases}A_1 v = v\\A_2 v = v\end{cases}$ برقراری شرط

منابع

۱. بیدآباد بهروز، "هندسه منیفلد۲"، انتشارات دانشگاه امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)، چاپ دوم (بهار ۱۳۹۴).

2. Bao D., Chern S. S., Shen Z., "An Introduction to Riemann-Finsler Geometry", Springer-Verlage, New York, Inc. (2000).

3. Bieberbach L., "Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume II: Die Gruppen mit einem endlichen Fundamentalbereich", Mathematische Annalen, 72 (3) (1912) 400-412.

4. Charlap Leonard S., "Bieberbach Groups and Flat Manifolds", Springer-Verlag New York Inc. (1986).

5. Shen Z., "Lectures on Finsler Geometry", World Scientific Publishers (2001).

6. Shen Z., Mo X., Yang Ch., "Some constructions of projectively flat Finsler metrics Science" China in, 49 (5) (2006) 703-714.

7. Szczepa\'nski, "Geometry of crystallographic group". Singapore, World Scientific Publshing, (2012).

8. Wolf J.," Spaces of Constant Curvature", 6th ed, AMS Chelsea publishing (2010).

9. Mazur S., Ulam S.,"Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriel normés", C.R. Acad. Sci. Paris, 194 (1932) 946-948.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.7.8]

[DOI: 10.52547/mmr.6.2.261]