انرژی لاپلاسین در گراف‌ها

حمیده آرام*[۱]، رعنا خوئیلر[۲]، نسرین ده‌گردی[۳]

۱. گروه ریاضی ، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خوی، مرکز قره ضیاالدین، خوی، ایران

۲. دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، دانشکدهٔ علوم، گروه ریاضی

۳. دانشگاه صنعتی سیرجان، گروه ریاضی و علوم کامپیوتر

دریافت ۹۶/۱۰/۰۵ پذیرش ۹۸/۰۴/۲۶

چکیده

فرض کنید G گرافی از مرتبهٔ n و اندازه m باشد. اگر $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n = 0$ مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین باشند، آن‌گاه انرژی لاپلاسین گراف G به‌صورت

$$LE(G) = \sum_{i=1}^{n} \left| \mu_i - \frac{2m}{n} \right|,$$

معرفی می‌شود. در این مقاله بررسی انرژی لاپلاسین در گراف‌ها را ادامه می‌دهیم و کران‌های جدیدی برای انرژی لاپلاسین در گراف‌ها به‌دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: ماتریس لاپلاسین، مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین، انرژی لاپلاسین.

مقدمه

در این مقاله G گرافی با مجموعه رئوس $V = V(G)$ و مجموعه یال‌های $E = E(G)$ است. مرتبهٔ گراف G را با نماد $n = |V|$ و اندازه گراف G را با نماد $m = |E|$ نشان می‌دهیم. برای رأس v، مجموعه رئوسی که با رأس v مجاورند همسایگی باز رأس v نامیده شده و با نماد $\mathrm{N_G}(v) = \mathrm{N}(v)$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین همسایگی بسته رأس v به‌صورت $\mathrm{N_G}[v] = N[v] = N(v) \cup \{v\}$ تعریف می‌کنیم. درجهٔ رأس v با $d_G(v) = |N(v)|$ برابر است. هم‌چنین کمینهٔ درجه و بیشینهٔ درجه را به‌ترتیب با نمادهای δ و Δ نشان می‌دهیم. منظور از $\mathrm{K_n}$ گراف کامل n رأسی است (برای اطلاع بیش‌تر به [۱] مراجعه شود).

ماتریس قطری $D(G)$ ماتریس مربعی است که عناصر قطر اصلی آن درجه‌های رئوس گراف و بقیه عناصر صفر است. ماتریس $L(G) = D(G) - A(G)$ ماتریس لاپلاسین گراف G نامیده می‌شود که $A(G)$ ماتریس مجاورت گراف G است. چون $L(G)$ ماتریس متقارن و حقیقی است مقادیر ویژه آن نیز اعداد حقیقی است. فرض کنید $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n = 0$ مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین باشند. گوتمن و همکاران (۲۰۰۶)، انرژی لاپلاسین در گراف G را بدین‌صورت معرفی کردند [۵]:

*نویسنده مسئول hamideh.aram@gmail.com

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.3.8]

[DOI: 10.52547/mmr.6.4.501]

$$LE(G)=\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i|,$$

که $\gamma_i=\mu_i-\frac{2m}{n}$ برای $i=1,\dots,n$ [۳]، [۴]، [۶]، [۸]، [۹].

مشاهدهٔ ۱. *[6]* فرض کنید G گرافی از مرتبهٔ n و اندازه m باشد. اگر $V(G)=\{v_1,\dots,v_n\}$، آن‌گاه

الف) $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i=0$.

ب) اگر $M=m+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(d(v_i)-\frac{2m}{n}\right)^2$، آن‌گاه $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^2=2M$.

ج) $D=\prod_{i=1}^{n}\gamma_i=\det\left(L(G)-\frac{2m}{n}I_n\right)$.

د) اگر $m\geq 1$، آن‌گاه $\gamma_1=\mu_1-\frac{2m}{n}\geq 1$.

با استفاده از مشاهدهٔ ۱، داریم:

مشاهدهٔ ۲. فرض کنید G گرافی از مرتبهٔ n و اندازه m و $\bar{G}$ مکمل گراف G باشد. اگر $\bar{\mu}_1\geq\bar{\mu}_2\geq\cdots\geq\bar{\mu}_n=0$ مقادیر ویژه $\bar{G}$ است به‌طوری‌که $\bar{\gamma}_i=\bar{\mu}_i-\frac{2m}{n}$ و $LE(\bar{G})=\sum_{i=1}^{n}|\bar{\gamma}_i|$ ، آن‌گاه

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{\gamma}_i^2=2\bar{M},$$

که

$$\bar{M}=M+\frac{n(n-1)}{2}-2m.$$

در این مقاله از این نتایج مفید استفاده می‌کنیم:

گزارهٔ ۳. [۷]، فرض کنید $x_1,\dots,x_N$ اعداد حقیقی نامنفی باشند به‌طوری‌که $\alpha=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$ و $\gamma=\left(\prod_{i=1}^{N}x_i\right)^{\frac{1}{N}}$ در این‌صورت

$$\alpha-\gamma\geq\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i<j}\left(\sqrt{x_i}-\sqrt{x_j}\right)^2,$$

و

$$\alpha-\gamma\leq\frac{1}{N}\sum_{i<j}\left(\sqrt{x_i}-\sqrt{x_j}\right)^2,$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $x_1=\cdots=x_N$.

گزارهٔ ۴. [۲]، فرض کنید $a_1,\dots,a_n$ و $b_1,\dots,b_n$ اعداد حقیقی نامنفی باشند. اگر $p>1$، آن‌گاه

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}{a_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}{b_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

در این مقاله بررسی انرژی لاپلاسین در گراف‌ها را ادامه می‌دهیم و کران‌های جدیدی برای انرژی لاپلاسین در گراف‌ها به‌دست می‌آوریم.

نتایج اصلی

گزارهٔ ۵. فرض کنید G گرافی از مرتبهٔ n است، n_- تعداد مقادیر ویژه منفی و n_+ تعداد مقادیر ویژه مثبت آن باشد. بنابراین به‌ازای $1 \leq r \leq n$،

$$-\sqrt{\frac{2M(r-1)}{n(n-r+1)}} \leq \gamma_r \leq \sqrt{\frac{2M(n-r)}{nr}},$$

که در آن $M = 2m + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(d(v_i) - \frac{2m}{n}\right)^2$.

اثبات: ابتدا سمت راست نامساوی را اثبات می‌کنیم. واضح است که این نامساوی به‌ازای $\gamma_r \leq 0$ برقرار است، پس فرض کنید $\gamma_r > 0$ می‌دانیم

$$\gamma_r^2 = 2M - \sum_{i\neq r,\gamma_i>0}^{n}\gamma_i^2 - \sum_{\gamma_i<0}^{n}\gamma_i^2.$$

زیرا $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i = 0$، بنابراین عبارت

$$2M - \sum_{i\neq r,\gamma_i>0}^{n}\gamma_i^2 - \sum_{\gamma_i<0}^{n}\gamma_i^2,$$

زمانی بیشینهٔ مقدار را دارد که $\gamma_1 = \cdots = \gamma_{r-1} = \gamma_r$ و به‌ازای $\gamma_t < 0$، $\gamma_t = \frac{-r\gamma_r}{n_-}$. بنابراین

$$\gamma_r \leq \sqrt{\frac{2Mn_-}{r(n_-+r)}}.$$

زیرا $n_- \leq n - r$، داریم

$$\gamma_r \leq \sqrt{\frac{2M(n-r)}{nr}}.$$

سمت چپ نامساوی به‌ازای $\gamma_r \geq 0$ برقرار است، پس فرض کنید $\gamma_r < 0$ داریم $\gamma_r^2 = 2M - \sum_{i\neq r,\gamma_i>0}^{n}\gamma_i^2 - \sum_{\gamma_i<0}^{n}\gamma_i^2$،
به طریق مشابه داریم $\gamma_r^2 \leq \frac{2Mn_+}{(n-r+1)(n-r+n_++1)}$. به‌دلیل این‌که $\gamma_r < 0$، داریم $\gamma_r \geq -\sqrt{\frac{2Mn_+}{(n-r+1)(n-r+n_++1)}}$. از طرف دیگر، زیرا $n_+ \leq r - 1$ داریم:

$$\gamma_r \geq -\sqrt{\frac{2M(r-1)}{n(n-r+1)}}.$$

قضیهٔ ۶. فرض کنید G گرافی از مرتبهٔ n باشد. در این‌صورت

$$LE(G) > \sqrt{2M + n(n-1)(|D|)^{\frac{2}{n}} + \frac{8m}{n(n+1)(n-2)}(1 - \left(\frac{2M}{n}\right)^{\frac{1}{4}})^2}.$$

اثبات: بنابر گزارهٔ ۳، داریم $\sum_{i=1}^{N}x_i \geq N(\prod_{i=1}^{N}x_i)^{\frac{1}{N}} + \frac{1}{N-1}\sum_{i<j}\left(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j}\right)^2$. با جای‌گذاری $N = \frac{n(n-1)}{2}$ و $(x_1,\cdots,x_N) = (|\gamma_1||\gamma_2|,\cdots,|\gamma_{n-1}||\gamma_n|)$ داریم

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.3.8]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.501]

$$\sum_{1\le i<j\le n}^{n}|\gamma_i||\gamma_j| \ge \frac{n(n-1)}{2}\left(\prod_{i=1}^{N}|\gamma_i|\right)^{\frac{2}{n}}$$
$$+\frac{2}{(n+1)(n-2)}\sum_{i<j\le k<l}^{n}\left(\sqrt{|\gamma_i||\gamma_j|}-\sqrt{|\gamma_k||\gamma_l|}\right)^2.$$

بنابراین

$$2\sum_{1\le i<j\le n}^{n}|\gamma_i||\gamma_j| \ge n(n-1)\left(\prod_{i=1}^{N}|\gamma_i|\right)^{\frac{2}{n}}+\frac{4}{(n+1)(n-2)}\sum_{i<j\le k<l}\left(\sqrt{|\gamma_i||\gamma_j|}-\right.$$
$$\gamma k\gamma l2.$$

طبق گزارهٔ ۵، به‌ترتیب به‌ازای n زوج و فرد داریم، $\gamma_{\frac{n+1}{2}} \le \sqrt{\frac{2M(n-1)}{n(n+1)}} < \sqrt{\frac{2M}{n}}$ و $\gamma_{\frac{n}{2}} \le \sqrt{\frac{2M}{n}}$. در نتیجه $\gamma_{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil} \le \sqrt{\frac{2M}{n}}$. می‌دانیم $\gamma_1 \ge 1$ و $\gamma_n = \frac{-2m}{n}$. بنابراین

$$\sum_{i<j\le k<l}\left(\sqrt{|\gamma_i||\gamma_j|}-\sqrt{|\gamma_k||\gamma_l|}\right)^2$$
$$\ge \sum_{i<j\le k<l,(i,j)\ne(1,n),(k,l)\ne\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil,n\right)}\left(\sqrt{|\gamma_i||\gamma_j|}-\sqrt{|\gamma_k||\gamma_l|}\right)^2$$
$$+\left(\sqrt{|\gamma_1||\gamma_n|}-\sqrt{\left|\gamma_{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}\right||\gamma_n|}\right)^2$$
$$>|\gamma_n|\left(\sqrt{|\gamma_1|}-\sqrt{\left|\gamma_{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}\right|}\right)^2$$
$$\ge \frac{2m}{n}\left(1-\left(\frac{2M}{n}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2.$$

در نتیجه

$$2\sum_{1\le i<j\le n}^{N}|\gamma_i||\gamma_j| \ge n(n-1)\,(|D|)^{\frac{2}{n}}+\frac{8m}{n(n+1)(n-2)}\left(1-\left(\frac{2M}{n}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2.$$

با افزودن $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^2 = 2M$ به دو طرف نامساوی مذکور داریم:

$$LE(G)^2 > 2M + n(n-1)(|D|)^{\frac{2}{n}}+\frac{8m}{n(n+1)(n-2)}\left(1-\left(\frac{2M}{n}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2.$$

قضیهٔ ۷. فرض کنید G گراف هم‌بند از اندازهٔ $n \ge 2$ و از سایز m باشد. در این‌صورت

$$LE(G) \le 2M - \ln|D|. \qquad (۱)$$

تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $G = K_2$.

اثبات: فرض کنید $f(x) = x^2 - x - \ln x$. به‌وضوح $f(x)$ به‌ازای $x \geq 1$ صعودی و به‌ازای $0 < x \leq 1$ نزولی است. بنابراین $x \leq x^2 - \ln x$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $x = 1$.

$$LE(G) = \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\gamma_i^2 - \ln|\gamma_i^2|\right) = 2M - \ln \prod_{i=1}^{n} |\gamma_i| = 2M - \ln|D|$$

حال فرض کنید که حالت تساوی در نامساوی (۱) اتفاق بیفتد. در این‌صورت تمام نامساوی‌های محاسبات مذکور به‌صورت تساوی برقرار است. پس

$$|\gamma_1| = |\gamma_2| = \cdots = |\gamma_n| = 1$$

در این‌صورت $\frac{2m}{n} = 1$ و $n = 2$. در نتیجه $G = K_2$.

قضیهٔ ۸.

$$LE(G) + LE(\bar{G}) \leq n(n-1) - 4m + 4M - \ln|D| - \ln|\bar{D}|.$$

اثبات: بنابر قضیه 7 داریم

$$LE(G) + LE(\bar{G}) \leq 2M - \ln|D| + 2\bar{M} - \ln|\bar{D}| = n(n-1) - 4m + 4M - \ln|D| - \ln|\bar{D}|.$$

قضیهٔ ۹. فرض کنید G گراف هم‌بند از اندازه $n \geq 2$ و از سایز m باشد. در این‌صورت

$$LE(G) \leq 2M + \frac{2m}{n} - \frac{4m^2}{n^2} - \ln|D| + \ln\frac{2m}{n}.$$

اثبات: بنابر اثبات قضیهٔ ۷، داریم:

$$LE(G) = |\gamma_n| + \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| \leq |\gamma_n| + \sum_{i=1}^{n-1} (\gamma_i^2 - \ln|\gamma_i|) = |\gamma_n| + 2M - \ln\prod_{i=1}^{n} |\gamma_i| + \ln|\gamma_n| = 2M + \frac{2m}{n} - \frac{4m^2}{n^2} - \ln|D| + \ln\frac{2m}{n}.$$

قضیهٔ ۱۰.

$$\begin{aligned} LE(G) + LE(\bar{G}) \leq\ & n - 1 + 2n(n-1) - 8m + 4M \\ & + \ln(2mn(n-1) - 4m^2) - 2\ln n - \frac{8m^2}{n^2} - (n-1)^2 \\ & + \frac{4m(n-1)}{n} \ln|D| - \ln|\bar{D}|. \end{aligned}$$

اثبات: طبق قضیهٔ ۹، داریم

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.3.8]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.501]

$$
\begin{aligned}
&LE(G)+LE(\bar{G})\\
&\le 2M+\frac{2m}{n}-\frac{4m^2}{n^2}-\ln|D|+\ln\frac{2m}{n}+2\bar{M}+\frac{2\bar{m}}{n}-\frac{4\bar{m}^2}{n^2}-\ln|\bar{D}|\\
&+\ln\frac{2\bar{m}}{n}\\
&=n-1+2n(n-1)-8m+4M+\ln(2mn(n-1)-4m^2)-2\ln n\\
&-\frac{8m^2}{n^2}-(n-1)^2+\frac{4m(n-1)}{n}\ln|D|-\ln|\bar{D}|.
\end{aligned}
$$

قضیهٔ ۱۱.

$$LE(G)+LE(\bar{G})\le n(n-1)-4m+4M+2\sqrt{2n(n-1)M-8mM+4M^2}.$$

اثبات: با استناد به گزارهٔ ۴، داریم:

$$(\sum_{i=1}^{n}(|\gamma_i|+|\bar{\gamma}_i|)^2)^{\frac{1}{2}}\le(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^2)^{\frac{1}{2}}+\le(\sum_{i=1}^{n}\bar{\gamma}_i^2)^{\frac{1}{2}}.$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(|\gamma_i|+|\bar{\gamma}_i|)^2&\le\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^2+\sum_{i=1}^{n}\bar{\gamma}_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^2\sum_{i=1}^{n}\bar{\gamma}_i^2}=2M+2\bar{M}+2\sqrt{4M\bar{M}}\\
&=n(n-1)-4m+4M+2\sqrt{2n(n-1)M-8mM+4M^2}.
\end{aligned}
$$

قضیهٔ ۱۲.

$$
\begin{aligned}
&LE(G)+LE(\bar{G})\ \le n-1+\\
&\big[n(n-1)-4m+4M-2+
\end{aligned}
$$

22nn−1M−8mM+4M2−nn−1+4m−4M+112.

اثبات: با استناد به گزارهٔ ۴ ، داریم

$$(\sum_{i=2}^{n}(|\gamma_i|+|\bar{\gamma}_i|)^2)^{\frac{1}{2}}\le(\sum_{i=2}^{n}\gamma_i^2)^{\frac{1}{2}}+\le(\sum_{i=2}^{n}\bar{\gamma}_i^2)^{\frac{1}{2}}.$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{n}(|\gamma_i|+|\bar{\gamma}_i|)^2&\le\sum_{i=2}^{n}\gamma_i^2+\sum_{i=2}^{n}\bar{\gamma}_i^2+2\sqrt{\sum_{i=2}^{n}\gamma_i^2\sum_{i=2}^{n}\bar{\gamma}_i^2}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^2-\gamma_1^2+\sum_{i=1}^{n}\bar{\gamma}_i^2-\bar{\gamma}_1^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\gamma_i^2-\gamma_1^2)\sum_{i=1}^{n}(\bar{\gamma}_i^2-\bar{\gamma}_1^2)}\\
&\le 2M-1+2\bar{M}-1+2\sqrt{(2M-1)(2\bar{M}-1)}
\end{aligned}
$$

$$= n(n-1) - 4m + 4M - 2 + 2\sqrt{2n(n-1)M - 8mM + 4M^2 - n(n-1) + 4m - 4M + 1}.$$

می‌دانیم $\gamma_1 \leq \Delta + \delta - \frac{2m}{n}$. با استفاده از نامساوی کوشی شوارتز داریم:

$$LE(G) + LE(\bar{G}) = |\gamma_1| + |\bar{\gamma}_1| + \sum_{i=2}^{n}(|\gamma_i| + |\bar{\gamma}_i|)$$

$$\leq |\gamma_1| + |\bar{\gamma}_1| + \sqrt{(n-1)\sum_{i=2}^{n}(|\gamma_i| + |\bar{\gamma}_i|)^2}$$

$$\leq \Delta + \delta - \frac{2m}{n} + n - 1 - \Delta + n - 1 - \delta - \frac{2\bar{m}}{n} + \sqrt{(n-1)\sum_{i=2}^{n}(|\gamma_i| + |\bar{\gamma}_i|)^2}$$

$$= n - 1 + \sqrt{(n-1)\sum_{i=2}^{n}(|\gamma_i| + |\bar{\gamma}_i|)^2}$$

$$\leq n - 1 + \left[n(n-1) - 4m + 4M - 2 + 2\sqrt{2n(n-1)M - 8mM + 4M^2 - n(n-1) + 4m - 4M + 1}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

منابع

1. West D. B., "Introduction to Graph Theory", Prentice-Hall, Inc (2000).

2. Dragomir S. S., "A survey on Cauchy-Bunyakoviski-Schwarz type discrete inequalities", J. Inequ. Pure Appl. Math. 4 (2003) 63.

3. Grone R., Merris R., "The Laplacian spectrum of a graph II", SIAM J. Discrete Math. 7 (1994) 221-229.

4. Grone R., Merris R., Sunder V. S., "The Laplacian spectrum of a graph", SIAM J. Matrix Anal. Appl. 11 (1990) 218-238.

5. Guman I., Zhou B., "Laplacian energy of a graph", Linear Algebra Appl. 414 (2006) 29-37.

6. Guman I., Zhou B., "On laplacian energy of graphs, MATCH Commun", Math. Comput. Chem. 57 (2007) 211-220.

7. Kober H., "On the arithmatic and geometric means and the Holder inequality", Pro. Am. Math. Soc. 59 (1958) 452-459.

8. Zhang X. D., Li J. S., "The Laplacian spectrum of mixed graphs, Linear Algeb", Appl. 351 (2002) 11-20.

9. Zhang X. D., Li J. S., "A note on the Laplacian eigenvalues", J. Math. Research Exposition, 24 (2) (2004) 388-390.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.3.8]

[DOI: 10.52547/mmr.6.4.501]