

انرژی لاپلاسیان در گراف‌ها

حمیده آرام^{*}، رعنا خوئیلر^۲، نسرين ده‌گردی^۳

۱. گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خوی، مرکز قره ضیاءالدین، خوی، ایران

۲. دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، دانشکده علوم، گروه ریاضی

۳. دانشگاه صنعتی سیرجان، گروه ریاضی و علوم کامپیوتر

پذیرش ۹۸/۰۴/۲۶

دریافت ۹۶/۱۰/۰۵

چکیده

فرض کنید G گرافی از مرتبه n و اندازه m باشد. اگر $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n = 0$ مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسیان باشند، آن‌گاه انرژی لاپلاسیان گراف G به صورت

$$LE(G) = \sum_{i=1}^n \left| \mu_i - \frac{2m}{n} \right|,$$

معرفی می‌شود. در این مقاله بررسی انرژی لاپلاسیان در گراف‌ها را ادامه می‌دهیم و کران‌های جدیدی برای انرژی لاپلاسیان در گراف‌ها به دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: ماتریس لاپلاسیان، مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسیان، انرژی لاپلاسیان.

مقدمه

در این مقاله G گرافی با مجموعه رئوس $V = V(G)$ و مجموعه یال‌های $E = E(G)$ است. مرتبه گراف G را با $n = |V|$ و اندازه گراف G را با $m = |E|$ نشان می‌دهیم. برای رأس v ، مجموعه رئوسی که با رأس v مجاورند همسایگی باز رأس v نامیده شده و با نماد $N_G(v) = N(v)$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین همسایگی بسته رأس v به صورت $N_G[v] = N[v] = N(v) \cup \{v\}$ تعریف می‌کنیم. درجه رأس v $d_G(v) = |N(v)|$ برابر است. هم‌چنین کمینه درجه و بیشینه درجه را به ترتیب با نمادهای δ و Δ نشان می‌دهیم. منظور از K_n گراف کامل n رأسی است (برای اطلاع بیشتر به [۱] مراجعه شود).

ماتریس قطری $D(G)$ ماتریس مربعی است که عناصر قطر اصلی آن درجه‌های رئوس گراف و بقیه عناصر صفر است. ماتریس $L(G) = D(G) - A(G)$ ماتریس لاپلاسیان گراف G نامیده می‌شود که $A(G)$ ماتریس مجاورت گراف G است. چون ماتریس متقارن و حقیقی است مقادیر ویژه آن نیز اعداد حقیقی است. فرض کنید $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n = 0$ مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسیان باشند. گوتمن و همکاران (۲۰۰۶)، انرژی لاپلاسیان در گراف G را بدین صورت معرفی کردند [۵]:

$$LE(G) = \sum_{i=1}^n |\gamma_i|,$$

که $\gamma_i = \mu_i - \frac{2m}{n}$ برای $i = 1, \dots, n$ [۳]، [۴]، [۶]، [۸]، [۹].

مشاهده ۱. [6] فرض کنید G گرافی از مرتبه n و اندازه m باشد. اگر $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ آن‌گاه

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i^2 = 2M \quad \text{آن‌گاه } M = m + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(d(v_i) - \frac{2m}{n} \right)^2 \quad (\text{ب})$$

$$D = \prod_{i=1}^n \gamma_i = \det \left(L(G) - \frac{2m}{n} I_n \right) \quad (\text{ج})$$

$$\gamma_1 = \mu_1 - \frac{2m}{n} \geq 1 \quad \text{آن‌گاه } m \geq 1 \quad (\text{د})$$

با استفاده از مشاهده ۱، داریم:

مشاهده ۲. فرض کنید G گرافی از مرتبه n و اندازه m و \bar{G} مکمل گراف G باشد. اگر $\bar{\mu}_1 \geq \bar{\mu}_2 \geq \dots \geq \bar{\mu}_n = 0$ مقادیر ویژه \bar{G} است به طوری که $\bar{\gamma}_i = \bar{\mu}_i - \frac{2m}{n}$ و $LE(\bar{G}) = \sum_{i=1}^n |\bar{\gamma}_i|$ ، آن‌گاه

$$\sum_{i=1}^n \bar{\gamma}_i^2 = 2\bar{M},$$

که

$$\bar{M} = M + \frac{n(n-1)}{2} - 2m.$$

در این مقاله از این نتایج مفید استفاده می‌کنیم:

گزاره ۳. [۷] فرض کنید اعداد حقیقی نامنفی باشند به طوری که $\alpha = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ و $\gamma = \left(\prod_{i=1}^N x_i \right)^{\frac{1}{N}}$ در این صورت

$$\alpha - \gamma \geq \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i < j} (\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j})^2,$$

و

$$\alpha - \gamma \leq \frac{1}{N} \sum_{i < j} (\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j})^2,$$

تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $x_1 = \dots = x_N$

گزاره ۴. [۲] فرض کنید a_1, \dots, a_n و b_1, \dots, b_n اعداد حقیقی نامنفی باشند. اگر $p > 1$ ، آن‌گاه

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

در این مقاله بررسی انرژی لاپلاسی در گراف‌ها را ادامه می‌دهیم و کران‌های جدیدی برای انرژی لاپلاسی در

گراف‌ها به دست می‌آوریم.

نتایج اصلی

گزاره ۵. فرض کنید G گرافی از مرتبه n است، n_- تعداد مقادیر ویژه منفی و n_+ تعداد مقادیر ویژه مثبت آن باشد. بنابراین به ازای $1 \leq r \leq n$.

$$-\sqrt{\frac{2M(r-1)}{n(n-r+1)}} \leq \gamma_r \leq \sqrt{\frac{2M(n-r)}{nr}},$$

$$M = 2m + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(d(v_i) - \frac{2m}{n} \right)^2$$

اثبات: ابتدا سمت راست نامساوی را اثبات می‌کنیم. واضح است که این نامساوی به ازای $\gamma_r \leq 0$ برقرار است، پس فرض کنید $\gamma_r > 0$ می‌دانیم

$$\gamma_r^2 = 2M - \sum_{i \neq r, \gamma_i > 0} \gamma_i^2 - \sum_{\gamma_i < 0} \gamma_i^2.$$

زیرا $\sum_{i=1}^n \gamma_i = 0$ بنابراین عبارت

$$2M - \sum_{i \neq r, \gamma_i > 0} \gamma_i^2 - \sum_{\gamma_i < 0} \gamma_i^2,$$

زمانی بیشینه مقدار را دارد که $\gamma_1 = \dots = \gamma_{r-1} = \gamma_r$ و به ازای $\gamma_t < 0$ ، $\gamma_t = \frac{-r\gamma_r}{n_-}$ بنابراین

$$\gamma_r \leq \sqrt{\frac{2Mn_-}{r(n_-+r)}}.$$

زیرا $n_- \leq n - r$ داریم

$$\gamma_r \leq \sqrt{\frac{2M(n-r)}{nr}}.$$

سمت چپ نامساوی به ازای $\gamma_r \geq 0$ برقرار است، پس فرض کنید $\gamma_r < 0$ داریم $\gamma_r^2 = 2M - \sum_{i \neq r, \gamma_i > 0} \gamma_i^2 - \sum_{\gamma_i < 0} \gamma_i^2$

به طریق مشابه داریم $\gamma_r^2 \leq \frac{2Mn_+}{(n-r+1)(n-r+n_++1)}$ به دلیل این که $\gamma_r < 0$ داریم $\gamma_r \geq -\sqrt{\frac{2Mn_+}{(n-r+1)(n-r+n_++1)}}$ از طرف دیگر، زیرا $n_+ \leq r - 1$ داریم:

$$\gamma_r \geq -\sqrt{\frac{2M(r-1)}{n(n-r+1)}}.$$

قضیه ۶. فرض کنید G گرافی از مرتبه n باشد. در این صورت

$$LE(G) > \sqrt{2M + n(n-1)(|D|)^{\frac{2}{n}} + \frac{8m}{n(n+1)(n-2)} \left(1 - \left(\frac{2M}{n}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}.$$

اثبات: بنابر گزاره ۳، داریم $\sum_{i < j} (\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j})^2 \geq \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N x_i \geq N \left(\prod_{i=1}^N x_i \right)^{\frac{1}{N}}$ با جای گذاری $(x_1, \dots, x_N) = (|\gamma_1| |\gamma_2|, \dots, |\gamma_{n-1}| |\gamma_n|)$ و $N = \frac{n(n-1)}{2}$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |\gamma_i| |\gamma_j| \geq \frac{n(n-1)}{2} \left(\prod_{i=1}^n |\gamma_i| \right)^{\frac{2}{n}} + \frac{2}{(n+1)(n-2)} \sum_{i < j \leq k < l} \left(\sqrt{|\gamma_i| |\gamma_j|} - \sqrt{|\gamma_k| |\gamma_l|} \right)^2.$$

بنابراین

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |\gamma_i| |\gamma_j| \geq n(n-1) \left(\prod_{i=1}^n |\gamma_i| \right)^{\frac{2}{n}} + \frac{4}{(n+1)(n-2)} \sum_{i < j \leq k < l} \left(\sqrt{|\gamma_i| |\gamma_j|} - \sqrt{|\gamma_k| |\gamma_l|} \right)^2.$$

طبق گزاره ۵، به ترتیب به‌ازای n زوج و فرد داریم، $\gamma_{\frac{n}{2}} \leq \sqrt{\frac{2M}{n}}$ و $\gamma_{\frac{n+1}{2}} \leq \sqrt{\frac{2M(n-1)}{n(n+1)}} < \sqrt{\frac{2M}{n}}$ در نتیجه

$$\gamma_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq \sqrt{\frac{2M}{n}} \text{ می‌دانیم } \gamma_1 \geq 1 \text{ و } \gamma_n = \frac{-2m}{n} \text{ بنابراین}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i < j \leq k < l} \left(\sqrt{|\gamma_i| |\gamma_j|} - \sqrt{|\gamma_k| |\gamma_l|} \right)^2 &\geq \sum_{i < j \leq k < l, (i,j) \neq (1,n), (k,l) \neq \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n\right)} \left(\sqrt{|\gamma_i| |\gamma_j|} - \sqrt{|\gamma_k| |\gamma_l|} \right)^2 \\ &+ \left(\sqrt{|\gamma_1| |\gamma_n|} - \sqrt{|\gamma_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} | \gamma_n|} \right)^2 \\ &> |\gamma_n| \left(\sqrt{|\gamma_1|} - \sqrt{|\gamma_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}|} \right)^2 \\ &\geq \frac{2m}{n} \left(1 - \left(\frac{2M}{n} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |\gamma_i| |\gamma_j| \geq n(n-1) (|D|)^{\frac{2}{n}} + \frac{8m}{n(n+1)(n-2)} \left(1 - \left(\frac{2M}{n} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2.$$

با افزودن $\sum_{i=1}^n \gamma_i^2 = 2M$ به دو طرف نامساوی مذکور داریم:

$$LE(G)^2 > 2M + n(n-1) (|D|)^{\frac{2}{n}} + \frac{8m}{n(n+1)(n-2)} \left(1 - \left(\frac{2M}{n} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2.$$

قضیه ۷. فرض کنید G گراف همبند از اندازه $n \geq 2$ و از سایز m باشد. در این صورت

$$LE(G) \leq 2M - \ln|D|. \tag{۱}$$

تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $G = K_2$.

اثبات: فرض کنید $f(x) = x^2 - x - \ln x$ بهوضوح $f(x)$ بهازای $x \geq 1$ صعودی و بهازای $0 < x \leq 1$ نزولی است. بنابراین $x \leq x^2 - \ln x$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $x = 1$.

$$LE(G) = \sum_{i=1}^n |\gamma_i| \leq \sum_{i=1}^n (\gamma_i^2 - \ln|\gamma_i^2|) = 2M - \ln \prod_{i=1}^n |\gamma_i| = 2M - \ln|D|$$

حال فرض کنید که حالت تساوی در نامساوی (۱) اتفاق بیفتد. در اینصورت تمام نامساویهای محاسبات مذکور بهصورت تساوی برقرار است. پس

$$|\gamma_1| = |\gamma_2| = \dots = |\gamma_n| = 1$$

در اینصورت $n = 2$ و $\frac{2m}{n} = 1$ در نتیجه $G = K_2$.

قضیه ۸.

$$LE(G) + LE(\bar{G}) \leq n(n-1) - 4m + 4M - \ln|D| - \ln|\bar{D}|.$$

اثبات: بنابر قضیه ۷ داریم

$$LE(G) + LE(\bar{G}) \leq 2M - \ln|D| + 2\bar{M} - \ln|\bar{D}| = n(n-1) - 4m + 4M - \ln|D| - \ln|\bar{D}|.$$

قضیه ۹. فرض کنید G گراف همبند از اندازه $n \geq 2$ و از سایز m باشد. در اینصورت

$$LE(G) \leq 2M + \frac{2m}{n} - \frac{4m^2}{n^2} - \ln|D| + \ln \frac{2m}{n}.$$

اثبات: بنابر اثبات قضیه ۷، داریم:

$$LE(G) = |\gamma_n| + \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| \leq |\gamma_n| + \sum_{i=1}^{n-1} (\gamma_i^2 - \ln|\gamma_i|) = |\gamma_n| + 2M - \ln \prod_{i=1}^n |\gamma_i| + \ln|\gamma_n| = 2M + \frac{2m}{n} - \frac{4m^2}{n^2} - \ln|D| + \ln \frac{2m}{n}.$$

قضیه ۱۰.

$$LE(G) + LE(\bar{G}) \leq n-1 + 2n(n-1) - 8m + 4M + \ln(2mn(n-1) - 4m^2) - 2 \ln n - \frac{8m^2}{n^2} - (n-1)^2 + \frac{4m(n-1)}{n} \ln|D| - \ln|\bar{D}|.$$

اثبات: طبق قضیه ۹، داریم

$$\begin{aligned} & LE(G) + LE(\bar{G}) \\ & \leq 2M + \frac{2m}{n} - \frac{4m^2}{n^2} - \ln|D| + \ln \frac{2m}{n} + 2\bar{M} + \frac{2\bar{m}}{n} - \frac{4\bar{m}^2}{n^2} - \ln|\bar{D}| \\ & + \ln \frac{2\bar{m}}{n} \\ & = n - 1 + 2n(n - 1) - 8m + 4M + \ln(2mn(n - 1) - 4m^2) - 2 \ln n \\ & - \frac{8m^2}{n^2} - (n - 1)^2 + \frac{4m(n - 1)}{n} \ln|D| - \ln|\bar{D}|. \end{aligned}$$

قضیه ۱۱.

$$LE(G) + LE(\bar{G}) \leq n(n - 1) - 4m + 4M + 2\sqrt{2n(n - 1)M - 8mM + 4M^2}.$$

اثبات: با استناد به گزاره ۴، داریم:

$$\left(\sum_{i=1}^n (|\gamma_i| + |\bar{\gamma}_i|)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^n \bar{\gamma}_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (|\gamma_i| + |\bar{\gamma}_i|)^2 & \leq \sum_{i=1}^n \gamma_i^2 + \sum_{i=1}^n \bar{\gamma}_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n \gamma_i^2 \sum_{i=1}^n \bar{\gamma}_i^2} = 2M + 2\bar{M} + 2\sqrt{4M\bar{M}} \\ & = n(n - 1) - 4m + 4M + 2\sqrt{2n(n - 1)M - 8mM + 4M^2}. \end{aligned}$$

قضیه ۱۲.

$$\begin{aligned} LE(G) + LE(\bar{G}) & \leq n - 1 + \\ & \left[n(n - 1) - 4m + 4M - 2 + \right. \\ & \left. 22nn - 1M - 8mM + 4M^2 - nn - 1 + 4m - 4M + 112. \right] \end{aligned}$$

اثبات: با استناد به گزاره ۴، داریم

$$\left(\sum_{i=2}^n (|\gamma_i| + |\bar{\gamma}_i|)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=2}^n \gamma_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=2}^n \bar{\gamma}_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n (|\gamma_i| + |\bar{\gamma}_i|)^2 & \leq \sum_{i=2}^n \gamma_i^2 + \sum_{i=2}^n \bar{\gamma}_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=2}^n \gamma_i^2 \sum_{i=2}^n \bar{\gamma}_i^2} \\ & = \sum_{i=1}^n \gamma_i^2 - \gamma_1^2 + \sum_{i=1}^n \bar{\gamma}_i^2 - \bar{\gamma}_1^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n (\gamma_i^2 - \gamma_1^2) \sum_{i=1}^n (\bar{\gamma}_i^2 - \bar{\gamma}_1^2)} \\ & \leq 2M - 1 + 2\bar{M} - 1 + 2\sqrt{(2M - 1)(2\bar{M} - 1)} \end{aligned}$$

$$= n(n-1) - 4m + 4M - 2 + 2\sqrt{2n(n-1)M - 8mM + 4M^2 - n(n-1) + 4m - 4M + 1}.$$

می‌دانیم $\gamma_1 \leq \Delta + \delta - \frac{2m}{n}$ با استفاده از نامساوی کوشی شوارتز داریم:

$$\begin{aligned} LE(G) + LE(\bar{G}) &= |\gamma_1| + |\bar{\gamma}_1| + \sum_{i=2}^n (|\gamma_i| + |\bar{\gamma}_i|) \\ &\leq |\gamma_1| + |\bar{\gamma}_1| + \sqrt{(n-1) \sum_{i=2}^n (|\gamma_i| + |\bar{\gamma}_i|)^2} \\ &\leq \Delta + \delta - \frac{2m}{n} + n - 1 - \Delta + n - 1 - \delta - \frac{2\bar{m}}{n} \\ &\quad + \sqrt{(n-1) \sum_{i=2}^n (|\gamma_i| + |\bar{\gamma}_i|)^2} \\ &= n - 1 + \sqrt{(n-1) \sum_{i=2}^n (|\gamma_i| + |\bar{\gamma}_i|)^2} \end{aligned}$$

$$\leq n - 1 + \left[n(n-1) - 4m + 4M - 2 + 2\sqrt{2n(n-1)M - 8mM + 4M^2 - n(n-1) + 4m - 4M + 1} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

منابع

1. West D. B., "Introduction to Graph Theory", Prentice-Hall, Inc (2000).
2. Dragomir S. S., "A survey on Cauchy-Bunyakoviski-Schwarz type discrete inequalities", J. Inequ. Pure Appl. Math. 4 (2003) 63.
3. Grone R., Merris R., "The Laplacian spectrum of a graph II", SIAM J. Discrete Math. 7 (1994) 221-229.
4. Grone R., Merris R., Sunder V. S., "The Laplacian spectrum of a graph", SIAM J. Matrix Anal. Appl. 11 (1990) 218-238.
5. Guman I., Zhou B., "Laplacian energy of a graph", Linear Algebra Appl. 414 (2006) 29-37.

6. Guman I., Zhou B., "On laplacian energy of graphs, MATCH Commun", Math. Comput. Chem. 57 (2007) 211-220.
7. Kober H., "On the arithmetic and geometric means and the Holder inequality", Pro. Am. Math. Soc. 59 (1958) 452-459.
8. Zhang X. D., Li J. S., "The Laplacian spectrum of mixed graphs, Linear Algeb", Appl. 351 (2002) 11-20.
9. Zhang X. D., Li J. S., "A note on the Laplacian eigenvalues", J. Math. Research Exposition, 24 (2) (2004) 388-390.