

جواب برخی مسائل مقدار مرزی شامل معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی

حجت افشاری*، مجتبی سجادمناش
دانشگاه بناب

دریافت ۹۶/۱۱/۱۰ پذیرش ۹۷/۱۲/۱۱

چکیده

در این مقاله، با استفاده از عملگرهای یکنوای مرکب و نقاط ثابت آنها، وجود و منحصر به فردی جواب‌های مثبت برای دو مسئله مقدار مرزی کسری غیرخطی زیر را بررسی می‌کنیم.

$$D_{0+}^{\alpha} u(s, t) + f(s, t, u(s, t)) = 0,$$

$$(0 < \epsilon < T, T \geq 1, t \in [\epsilon, T], 0 < \alpha < 1, s \in [a, b])$$

$$u(s, \eta) = u(s, T), (s, \eta) \in [a, b] \times (\epsilon, T), a, b \in (0, \infty), a < b \quad (1)$$

و

$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0, \quad (2)$$

که در آن D_{0+}^{α} مشتق کسری ریمان-لیوویل از مرتبه α است.

واژه‌های کلیدی: مسائل مقدار مرزی، معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری، مشتق کسری ریمان-لیوویل، قضیه نقطه ثابت.

مقدمه

در سال‌های اخیر معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری هم از لحاظ نظری و هم کاربردی مورد توجه بسیاری از محققان ریاضی قرار گرفته است. از جمله کاربردها می‌توان به کاربرد در فیزیک، مکانیک، شیمی، مهندسی، زیست‌شناسی، اقتصاد، نظریه کنترل، سیگنال و پردازش تصویر، بیوفیزیک، پدیده جریان خون و آیرودینامیک و غیره اشاره کرد [۱]، [۲]، [۳].

عملگرهای یکنوای مرکب اولین بار به وسیله گوو و لاکشمیکانتم [۴] معرفی شدند. پس از آنها مؤلفان زیادی عملگرهای مذکور را در فضاهای باناخ بررسی کرده و نتایج مهمی را نه تنها در زمینه‌های تئوری بلکه کاربردهای وسیعی از آن را در زمینه مهندسی، زیست‌شناسی، شیمی، تکنولوژی و غیره به دست آوردند.

در سال ۲۰۰۶ خو و همکارانش [۵]، وجود و منحصر به فردی جواب‌های مثبت مسئله مقدار مرزی کسری غیرخطی زیر را بررسی کردند.

$$D_{0+}^{\alpha} u(t) = f(t, u(t)), \quad t \in (0, 1), \quad 3 < \alpha \leq 4,$$

$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0,$$

که در آن D_{0+}^{α} مشتق ریمان-لیوویل است.

هم‌چنین در [۶] مؤلفان با به‌کاربردن نتایج نقطه ثابت، جواب‌هایی مثبت و منحصر به‌فرد برای معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی به‌دست آوردند.

در سال ۲۰۱۴، خین شینگ دو^۱ برخی نتایج روی دسته‌ای از عملگرهای یکنوای مرکب را [۷] اثبات کرد. در این مقاله کاربرد قضیه‌های نقطه ثابت و نتیجه به‌دست آمده به‌وسیلهٔ خین شینگ را برای به‌دست آوردن جواب‌های مثبت و منحصر به‌فرد معادلات دیفرانسیل کسری دارای شرایط مقدار مرزی، بررسی و هم‌چنین با استفاده از عملگرهای یکنوای مرکب و نقاط ثابت آنها، نتایج به‌دست آمده از خو و همکارانش را برای مسئله‌های مقدار مرزی کسری غیر خطی (۱) و (۲) در مخروط P از فضای باناخ E ، بررسی می‌کنیم.

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱. فرض کنید $(E, \|\cdot\|)$ یک فضای باناخ باشد. مجموعه غیرتهی، محدب و بسته $P \subset E$ یک مخروط است در صورتی که:

(آ) اگر $x \in P$ و $\lambda \geq 0$ ، آنگاه $\lambda x \in P$

(ب) اگر $x \in P$ و $-x \in P$ ، آنگاه $x = \theta$

که در آن θ عنصر صفر E است.

اگر نامساوی $\theta \leq x \leq y$ رابطه $\|x\| \leq N \|y\|$ را به‌ازای یک عدد ثابت $N > 0$ ایجاب کند، آن‌گاه مخروط P نرمال و اگر درون P ناتهی باشد، آن‌گاه، P جامد نامیده می‌شود.

فرض کنید E یک فضای باناخ باشد و $P \subseteq E$ یک مخروط به‌طور جزئی مرتب با رابطه ترتیب جزئی \leq بدین صورت باشد:

$$x \leq y \text{ فقط و فقط اگر } y - x \in P$$

برای هر $x, y \in E$ رابطه $x \sim y$ به این معنی است که $\lambda > 0$ و $\mu > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $\lambda x \leq y \leq \mu x$ به‌وضوح \sim یک رابطه هم‌ارزی است. به‌ازای $e > \theta$ ، مجموعه P_e را به‌صورت $P_e = \{x \in E \mid x \sim e\}$ نمایش می‌دهیم. به‌آسانی می‌توان مشاهده کرد که $P_e \subset P$ محدب است و به‌ازای هر $\lambda > 0$ $\lambda P_e = P_e$

تعریف ۲. اگر به‌ازای هر $x \in P$ و $t \in (0, 1)$ $A(tx) \geq tA(x)$ ، آن‌گاه عملگر $A: P \rightarrow P$ ، زیر همگن نامیده می‌شود و اگر به‌ازای هر $x \in P$ و $t \in (0, 1)$ $A(tx) \geq t^\alpha A(x)$ ، آن‌گاه، $A: P \rightarrow P$ ، α -مقعر نامیده می‌شود.

تعریف ۳. اگر تابع مثبت $\eta(t, u, v)$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $u, v \in P_e$ و هر t ($0 < t < 1$) این رابطه برقرار است:

$$A\left(tu, \frac{1}{t}v\right) \geq t(1 + \eta(t, u, v))A(u, v).$$

آن‌گاه $A: P_e \times P_e \rightarrow P_e$ را یک عملگر مقعر-محدب گوئیم.

قضیه ۱. [۷]، فرض کنید P یک مخروط نرمال، $A: P_e \times P_e \rightarrow P_e$ عملگر یکنوای مرکب و مقعر-محدب است. هم‌چنین $u_0, v_0 \in P_e$ ($u_0 \leq v_0$) با انتخاب $\epsilon \in (0, 1)$ ، به‌اندازهٔ کافی کوچک و $u_0 \geq \epsilon v_0$ روابط زیر برقرار هستند.

$$(H_1) \quad u_0 \leq A(u_0, v_0), \quad A(v_0, u_0) \leq v_0,$$

$$(H_2) \quad \forall t \in (0, 1), \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} n\eta(t, v_n, u_n) \geq \frac{1}{\epsilon} - 1,$$

که در آن $u_n = A(u_{n-1}, v_{n-1})$ و $v_n = A(v_{n-1}, u_{n-1})$ ($n = 1, 2, \dots$). در این صورت A یک نقطه ثابت منحصر به فرد x^* در P_ϵ دارد. به علاوه، با تشکیل دنباله‌های متوالی

$$x_n = A(x_{n-1}, y_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{و} \quad y_n = A(y_{n-1}, x_{n-1})$$

بازای مقادیر اولیه $x_0, y_0 \in P_\epsilon$ زمانی که $n \rightarrow +\infty$ داریم:

$$\|x_n - x^*\| \rightarrow 0, \quad \|y_n - x^*\| \rightarrow 0. \quad (3)$$

تعریف ۴. انتگرال ریمان-لیوویل از مرتبه $\alpha \geq 0$ برای تابع $f: (0, \infty) \rightarrow R$ بدین صورت تعریف می‌شود:

$$I_{0+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds,$$

به شرطی که انتگرال مذکور موجود باشد.

تعریف ۵. مشتق کسری ریمان-لیوویل از مرتبه $n-1 \leq \alpha < n$ برای تابع $f: (0, \infty) \rightarrow R$ بدین صورت تعریف می‌شود:

$$D_{0+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t (t-s)^{1-\alpha+n} f(s) ds,$$

که در آن $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$ ، مشروط بر این که حاصل انتگرال موجود باشد [۸]، [۹].
 لم ۱. فرض کنید $h \in C[0, 1]$ و $p \geq q > 0$. در این صورت این روابط برقرار است [۹]:

$$D_{0+}^p I_{0+}^q h(t) = I_{0+}^{q-p} h(t),$$

و

$$I_{0+}^p D_{0+}^p h(t) = c_1 t^{p-1} + c_2 t^{p-2} + \dots + c_n t^{p-n},$$

که $n = [p] + 1$ و $c_i \in R$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$).

نتایج اصلی

فرض کنید $a, b \in (0, \infty)$ و $a < b$. همچنین به ازای $\epsilon > 0$ ، $E = C([a, b] \times [\epsilon, T])$

فضای باناخ توابع پیوسته حقیقی مقدار روی $[a, b] \times [\epsilon, T]$ با نرم سوپریمم باشد، قرار می‌دهیم:

$$P = \{y \in C([a, b] \times [\epsilon, T]): \min_{(s,t) \in [a,b] \times [\epsilon,T]} y(s, t) \geq 0\}. \quad (4)$$

در این صورت P یک مخروط نرمال است.

لم ۲. فرض کنید $(s, t) \in [a, b] \times [\epsilon, T]$ ، $0 < \epsilon < T$ و $(s, \eta) \in [a, b] \times (\epsilon, t)$. در این صورت معادله

$$D_{0+}^\alpha u(s, t) + f(s, t, u(s, t), u(s, t)) = 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

با شرط مرزی $u(s, \eta) = u(s, T)$ جوابی مانند u_0 دارد فقط و فقط اگر u_0 یک جواب معادله انتگرال کسری زیر باشد.

$$u(s, t) = \int_\epsilon^T G(t, \xi) f(s, \xi, u(s, \xi), u(s, \xi)) d\xi,$$

که در آن

$$G(t, \xi) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}(\eta-\xi)^{\alpha-1}-t^{\alpha-1}(T-\xi)^{\alpha-1}}{(\eta^{\alpha-1}-T^{\alpha-1})\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \epsilon \leq \xi \leq \eta \leq t \leq T, \\ \frac{-t^{\alpha-1}(T-\xi)^{\alpha-1}}{(\eta^{\alpha-1}-T^{\alpha-1})\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \epsilon \leq \eta \leq \xi \leq t \leq T, \\ \frac{-t^{\alpha-1}(T-\xi)^{\alpha-1}}{(\eta^{\alpha-1}-T^{\alpha-1})\Gamma(\alpha)}, & \epsilon \leq \eta \leq t \leq \xi \leq T. \end{cases} \quad (5)$$

برهان. با توجه به

$$D_{0+}^{\alpha} u(s, t) + f(s, t, u(s, t), u(s, t)) = 0$$

و شرط مرزی به آسانی می‌توان مشاهده کرد که

$$u(s, t) - c_1 t^{\alpha-1} = -I_{\epsilon}^{\alpha} f(s, t, u(s, t), u(s, t)).$$

بنابراین

$$u(s, t) = c_1 t^{\alpha-1} - \int_{\epsilon}^t \frac{(t-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, \xi, u(s, \xi), u(s, \xi)) d\xi,$$

در نتیجه

$$u(s, \eta) = c_1 \eta^{\alpha-1} - \int_{\epsilon}^{\eta} \frac{(\eta-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, \xi, u(s, \xi), u(s, \xi)) d\xi,$$

و

$$u(s, T) = c_1 T^{\alpha-1} - \int_{\epsilon}^T \frac{(T-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, \xi, u(s, \xi), u(s, \xi)) d\xi.$$

با توجه به (۱)، $u(s, \eta) = u(s, T)$ و داریم

$$\begin{aligned} u(s, t) &= \frac{t^{\alpha-1}}{\eta^{\alpha-1} - T^{\alpha-1}} \int_{\epsilon}^{\eta} \frac{(\eta-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, \xi, u(s, \xi), u(s, \xi)) d\xi \\ &\quad - \frac{t^{\alpha-1}}{\eta^{\alpha-1} - T^{\alpha-1}} \int_{\epsilon}^T \frac{(T-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, \xi, u(s, \xi), u(s, \xi)) d\xi \\ &\quad - \int_{\epsilon}^t \frac{(t-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s, \xi, u(s, \xi), u(s, \xi)) d\xi = \int_{\epsilon}^T G(t, \xi) f(s, \xi, u(s, \xi), u(s, \xi)) d\xi. \end{aligned}$$

و این اثبات را کامل می‌کند.

قضیه ۲. اگر $0 < \epsilon < T$ ثابت باشد و $f: [a, b] \times [\epsilon, T] \times [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow R$ یک تابع پیوسته، صعودی نسبت به مؤلفه سوم و نزولی نسبت به مؤلفه چهارم به‌ازای $(s, t) \in [a, b] \times [\epsilon, T]$ باشد و $l \in (0, 1)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\varphi(l, u, v) \in (1, \infty)$ هم‌چنین برای $G(s, t) > 0$

$$f\left(s, t, lu(s, t), \frac{1}{l} v(s, t)\right) \geq l(1 + \varphi(l, u, v))f(s, t, u(s, t), v(s, t)),$$

و برای $G(s, t) < 0$

$$f(s, t, u(s, t), v(s, t)) = 0.$$

به علاوه، $u_0, v_0 \in P$ به‌طوری‌که برای $(s, t) \in [a, b] \times [\epsilon, T]$

$$u_0(s, t) \leq v_0(s, t),$$

$$\int_{\epsilon}^T G(t, \xi) f(s, \xi, u_0(s, \xi), v_0(s, \xi)) d\xi \geq u_0(s, t),$$

$$\int_{\epsilon}^T G(t, \xi) f(s, \xi, v_0(s, \xi), u_0(s, \xi)) d\xi \leq v_0(s, t),$$

و

$$\forall t \in (0,1), \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} n\varphi(t, v_n, u_n) \geq \frac{1}{\epsilon} - 1.$$

آن‌گاه مسئله (۱)، جواب منحصر به فرد در مخروط P رابطه (۴) دارد. به علاوه، برای دنباله‌های

$$u_{n+1} = \int_{\epsilon}^T G(t, \xi) f(s, \xi, u_n(s, \xi), v_n(s, \xi)) d\xi,$$

$$v_{n+1} = \int_{\epsilon}^T G(t, \xi) f(s, \xi, v_n(s, \xi), u_n(s, \xi)) d\xi,$$

داریم: $\|u_n - u^*\| \rightarrow 0, \|v_n - u^*\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$). که در آن u^* حد دنباله‌های $\{u_n\}$ و $\{v_n\}$ است. برهان. با به‌کارگیری لم ۲، مسئله (۱) با معادله انتگرال زیرمعادل است.

$$u(s, t) = \int_{\epsilon}^T G(t, \xi) f(s, \xi, u(s, \xi), v(s, \xi)) d\xi,$$

که در آن $G(t, \xi)$ همان رابطه داده شده در (۵) است.

با توجه به خواص تابع f و تعریف دنباله‌های $\{u_n(t)\}$ و $\{v_n(t)\}$ ، از این‌که به‌ازای $t \in [0,1]$ $u_0(t) \leq v_0(t)$ و به‌علاوه دنباله‌های $\{u_n(t)\}$ و $\{v_n(t)\}$ ، به‌ترتیب، صعودی از بالا کراندار و نزولی از پایین کراندار از اعداد حقیقی هستند، دنباله‌های مذکور همگرا به نقطه ثابتی مانند u^* هستند. عملگر $A: P \times P \rightarrow P$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم.

$$A(u_n(s, t), v_n(s, t)) = \int_{\epsilon}^T G(t, \xi) f(s, \xi, u_n(s, \xi), v_n(s, \xi)) d\xi.$$

به آسانی می‌توان مشاهده کرد که عملگر A صعودی بر حسب u و نزولی بر حسب v روی P است، از طرف دیگر برای $(s, t) \in [a, b] \times [\epsilon, T]$ و $l \in (0,1)$ تابع $\varphi(l, u, v) \in (1, \infty)$ طوری موجود است که

$$A\left(lu_n(s, t), \frac{1}{l}v_n(s, t)\right) = \int_{\epsilon}^T G(t, \xi) f\left(s, \xi, lu_n(s, \xi), \frac{1}{l}v_n(s, \xi)\right) d\xi$$

$$\geq l(1 + \varphi(l, u_n, v_n)) \int_{\epsilon}^T G(t, \xi) f(s, \xi, u_n(s, \xi), v_n(s, \xi)) d\xi$$

$$= l(1 + \varphi(l, u_n, v_n))A(u_n(s, t), v_n(s, t)).$$

بنابراین A در همه شرایط قضیه ۱ صدق می‌کند، از این‌رو، A جواب مثبت منحصر به فرد (u^*, u^*) دارد طوری‌که $A(u^*, u^*) = u^*$. این اثبات را کامل می‌کند.

در ادامه وجود و منحصر به فردی جواب مثبت معادله دیفرانسیل کسری (۶) را بررسی می‌کنیم.

$$D_{0+}^{\alpha} u(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [0,1], \quad 3 < \alpha \leq 4, \quad (6)$$

با این شرایط

$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0,$$

که در آن D_{0+}^{α} مشتق کسری ریمان-لیوویل از مرتبه α است. فضای باناخ توابع پیوسته روی $[0,1]$ را با نرم زیر در نظر بگیرید.

$$\|y\| = \max_{t \in [0,1]} |y(t)|.$$

فرض کنید:

$$P = \{y \in C[0,1]: \min_{t \in [0,1]} y(t) \geq 0\}. \quad (7)$$

در این صورت P یک مخروط نرمال است. زیرا بند (آ) در تعریف ۱ به وضوح برقرار است همچنین تابع پیوسته نامنفی که منفی برابر آن نیز نامنفی باشد برابر با تابع ثابت صفر است، از این رو، بند (ب) تعریف مذکور نیز صادق است. در مرجع [۹] لم‌های ۳ و ۴ را داریم.

لم ۳. فرض کنید $f \in C[0,1]$ و $3 < \alpha \leq 4$. جواب منحصر به فرد معادله دیفرانسیل

$$D_{0+}^{\alpha} u(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [0,1], \quad 3 < \alpha \leq 4, \quad (۸)$$

که در آن

$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0, \quad (۹)$$

بدین صورت است:

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s, u(s)) ds,$$

که در آن

$$(۱۰)$$

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\alpha-1} + (1-s)^{\alpha-2} t^{\alpha-2} [(s-t) + (\alpha-2)(1-t)s]}{\Gamma(\alpha)}, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \frac{(1-s)^{\alpha-2} t^{\alpha-2} [(s-t) + (\alpha-2)(1-t)s]}{\Gamma(\alpha)}, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

اگر $f(t, u(t)) = 1$ در این صورت جواب منحصر به فرد (۹)-(۸) با این رابطه داده می‌شود.

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s) ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha-2} (1-t)^2.$$

لم ۴. تابع $G(t,s)$ تعریف شده در (۱۰) دارای این خواص است:

الف) $G(t,s) > 0$ و به ازای هر $t, s \in [0,1]$ تابع $G(t,s)$ پیوسته است.

ب) $\frac{(\alpha-2)h(t)k(s)}{\Gamma(\alpha)} \leq G(t,s) \leq \frac{M_0 k(s)}{\Gamma(\alpha)}$ که در آن

$$M_0 = \max\{\alpha - 1, (\alpha - 2)^2\}, \quad h(t) = t^{\alpha-2} (1-t)^2, \quad k(s) = s^2 (1-s)^{\alpha-2},$$

قضیه ۳. فرض کنید $f: [0,1] \times [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow R$ تابع پیوسته، صعودی نسبت به مؤلفه دوم و نزولی

نسبت به مؤلفه سوم باشد و تابع $\varphi(l, u, v)$ وجود دارد به طوری که

$$f\left(t, lu(t), \frac{1}{l} v(t)\right) \geq l(1 + \varphi(l, u, v))f(t, u, v). \quad (۱۱)$$

همچنین، $u_0, v_0 \in P$ وجود دارند به طوری که به ازای هر $t \in [0,1]$

$$u_0(t) \leq v_0(t),$$

$$\int_0^1 G(t,s) f(s, u_0(s), v_0(s)) ds \geq u_0(t),$$

$$\int_0^1 G(t,s) f(s, v_0(s), u_0(s)) ds \leq v_0(t).$$

۹

$$\forall t \in (0,1), \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} n\varphi(t, v_n, u_n) \geq \frac{1}{\epsilon} - 1.$$

در این صورت مسئله (۸) با شرط مرزی (۹) جواب منحصر به فردی در P دارد. به علاوه برای دنباله‌های

$$u_{n+1} = \int_0^1 G(t,s)f(s, u_n(s), v_n(s))ds,$$

$$v_{n+1} = \int_0^1 G(t,s)f(s, v_n(s), u_n(s))ds,$$

داریم: $\|v_n - u^*\| \rightarrow 0, \|u_n - u^*\| \rightarrow 0$ که در آن u^* حد دنباله‌های $\{u_n\}$ و $\{v_n\}$ است. برهان. با به‌کارگیری لم ۳، مسئله (۹)–(۸) با معادله انتگرال زیرمعادل است.

$$u_{n+1}(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s, u_n(s), v_n(s))ds,$$

که در آن $G(t,s)$ همان رابطه داده شده در (۱۱) است.

با توجه به این که دنباله‌های $\{u_n(t)\}$ و $\{v_n(t)\}$ ، به ترتیب، صعودی از بالا کراندار و نزولی از پایین کراندار از اعداد حقیقی هستند، دنباله‌های مذکور همگرا به نقطه ثابتی مانند u^* هستند. عملگر $A: P \times P \rightarrow P$ را بدین صورت تعریف می‌کنیم.

$$A(u_n(t), v_n(t)) = \int_0^1 G(t,s)f(s, u_n(s), v_n(s))ds.$$

در این صورت u جوابی برای مسئله است فقط و فقط اگر $u = A(u, u)$. به آسانی می‌توان مشاهده کرد که عملگر A صعودی بر حسب u و نزولی بر حسب v روی P است. از طرف دیگر

برای $t \in [0,1]$ و $l \in (0,1)$ تابع $\varphi(l, u_n, v_n) \in (1, \infty)$ ($n \geq 0$)، طوری موجود است که

$$A\left(lu_n(t), \frac{1}{l}v_n(t)\right) = \int_0^1 G(t,s)f\left(s, l u_n(s), \frac{1}{l}v_n(s)\right)ds$$

$$\geq l(1 + \varphi(l, u_n, v_n)) \int_0^1 G(t,s)f(s, u_n(s), v_n(s))ds$$

$$= l(1 + \varphi(l, u_n, v_n))A(u_n(t), v_n(t)).$$

بنابراین A در همه شرایط قضیه ۱ صدق می‌کند، از این رو، A جواب مثبت منحصر به فرد (u^*, u^*) دارد به طوری که $A(u^*, u^*) = u^*$. این اثبات را کامل می‌کند.

مثال. معادله دیفرانسیل کسری

$$D_{0+}^{\frac{7}{2}} u(t) = f(t, u(t)) = \sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}}. \quad (12)$$

را با شرایط (۱۳) در نظر بگیرید.

$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0. \quad (13)$$

تابع گرین این مسئله با رابطه (۱۱) مشخص می‌شود. با توجه به لم ۴ داریم:

$$\min_{t \in [0,1]} \int_0^1 G(t,s)ds = 0.00001$$

$$\max_{t \in [0,1]} \int_0^1 G(t,s)ds = 0.004$$

فرض کنید:

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad u(t) = \sqrt{t}, \quad \epsilon = \frac{1}{2}$$

هم‌چنین

$$\varphi(l, v_n, u_n) = \frac{l + u_n + v_n}{n(u_n + v_n)}.$$

قرار می‌دهیم:

$$\varphi(l, v, u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(l, v_n, u_n).$$

به‌وضوح رابطه (۱۱) برقرار است زیرا

$$f\left(t, lu(t), \frac{1}{l}v(t)\right) = \sqrt{l}\left(\sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{v}}\right) \geq l\left(\sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{v}}\right), \quad (0 < l < 1).$$

با انتخاب $t_0 = 10^{-6}$ داریم:

$$u_0 = u(t_0) = 10^{-3}, \quad v_0 = v(t_0) = 10^3,$$

بنابراین $u_0 \leq v_0$ از طرف دیگر

$$\int_0^1 G(t, s)f(s, u_0, v_0)ds = (10^{-3} \times 10^3) \int_0^1 G(t, s)ds.$$

که با استفاده از روابط (۱۲) به‌دست می‌آوریم:

$$\int_0^1 G(t, s)f(s, u_0, v_0)ds \geq (10^{-3} \times 10^3) \times 10^{-5} \geq 10^{-3},$$

$$\int_0^1 G(t, s)f(s, v_0, u_0)ds \leq (10^{-3} \times 10^3) \times 4 \times 10^{-3} \leq 10^3.$$

هم‌چنین

$$\forall t \in (0, 1), \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} n\varphi(t, v_n, u_n) \geq \frac{1}{\epsilon} - 1.$$

در این صورت طبق قضیه ۳ مسئله (۱۲) با شرایط مرزی (۱۳) جواب منحصر به‌فردی در $[10^{-3}, 10^3]$ دارد.

منابع

1. Agarwal Ravi P., "Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems", J. Math. Anal. Appl (2002) 368-379.
2. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I., "Fractional Integral and Derivative: Theory and Application", Gordon & Breach, Switzerland (1993).
3. Baleanu D., Mustafa O. G., Agarwal R. P., "On the solution set for a class of sequential fractional differential equations", J. phys. A. Math. Theory. 43(38), Article ID, 385209 (2010).
4. Guo D., Lakshmikantham V., "Coupled fixed points of nonlinear operators with applications", Nonlinear Anal. 11 (5) (1987) 623-632.
5. Xiaojie X., Daqing J., Chengjun Y., "Multiple positive solutions for the boundary value problem of a nonlinear fractional differential equation", Nonlinear Analysis, 71 (2009) 4676-4688.
6. Baleanu D., Agarwal R., Mohammadi H., Rezapour S. "Some existence results for a nonlinear fractional differential equation on partially ordered Banach spaces", Boundary Value Problems (2013)112.
7. Du X., "New fixed point theorems of mixed monotone operators", Applied Mathematics, 5 (2014) 352-357.
8. Podlubny I., "Fractional Differential Equations", Academic Press, New York (1999).
9. Kilbas A. A., Srivastava H. H., Trujillo J. J., "Theory and Applications of Fractional Differential Equations", Elsevier, Amsterdam (2006).