جواب برخی مسائل مقدار مرزی شامل معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی

حجت افشاری*، مجتبی سجادمنش
دانشگاه بناب

دریافت ۹۶/۱۱/۱۰ پذیرش ۹۷/۱۲/۱۱

چکیده

در این مقاله، با استفاده از عملگرهای یکنوای مرکب و نقاط ثابت آنها، وجود و منحصر به‌فردی جواب‌های مثبت برای دو مسئله مقدار مرزی کسری غیرخطی زیر را بررسی می‌کنیم.

$$D_{0+}^{\alpha}u(s,t)+\ f\big(s,t,u(s,t)\big)=0,$$

$$(0<\epsilon<T,\ \ T\geq 1,\quad t\in[\epsilon,T],\ \ 0<\alpha<1,\ \ s\in[a,b])$$

$$u(s,\eta)=u(s,T),(s,\eta)\in[a,b]\times(\epsilon,T),\ \ a,b\in(0,\infty),\ \ a<b \qquad (۱)$$

و

$$u\,(0)=u'(0)=u(1)=u'(1)=0, \qquad (۲)$$

که در آن D_{0+}^{α} مشتق کسری ریمان-لیوویل از مرتبهٔ α است.

واژه‌های کلیدی: مسائل مقدار مرزی، معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری، مشتق‌کسری ریمان-لیوویل، قضیهٔ نقطه ثابت.

مقدمه

در سال‌های اخیر معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ کسری هم از لحاظ نظری و هم کاربردی مورد توجه بسیاری از محققان ریاضی قرار گرفته است. از جمله کاربردها می‌توان به کاربرد در فیزیک، مکانیک، شیمی، مهندسی، زیست‌شناسی، اقتصاد، نظریه کنترل، سیگنال و پردازش تصویر، بیوفیزیک، پدیده جریان خون و آیرودینامیک و غیره اشاره کرد [۱]، [۲]، [۳].

عملگرهای یکنوای مرکب اولین بار به‌وسیلهٔ گوو و لاکشمیکانتام[۱] [۴] معرفی شدند. پس از آنها مؤلفان زیادی عملگرهای مذکور را در فضاهای باناخ بررسی کرده و نتایج مهمی را نه تنها در زمینه‌های تئوری بلکه کاربردهای وسیعی از آن را در زمینه مهندسی، زیست‌شناسی، شیمی، تکنولوژی و غیره به‌دست آوردند.

در سال ۲۰۰۶ خو و همکارانش [۵]، وجود و منحصربه‌فردی جواب‌های مثبت مسئله مقدار مرزی کسری غیرخطی زیر را بررسی کردند.

$$\mathrm{D}_{0+}^{\alpha}\,u(\mathrm{t})=f\big(\mathrm{t},u(\mathrm{t})\big),\qquad \mathrm{t}\in(0,1),\qquad 3<\alpha\leq 4,$$

$$u(0)=u'(0)=u(1)=u'(1)=0,$$

*نویسنده مسئول hojat.afshari@yahoo.com

1. D. Guo, V. Lakshmikantham

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.9.0]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.149]

که در آن D_{0+}^{α} مشتق ریمان-لیوویل است.

هم‌چنین در [۶] مؤلفان با به‌کاربردن نتایج نقطه ثابت، جواب‌هایی مثبت و منحصر به‌فرد برای معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی به‌دست آوردند.

در سال ۲۰۱۴، خین شینگ دو[1] برخی نتایج روی دسته‌ای از عملگرهای یکنوای مرکب را [۷] اثبات کرد.

در این مقاله کاربرد قضیه‌های نقطه ثابت و نتیجه به‌دست آمده به‌وسیلهٔ خین شینگ را برای به‌دست آوردن جواب‌های مثبت و منحصربه‌فرد معادلات دیفرانسیل کسری دارای شرایط مقدار مرزی، بررسی و هم‌چنین با استفاده از عملگرهای یکنوای مرکب و نقاط ثابت آنها، نتایج به‌دست آمده از خو و همکارانش را برای مسئله‌های مقدار مرزی کسری غیر خطی (۱) و (۲) در مخروط P از فضای باناخ E، بررسی می‌کنیم.

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

تعریف۱. فرض کنید $(E, \|.\|)$ یک فضای باناخ باشد. مجموعه غیرتهی، محدب و بسته $P \subset E$ یک مخروط است درصورتی‌که:

آ) اگر $x \in P$ و $\lambda \geq 0$ ، آنگاه $\lambda x \in P$.

ب) اگر $x \in P$ و $-x \in P$ ، آنگاه $x = \theta$.

که در آن θ عنصر صفر E است.

اگر نامساوی $\theta \leq x \leq y$ رابطه $\|x\| \leq N\,\|y\|$ را به‌ازای یک عدد ثابت $N > 0$ ایجاب کند، آن‌گاه مخروط P نرمال و اگر درون P ناتهی باشد، آن‌گاه، P جامد نامیده می‌شود.

فرض کنید E یک فضای باناخ باشد و $P \subseteq E$ یک مخروط به‌طور جزئی مرتب با رابطه ترتیب جزئی $\leq$ بدین‌صورت باشد:

$$x \leq y \text{ فقط و فقط اگر } y - x \in P.$$

برای هر $x, y \in E$ رابطهٔ $x \sim y$ به این معنی است که $\lambda > 0$ و $\mu > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $\lambda x \leq y \leq \mu x$ به‌وضوح $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است. به‌ازای $e > \theta$، مجموعه P_e را به‌صورت $P_e = \{x \in E \mid x \sim e\}$ نمایش می‌دهیم. به‌آسانی می‌توان مشاهده کرد که $P_e \subset P$ محدب است و به‌ازای هر $\lambda > 0$، $\lambda P_e = P_e$.

تعریف ۲. اگر به‌ازای هر $t \in (0,1)$ و $x \in P$، $A(tx) \geq tA(x)$، آن‌گاه عملگر $A: P \to P$، زیر همگن نامیده می‌شود و اگر به‌ازای هر $t \in (0,1)$ و $x \in P$، $A(tx) \geq t^{\alpha} A(x)$، آن گاه، $A: P \to P$، α-مقعر نامیده می‌شود.

تعریف ۳. اگر تابع مثبت $\eta(t, u, v)$، موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $u, v \in P_e$ و هر t ($0 < t < 1$) این رابطه برقرار است:

$$A\left(tu\,, \frac{1}{t}\,v\right) \geq t\big(1 + \eta\,(t, u, v)\big) A(u, v).$$

آن‌گاه $A: P_e \times P_e \to P_e$ را یک عملگر مقعر- محدب گوییم.

قضیهٔ ۱. [۷]، فرض کنید P یک مخروط نرمال، $A: P_e \times P_e \to P_e$، عملگر یکنوای مرکب و مقعر- محدب است. هم‌چنین $u_0, v_0 \in P_e$ ($u_0 \leq v_0$). با انتخاب $\epsilon \in (0,1)$، به‌اندازهٔ کافی کوچک و $u_0 \geq \epsilon v_0$، روابط زیر برقرار هستند.

1. X. Du

$$(H_1) \qquad u_0 \le A(u_0, v_0), \quad A(v_0, u_0) \le v_0,$$
$$(H_2) \quad \forall t \in (0,1), \quad \overline{\lim_{n\to +\infty}}\, n\eta(t, v_n, u_n) \ge \frac{1}{\epsilon} - 1,$$

که در آن $u_n = A(u_{n-1}, v_{n-1})$ و $v_n = A(v_{n-1}, u_{n-1})$ $(n = 1,2,\dots)$. در این صورت A یک نقطه ثابت منحصر به‌فرد x^* در P_e دارد. به‌علاوه، با تشکیل دنباله‌های متوالی

$$x_n = A(x_{n-1}, y_{n-1}) \quad \text{و} \quad y_n = A(y_{n-1}, x_{n-1}) \quad (n = 1,2,\dots)$$

به‌ازای مقادیر اولیه $x_0, y_0 \in P_e$، زمانی که $n \to +\infty$، داریم:

$$\|x_n - x^*\| \to 0\,, \ \|y_n - x^*\| \to 0. \tag{۳}$$

تعریف۴. انتگرال ریمان- لیوویل از مرتبهٔ $\alpha \ge 0$، برای تابع $f: (0,\infty) \to R$ بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$I_{0+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds,$$

به‌شرطی که انتگرال مذکور موجود باشد.

تعریف ۵. مشتق کسری ریمان- لیوویل از مرتبهٔ $n-1 \le \alpha < n$، برای تابع $f: (0,\infty) \to R$ بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$D_{0+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} (\frac{d}{dt})^n \int_0^t (t-s)^{1-\alpha+n} f(s)ds,$$

که در آن $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$، مشروط بر این‌که حاصل انتگرال موجود باشد [۸]، [۹].

لم۱. فرض کنید $h \in C[0,1]$ و $p \ge q > 0$. دراین‌صورت این روابط برقرار است [۹]:

$$D_{0+}^{p} I_{0+}^{q} h(t) = I_{0+}^{q-p} h(t),$$

و

$$I_{0+}^{p} D_{0+}^{p} h(t) = c_1 t^{p-1} + c_2 t^{p-2} + \dots + c_n t^{p-n},$$

که $n = [p] + 1$ و $c_i \in R$ $(i = 1,2,3,\dots,n)$.

نتایج اصلی

فرض کنید $a, b \in (0,\infty)$ و $a < b$. هم‌چنین به‌ازای $\epsilon > 0$، $E = C([a,b] \times [\epsilon, T])$، فضای باناخ توابع پیوسته حقیقی مقدار روی $[a,b] \times [\epsilon, T]$ با نرم سوپریمم باشد، قرار می‌دهیم:

$$P = \{y \in C([a,b] \times [\epsilon, T]): \quad min_{(s,t)\in[a,b]\times[\epsilon,T]}\, y(s,t) \ge 0\}. \tag{۴}$$

در این صورت P یک مخروط نرمال است.

لم ۲. فرض کنید $(s,t) \in [a,b] \times [\epsilon, T]$، $0 < \epsilon < T$ و $(s,\eta) \in [a,b] \times (\epsilon, t)$. دراین‌صورت معادله

$$D_{0+}^{\alpha} u(s,t) + f\big(s,t,u(s,t),u(s,t)\big) = 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

با شرط مرزی $u(s,\eta) = u(s,T)$ جوابی مانند u_0 دارد فقط و فقط اگر u_0 یک جواب معادله انتگرال کسری زیر باشد.

$$u(s,t) = \int_{\epsilon}^{T} G(t,\xi) f\big(s,\xi,u(s,\xi),u(s,\xi)\big) d\xi,$$

که در آن

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.9.0]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.149]

$$G(t,\xi)=\begin{cases}\frac{t^{\alpha-1}(\eta-\xi)^{\alpha-1}-t^{\alpha-1}(T-\xi)^{\alpha-1}}{(\eta^{\alpha-1}-T^{\alpha-1})\Gamma(\alpha)}-\frac{(t-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \epsilon\le\xi\le\eta\le t\le T,\\ \frac{-t^{\alpha-1}(T-\xi)^{\alpha-1}}{(\eta^{\alpha-1}-T^{\alpha-1})\Gamma(\alpha)}-\frac{(t-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \epsilon\le\eta\le\xi\le t\le T,\\ \frac{-t^{\alpha-1}(T-\xi)^{\alpha-1}}{(\eta^{\alpha-1}-T^{\alpha-1})\Gamma(\alpha)}, & \epsilon\le\eta\le t\le\xi\le T.\end{cases} \quad (۵)$$

برهان. با توجه به

$$D_{0+}^{\alpha}u(s,t)+f\big(s,t,u(s,t),u(s,t)\big)=0$$

و شرط مرزی به آسانی می‌توان مشاهده کرد که

$$u(s,t)-c_1t^{\alpha-1}=-I_{\epsilon}^{\alpha}f\big(s,t,u(s,t),u(s,t)\big).$$

بنابراین

$$u(s,t)=c_1t^{\alpha-1}-\int_{\epsilon}^{t}\frac{(t-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f\big(s,\xi,u(s,\xi),u(s,\xi)\big)d\xi,$$

در نتیجه

$$u(s,\eta)=c_1\eta^{\alpha-1}-\int_{\epsilon}^{\eta}\frac{(\eta-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f\big(s,\xi,u(s,\xi),u(s,\xi)\big)d\xi,$$

و

$$u(s,T)=c_1T^{\alpha-1}-\int_{\epsilon}^{T}\frac{(T-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f\big(s,\xi,u(s,\xi),u(s,\xi)\big)d\xi.$$

با توجه به (۱)، $u(s,\eta)=u(s,T)$ و داریم

$$\begin{aligned}u(s,t)&=\frac{t^{\alpha-1}}{\eta^{\alpha-1}-T^{\alpha-1}}\int_{\epsilon}^{\eta}\frac{(\eta-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f\big(s,\xi,u(s,\xi),u(s,\xi)\big)d\xi\\&-\frac{t^{\alpha-1}}{\eta^{\alpha-1}-T^{\alpha-1}}\int_{\epsilon}^{T}\frac{(T-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f\big(s,\xi,u(s,\xi),u(s,\xi)\big)d\xi\\&-\int_{\epsilon}^{t}\frac{(t-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f\big(s,\xi,u(s,\xi),u(s,\xi)\big)d\xi=\int_{\epsilon}^{T}G(t,\xi)f\big(s,\xi,u(s,\xi),u(s,\xi)\big)d\xi.\end{aligned}$$

و این اثبات را کامل می‌کند.

قضیهٔ ۲. اگر $0<\epsilon<T$ ثابت باشد و $f:[a,b]\times[\epsilon,T]\times[0,\infty)\times[0,\infty)\to R$ یک تابع پیوسته، صعودی نسبت به مؤلفهٔ سوم و نزولی نسبت به مؤلفه چهارم به‌ازای $(s,t)\in[a,b]\times[\epsilon,T]$ باشد و $l\in(0,1)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\varphi(l,u,v)\in(1,\infty)$. هم‌چنین برای $G(s,t)>0$،

$$f\left(s,t,lu(s,t),\frac{1}{l}v(s,t)\right)\ge l\big(1+\varphi(l,u,v)\big)f(s,t,u(s,t),v(s,t)),$$

و برای $G(s,t)<0$،

$$f\big(s,t,u(s,t),v(s,t)\big)=0.$$

به علاوه، $u_0,v_0\in P$، به‌طوری که برای $(s,t)\in[a,b]\times[\epsilon,T]$،

$$\begin{aligned}&u_0(s,t)\le v_0(s,t),\\&\int_{\epsilon}^{T}G(t,\xi)f\big(s,\xi,u_0(s,\xi),v_0(s,\xi)\big)d\xi\ \ge\ u_0(s,t),\\&\int_{\epsilon}^{T}G(t,\xi)f\big(s,\xi,v_0(s,\xi),u_0(s,\xi)\big)d\xi\ \le\ v_0(s,t),\end{aligned}$$

و

$$\forall t \in (0,1), \quad \overline{lim}_{n\to+\infty}\, n\varphi(t, v_n, u_n) \geq \frac{1}{\epsilon} - 1.$$

آن‌گاه مسئله (۱)، جواب منحصر به‌فرد در مخروط P رابطهٔ (۴) دارد. به علاوه، برای دنباله‌های

$$u_{n+1} = \int_{\epsilon}^{T} G(t,\xi) f\big(s,\xi,u_n(s,\xi),v_n(s,\xi)\big) d\xi,$$

$$v_{n+1} = \int_{\epsilon}^{T} G(t,\xi) f\big(s,\xi,v_n(s,\xi),u_n(s,\xi)\big) d\xi,$$

داریم: $\|u_n - u^*\| \to 0, \|v_n - u^*\| \to 0$ $(n \to +\infty)$. که در آن u^* حد دنباله‌های $\{u_n\}$ و $\{v_n\}$ است.

برهان. با به‌کارگیری لم ۲، مسئله (۱) با معادله انتگرال زیرمعادل است.

$$u(s,t) = \int_{\epsilon}^{T} G(t,\xi) f\big(s,\xi,u(s,\xi),v(s,\xi)\big) d\xi,$$

که در آن $G(t,\xi)$ همان رابطه داده شده در (۵) است.

با توجه به خواص تابع f و تعریف دنباله‌های $\{u_n(t)\}$ و $\{v_n(t)\}$، از این‌که به‌ازای $t \in [0,1]$، $u_0(t) \leq v_0(t)$ و به‌علاوه دنباله‌های $\{u_n(t)\}$ و $\{v_n(t)\}$، به‌ترتیب، صعودی از بالا کراندار و نزولی از پایین کراندار از اعداد حقیقی هستند، دنباله‌های مذکور همگرا به نقطه ثابتی مانند u^* هستند.

عملگر $A: P \times P \to P$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم.

$$A\big(u_n(s,t), v_n(s,t)\big) = \int_{\epsilon}^{T} G(t,\xi) f\big(s,\xi,u_n(s,\xi),v_n(s,\xi)\big) d\xi\,.$$

به آسانی می‌توان مشاهده کرد که عملگر A صعودی برحسب u و نزولی بر حسب v روی P است، از طرف دیگر برای $(s,t) \in [a,b] \times [\epsilon,T]$و $l \in (0,1)$، تابع $\varphi(l,u,v) \in (1,\infty)$ طوری موجود است که

$$A\left(lu_n(s,t), \frac{1}{l}v_n(s,t)\right) = \int_{\epsilon}^{T} G(t,\xi) f\left(s,\xi,lu_n(s,\xi),\frac{1}{l}v_n(s,\xi)\right) d\xi$$
$$\geq l\big(1+\varphi\,(l,u_n,v_n)\big) \int_{\epsilon}^{T} G(t,\xi) f\big(s,\xi,u_n(s,\xi),v_n(s,\xi)\big) d\xi$$
$$= l\,\big(1+\varphi(l,u_n,v_n)\big) A\big(u_n(s,t),v_n(s,t)\big).$$

بنابراین A در همه شرایط قضیه۱ صدق می‌کند، از این‌رو، A جواب مثبت منحصر به‌فرد (u^*,u^*) دارد طوری‌که $A(u^*,u^*) = u^*$. این اثبات را کامل می‌کند.

در ادامه وجود و منحصر به‌فردی جواب مثبت معادله دیفرانسیل کسری (۶) را بررسی می‌کنیم.

$$D_{0+}^{\alpha}\, u(t) = f\big(t,u(t)\big), \qquad t \in [0,1], \qquad 3 < \alpha \leq 4, \qquad (۶)$$

با این شرایط

$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0,$$

که در آن D_{0+}^{α} مشتق کسری ریمان- لیوویل از مرتبه α است. فضای باناخ توابع پیوسته روی $[0,1]$ را با نرم زیر در نظر بگیرید.

$$\|y\| = max_{t\in[0,1]} |y(t)|.$$

فرض کنید:

$$P = \big\{y \in C[0,1]:\ min_{t\in[0,1]}\, y(t) \geq 0\big\}. \qquad (۷)$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.9.0]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.149]

در این‌صورت P یک مخروط نرمال است. زیرا بند (آ) در تعریف ۱ به‌وضوح برقرار است هم‌چنین تابع پیوسته نامنفی که منفی برابر آن نیز نامنفی باشد برابر با تابع ثابت صفر است، از این‌رو، بند (۲) تعریف مذکور نیز صادق است.

در مرجع [۹] لم‌های ۳ و ۴ را داریم.

لم ۳. فرض کنید $f \in C[0,1]$ و $3 < \alpha \leq 4$. جواب منحصر به‌فرد معادله دیفرانسیل

$$D_{0+}^{\alpha} u(t) = f\big(t, u(t)\big), \quad t \in [0,1], \quad 3 < \alpha \leq 4, \tag{۸}$$

که در آن

$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0, \tag{۹}$$

بدین‌صورت است:

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s) f\big(s, u(s)\big) ds,$$

که در آن

(۱۰)

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(t-s)^{\alpha-1} + (1-s)^{\alpha-2} t^{\alpha-2}[(s-t) + (\alpha-2)(1-t)s]}{\Gamma(\alpha)}, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \dfrac{(1-s)^{\alpha-2} t^{\alpha-2}[(s-t) + (\alpha-2)(1-t)s]}{\Gamma(\alpha)}, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

اگر $f\big(t, u(t)\big) = 1$، در این‌صورت جواب منحصر به‌فرد (۹)-(۸) با این رابطه داده می‌شود.

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s) ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha-2}(1-t)^2.$$

لم۴. تابع $G(t,s)$ تعریف شده در (۱۰) دارای این خواص است:

الف) $G(t,s) > 0$ و به ازای هر $t, s \in [0,1]$ تابع $G(t,s)$ پیوسته است.

ب) $\frac{(\alpha-2)h(t)k(s)}{\Gamma(\alpha)} \leq G(t,s) \leq \frac{M_0\, k(s)}{\Gamma(\alpha)}$ که در آن

$$M_0 = max\{\alpha - 1, (\alpha-2)^2\}, \;\; h(t) = t^{\alpha-2}(1-t)^2, k(s) = s^2(1-s)^{\alpha-2},$$

قضیهٔ ۳. فرض کنید $f: [0,1] \times [0,\infty) \times [0,\infty) \to R$ تابع پیوسته، صعودی نسبت به مؤلفه دوم و نزولی نسبت به مؤلفه سوم باشد و تابع $\varphi(l,u,v)$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$f\left(t, lu(t), \frac{1}{l}\, v(t)\right) \geq l\big(1 + \varphi(l,u,v)\big) f(t,u,v). \tag{۱۱}$$

هم‌چنین، $u_0, v_0 \in P$ وجود دارند به‌طوری که به‌ازای هر $t \in [0,1]$،

$$u_0(t) \leq v_0(t),$$
$$\int_0^1 G\big(t,s\big) f\big(s, u_0(s), v_0(s)\big) ds \;\geq\; u_0(t),$$
$$\int_0^1 G\big(t,s\big)\, f\big(s, v_0(s), u_0(s)\big) ds \;\leq\; v_0(t).$$

و

$$\forall t \in (0,1), \; \overline{\lim_{n\to+\infty}}\; n\varphi(t, v_n, u_n) \geq \frac{1}{\epsilon} - 1.$$

در این‌صورت مسئلهٔ (۸) با شرط مرزی (۹) جواب منحصر به‌فردی در P دارد. به علاوه برای دنباله‌های

$$u_{n+1} = \int_0^1 G(t,s) f(s, u_n(s), v_n(s)) ds\,,$$
$$v_{n+1} = \int_0^1 G(t,s) f(s, v_n(s), u_n(s)) ds\,,$$

داریم: $\|u_n - u^*\| \to 0,\ \|v_n - u^*\| \to 0$. که در آن u^* حد دنباله‌های $\{u_n\}$ و $\{v_n\}$ است.

برهان. با به‌کارگیری لم ۳، مسئله (۹)- (۸) با معادله انتگرال زیرمعادل است.

$$u_{n+1}(t) = \int_0^1 G(t,s) f\big(s, u_n(s), v_n(s)\big) ds,$$

که د رآن $G(t,s)$ همان رابطه داده شده در (۱۱) است.

با توجه به این‌که دنباله‌های $\{u_n(t)\}$ و $\{v_n(t)\}$، به‌ترتیب، صعودی از بالا کراندار و نزولی از پایین کراندار از اعداد حقیقی هستند، دنباله‌های مذکور همگرا به نقطه ثابتی مانند u^* هستند.

عملگر $A: P \times P \to P$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم.

$$A\big(u_n(t), v_n(t)\big) = \int_0^1 G(t,s) f\big(s, u_n(s), v_n(s)\big) ds.$$

در این‌صورت u جوابی برای مسئله است فقط و فقط اگر $u = A(u,u)$. به آسانی می‌توان مشاهده کرد که عملگر A صعودی برحسب u و نزولی بر حسب v روی P است. از طرف دیگر

برای $t \in [0,1]$ و $l \in (0,1)$ تابع $\varphi(l, u_n, v_n) \in (1, \infty)$, $(n \geq 0)$ طوری موجود است که

$$\begin{aligned} A\left(l u_n(t), \frac{1}{l} v_n(t)\right) &= \int_0^1 G(t,s) f\left(s, l\, u_n(s), \frac{1}{l} v_n(s)\right) ds \\ &\geq l\big(1 + \varphi\,(l, u_n, v_n)\big) \int_0^1 G(t,s) f\big(s, u_n(s), v_n(s)\big) ds \\ &= l\,\big(1 + \varphi(l, u_n, v_n)\big) A\big(u_n(t), v_n(t)\big). \end{aligned}$$

بنابراین A در همه شرایط قضیه ۱ صدق می‌کند، از این‌رو، A جواب مثبت منحصر به‌فرد (u^*, u^*) دارد به‌طوری‌که $A(u^*, u^*) = u^*$. این اثبات را کامل می‌کند.

مثال. معادله دیفرانسیل کسری

$$D_{0+}^{\frac{7}{2}} u(t) = f\big(t, u(t)\big) = \sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}}. \qquad (۱۲)$$

را با شرایط (۱۳) در نظر بگیرید.

$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0\,. \qquad (۱۳)$$

تابع گرین این مسئله با رابطه (۱۱) مشخص می شود. با توجه به لم ۴ داریم:

$$\min_{t \in [0,1]} \int_0^1 G(t,s) ds = 0.00001$$
$$\max_{t \in [0,1]} \int_0^1 G(t,s) ds = 0.004$$

فرض کنید:

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\,, \qquad u(t) = \sqrt{t}\,, \qquad \epsilon = \frac{1}{2}$$

هم‌چنین

$$\varphi(l, v_n, u_n) = \frac{l + u_n + v_n}{n(u_n + v_n)}.$$

قرار می‌دهیم:

$$\varphi(l\,, v\,, u) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(l, v_n, u_n).$$

به‌وضوح رابطهٔ (۱۱) برقرار است زیرا

$$f\left(t, lu(t), \frac{1}{l}v(t)\right) = \sqrt{l}\left(\sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{v}}\right) \geq l\left(\sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{v}}\right), \quad (0 < l < 1).$$

با انتخاب $t_0 = 10^{-6}$ داریم:

$$u_0 = u(t_0) = 10^{-3}\,, \ \ v_0 = v(t_0) = 10^3,$$

بنابراین $u_0 \leq v_0$. از طرف دیگر

$$\int_0^1 G(t,s) f(s, u_0, v_0) ds = (10^{-3} \times 10^3) \int_0^1 G(t,s) ds\,.$$

که با استفاده از روابط (۱۲) به‌دست می‌آوریم:

$$\int_{۰}^{۱} G(t,s) f(s, u_0, v_0) ds \ \geq (10^{-3} \times 10^3) \times 10^{-5} \geq 10^{-3}\,,$$

$$\int_{۰}^{۱} G(t,s) f(s, v_0, u_0) ds \ \leq (10^{-3} \times 10^3) \times 4 \times 10^{-3} \leq 10^3\,.$$

هم‌چنین

$$\forall t \in (0,1), \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, n\varphi(t, v_n, u_n) \geq \frac{1}{\epsilon} - 1.$$

در این‌صورت طبق قضیهٔ ۳ مسئله (۱۲) با شرایط مرزی (۱۳) جواب منحصر به‌فردی در $[10^{-3}, 10^3]$ دارد.

منابع

1. Agarwal Ravi P., "Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems", J. Math. Anal. Appl (2002) 368-379.
2. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I., "Fractional Integral and Derivative: Theory and Application", Gordan & Breach, Switzerland (1993).
3. Baleanu D., Mustafa O. G., Agarwal R. P., "On the solution set for a class of sequential fractional differential equations", J. phys. A. Math. Theory. 43(38), Article ID, 385209 (2010).
4. Guo D., Lakskmikantham V., "Coupled fixed points of nonlinear operators with applications", Nonlinear Anal. 11 (5) (1987) 623-632.
5. Xiaojie X., Daqing J., Chengjun Y., "Multiple positive solutions for the boundary value problem of a nonlinear fractional differential equation", Nonlinear Analysis, 71 (2009) 4676-4688.
6. Baleanu D., Agarwal R.., Mohammadi H., Rezapour S."Some existence results for a nonlinear fractional differential equation on partially ordered Banach spaces", Boundary Value Problems (2013)112.
7. Du X., "New fixed point theorems of mixed monotone operators" ,Applied Mathematics, 5 (2014) 352-357.
8. Podlubny I., "Fractional Differential Equations", Academic Press, New York (1999).
9. Kilbas A. A., Srivastava H. H., Trujillo J. J., "Theory and Applications of Fractional Differential Equations", Elsevier, Amsterdam (2006).

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.2.9.0]
[DOI: 10.52547/mmr.6.2.149]