حل مسائل کنترل بهینه با معادلات انتگرالی یا معادلات انتگرال-دیفرانسیل به‌کمک توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی

حمید مسگرانی*، حمید صفدری، ابوالفضل قاسمیان کریک
دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، گروه ریاضی

دریافت ۹۶/۱۱/۱۰ پذیرش ۹۷/۰۵/۱۷

چکیده

در این مقاله روشی عددی مبتنی بر توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی برای حل مسائل کنترل بهینه با سیستم دینامیکی معادله انتگرالی یا معادله انتگرال-دیفرانسیل بحث می‌شود. ماتریس‌های عملیاتی مشتق و انتگرال حاصل‌ضرب دو بردار موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی، روش هم‌محلی و قاعده انتگرال‌گیری گاوس-لژاندر برای گسسته‌سازی مسئلهٔ کنترل بهینه پیوسته و تبدیل آن به یک مسئلهٔ برنامه‌ریزی غیرخطی به‌کار گرفته می‌شود. همگرایی توابع کنترل و حالت و تابعک معیار بهینه تقریبی حاصل از روش پیشنهادی و هم‌چنین کران بالای خطای آنها به‌دست آورده می‌شوند. مثال‌های عددی کارایی، دقت و مفید بودن ایدهٔ پیشنهادی را نشان می‌دهند.

واژه های کلیدی: ماتریس عملیاتی، مسائل کنترل بهینه، معادلات انتگرال، توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین، روش هم‌محلی، انتگرال‌گیری عددی، ماتریس عملیاتی.

مقدمه

سیستم کنترلی مجموعه‌ای از دستگاه‌های قابل کنترل هماهنگ است که باعث می‌شوند تا یک سری از عملیات مطابق دستورالعمل و یا هدف خاصی تحقق پذیرد. به‌عبارت دیگر یک سیستم کنترلی آن‌چنان سیستمی است که خروجی مطلوب به‌وسیلهٔ عملیاتی روی ورودی سیستم‌ها حاصل می‌شود. کنترل به معنی اعمال روش‌ها و وسیله‌هایی است که استفاده شده است تا بر عملکرد یک سیستم یا دستگاه یا ماشین اثر بگذارند [۱]. مسائل کنترلی باید به‌صورت ریاضی مدل‌سازی شوند، در مسائل کنترلی کلاسیک فضای حالت سیستم به‌صورت معادلهٔ دیفرانسیل بیان می‌شود، بسیاری از سیستم‌های فیزیکی، تکنولوژی، زیست‌شناسی، ویسکوالاستیکی، الکتروشیمی، اقتصادی و به‌طورکلی سیستم‌هایی که دارای اثر حافظه هستند را نمی‌توان به‌صورت معادله دیفرانسیل معمولی توصیف کرد. از این رو معادلهٔ این سیستم‌ها را به‌صورت معادلات انتگرالی، معادلات انتگرال-دیفرانسیل، معادلات دیفرانسیل کسری و انتگرال دیفرانسیل کسری بیان می‌کنند [۲]-[۷].

فرض کنیم که سیستم قابل کنترل است، از این‌رو، در جستجوی کنترل‌هایی هستیم که انتقال مورد نظر سیستم را به بهترین نحو انجام دهد پس هر جا بحث از سیستم‌های کنترلی می‌آید همراه با آن کنترل بهینه نیز مطرح می‌شود. نظریهٔ کنترل بهینه در طول ۴۰ سال اخیر به سرعت توسعه یافته و در خدمت مسائل گوناگون علوم مهندسی، بیولوژی ، اقتصادی و مسائل علوم اجتماعی قرار گرفته است. مسائل بسیار زیادی در طراحی بدنه هواپیماها و کشتی‌ها، در

* نویسنده مسئول hmesgarani@sru.ac.ir

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.10.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.119]

الکترونیک و سایر حیطه‌های علوم مهندسی در واقع مسائل کنترل بهینه هستند.

روش‌های متداولی برای حل مسائل کنترل بهینه با فضای حالت سیستم به‌صورت معادلات معمولی، کسری و انتگرالی وجود دارد؛ از جمله می‌توان به‌روش مبتنی بر استفاده از اویلر- لاگرانژ، روش استفاده از اصل ماکسیمم پونتریاگین، روش‌های عددی مبتنی بر تفاضل متناهی، جزءهای متناهی، روش گرادیان مزدوج ،روش‌های طیفی، روش‌های استفاده از توابع متعامد پیوسته، روش بسط توابع و ماتریس‌های عملیاتی برای انتگرال و روش نشاندن اشاره کرد.

روش‌هایی که در سال‌های اخیر همواره مورد توجه محققان برای حل مسائل کنترل بهینه با فضای حالت سیستم به‌صورت معادلات انتگرال، انتگرال-دیفرانسیل و معادلات دیفرانسیل کسری است، که به برخی از این موارد اشاره می‌شود. بیلباس [۸] مسائل کنترل بهینه تحت سیستم معادلات انتگرال را با یک دنباله از سیستم‌های تحت معادلات دیفرانسیل معمولی تقریب می‌زند، او چند روش عددی را در [۹] و [۱۰] برای حل این نوع مسائل بررسی کرده و به شرایط تضمین کننده همگرایی برای این روش‌ها پرداخته است. توحیدی و صمدی در [۱۱] مسائل کنترل بهینهٔ انتگرال ولترای غیرخطی و انتگرال-دیفرانسیل را با استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندر حل می‌کنند. مالک‌نژاد و ابراهیمی در [۱۲] از روش موجک‌های لژاندر و هم‌محلی و در [۱۳] از هیبرید توابع بلاک-پالس و چندجمله‌ای‌های لژاندر برای حل مسائل کنترل بهینهٔ معادلات انتگرال و انتگرال-دیفرانسیل استفاده می‌کنند. در [۲۷] رحیم‌خانی و همکارانش ماتریس عملیاتی انتگرال کسری ریمان-لیوویل موجک‌های برنولی را برای حل مسائل کنترل بهینهٔ کسری تأخیری به‌کار گرفته‌اند و هم‌چنین آنها در [۲۸] روش محاسباتی جدیدی را با ایده به‌کارگیری ماتریس‌های عملیاتی انتگرال مرتبهٔ کسری موجک مونتز-لژاندر استفاده کرده‌اند. در [۲۹] روشی برپایهٔ عملگرهای انتگرال کسری ریمان-لیوویل توابع لژاندر-برنولی مرتبهٔ کسری تعمیم یافته برای حل یک دسته از مسائل کنترل بهینه کسری دوبعدی ارائه شده است. مقالات دیگری با انواع روش‌های مختلف و کارا برای حل این‌گونه از مسائل وجود دارد که می‌توان به [۱۴]-[۱۷] اشاره‌کرد.

در این مقاله بردار حاصل از توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی، دوگان و ماتریس‌های عملیاتی انتگرال حاصل‌ضرب و مشتق آنها به‌کار برده می‌شود تا تقریب تابع کنترل بهینه $u^*(t)$ و تابع حالت بهینه $x^*(t)$ متناظر با آن که تابعک معیار درجهٔ دوم

$$\min J = \int_0^1 (u^2(t) + x^2(t) + f(t)x(t) + g(t)u(t))dt, \qquad (۱)$$

را کمینه کند و در سیستم دینامیکی فضای حالت با شرط

$$x(t) = y(t) + \int_0^t K(s,t,x(s),u(s))ds. \qquad (۲)$$

یا

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)u(t) + \int_0^t (K(t,s)\eta(x(s),u(s)))ds,\ x(0) = x_0. \qquad (۳)$$

صدق کند. که در آن توابع x و u متعلق به فضای $C^{(4)}(\mathbb{R})$ ، f و g توابع حقیقی مقدار هستند، K نیز نسبت به متغیرهایش در شرط لیپ‌شیتز صدق کند. هم‌چنین از قاعدهٔ انتگرال‌گیری عددی گاوس-لژاندر و روش هم‌محلی برای تبدیل مسئله پیوسته و نامتناهی‌البعد به مسئلهٔ برنامه‌ریزی غیرخطی پیوسته متناهی‌البعد استفاده

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.10.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.119]

می‌شود.

محتوای غنی ریاضیات، مفید بودن در تقریب و توانایی بالای کاربرد موجک‌ها آن‌قدر راضی کننده و مطمئن بود که به سرعت توجه مهندسان و افراد با تخصص‌های گوناگون را برای حل مسائل مختلف با استفاده از این نظریه، جلب‌کرد. توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی شبه متعامد است، با معرفی فضای دوگان آنها شرایط متعامدی ایجاد می‌شودکه با تصویر توابع موجود در تابعک معیار درجهٔ دوم در هر دو فضا می‌توان به‌سادگی بدون محاسبه انتگرال یک تابع هدف غیرخطی را داشت. بی‌اسپلاین‌های مکعبی دارای گشتاورهای صفر و تکیه‌گاه فشرده است بنابراین ماتریس‌های عملیاتی آنها تنک و درایه‌های نزدیک به صفر هستند که گاهی اوقات می‌توان با صفر قرار دادن درایه‌های بسیار کوچک به‌طوری‌که ماتریس‌های عملیاتی پایدار باقی بمانند برای سادگی محاسبات، کاهش زمان عملیات بهره‌برد، هم‌چنین باعث می‌شود که حافظهٔ کم‌تری برای ذخیره‌سازی درایه‌ها استفاده شود. این ماتریس‌های عملیاتی نیز می‌توانند برای حل انواع مختلفی از مسائل ریاضی فراخوانی شوند. توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین دارای شکل بسته و متقارن است بنابراین به‌راحتی به‌دست می‌آیند. از دیگر ویژگی‌های مطلوب این بی‌اسپلاین‌ها می‌توان به تجزیهٔ متعامد چندگانه اولیه و دوگان، پایه ریس بودن آنها برای فضاهای مختلف و مرتبهٔ نمایی خطای تقریب اشاره کرد. در [۱۸]-[۲۵] از موجک‌های بی‌اسپلاین برای حل معادلات دیفرانسیل کسری، معادلات مشتقات جزئی کسری، معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم و معادلات انتگرال غیرخطی، مسائل کنترل بهینه با تابک معیار درجه دوم و محدودیت‌های غیرخطی، مسائل مقدار مرزی منفرد و حل مسائل مقدار مرزی مرتبهٔ کسری با تبدیل به مسائل کنترل بهینه استفاده شده است. در [۳۰] چند موجکی‌های اسپلاین هرمیت مکعبی روی یک بازه برای حل مسائل کنترل بهینهٔ کسری بدون بررسی آنالیز خطا و همگرایی به‌کار برده شده‌اند. هم‌چنین در [۳۱] روشی عددی برای حل مسائل کنترل بهینه با شرایط معادلات دیفرانسیل به‌کمک توابع مقیاس بی‌اسپلاین بیان شده که در این روش ماتریس عملیاتی مشتق توابع مقیاس بی‌اسپلاین مربعی با استفاده از توابع مقیاس بی‌اسپلاین خطی به‌دست آمده است.

ساختار باقی‌مانده این مقاله بدین‌شرح است: در بخش ۲ توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی و دوگان آنها روی بازهٔ بسته و کراندار $[0,1]$ معرفی و ماتریس‌های عملیاتی انتگرال حاصل‌ضرب و مشتق این توابع برای تقریب مسئلهٔ کنترل بهینه به‌دست می‌آید. در بخش ۳ با بسط توابع کنترل و حالت بر اساس توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی و استفاده از ماتریس‌های عملیاتی، روش هم‌محلی و قاعدهٔ انتگرال‌گیری گاوس- لژاندر مسئلهٔ کنترل بهینه به مسئلهٔ برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌شود. تجزیهٔ همگرایی و کران بالای خطا برای جواب بهینهٔ تقریبی حاصل از روش ارائه شده در مقاله در بخش ۴ بررسی می‌شود. در بخش ۵ با حل دو مثال برای مسئله کنترل بهینه با سیستم دینامیکی معادله انتگرالی و دو مثال با معادله انتگرال-دیفرانسیل به‌کمک نرم‌افزارهای ریاضی کارایی و دقت این روش نشان داده می‌شود.

توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی

در این بخش ابتدا توابع مقیاس و موجک‌های شبه متعامد با تکیه‌گاه فشردهٔ بی‌اسپلاین مکعبی روی یک بازهٔ کراندار را معرفی می‌کنیم از آن‌جاکه فضای مقیاس و موجک دارای بعد متناهی در یک سطح معین است، هر تابع روی یک بازه به‌وسیلهٔ تعدادی متناهی موجک‌ها و توابع مقیاس نمایش داده می‌شود، آنها فضاهایی متناهی‌البعد شامل

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.10.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.119]

موجک‌ها و توابع مقیاس مرزی و داخلی را تشکیل می‌دهند، از این‌رو نقش مهمی را در تحلیل عددی مسائل کنترل بهینه با شرایط معادلات انتگرال و معادلات انتگرال -دیفرانسیل بازی می‌کنند [۱۸]، [۲۴]، [۲۶].

تعریف ۱. دنبالهٔ گره‌های $X^{(j_0)}$ *روی بازهٔ* $[0,1]$ *برای* $j_0 \in \mathbb{N}$ بدین‌صورت در نظر گرفته می‌شود:

$$X^{j_0} : x_{-3} = ... = x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{2^{j_0}} < x_2 = \frac{2}{2^{j_0}} < ...$$

$$< x_k = \frac{k}{2^{j_0}} < ... < 1 = x_{2^{j_0}} = ... = x_{2^{j_0}+3}$$

برای این دنباله گره‌ها توابع مقیاس بی‌اسپلاین مکعبی روی $[0,1]$ با رابطهٔ بازگشتی (۴) بیان می‌کنیم:

$$\varphi^{(4)}_{X^{(j_0)},k}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+3} - x_k}\varphi^{(3)}_{X^{(j_0)},k}(x) + \frac{x_{k+4} - x}{x_{k+4} - x_{k+1}}\varphi^{(3)}_{X^{(j_0)},k+1}(x) \qquad (۴)$$

که

$$\varphi^{(1)}_{X^{(j_0)},k}(x) = \chi[x_k, x_{k+1}](x), \quad k = 0,1,...,2^{j_0} - 1$$

قرار می‌دهیم:

$$V_{j_0} = \overline{span}\{\varphi^{(4)}_{j_0,k}(x), k = -3,-2,...,2^{j_0} - 1\}$$

واضح است که V_{j_0} یک زیرفضای سرهٔ V_{j_0+1} است، با تعریف

$$v_i = \varphi_{j_0,i-4}(x) = B_{X^{(j_0)},4;i-4}(x), \quad i = 1,...,2^{j_0} + 3,$$

$$u_i = \varphi_{j_0+1,i-4}(x) = B_{X^{(j_0+1)},4;i-4}(x), \quad i = 1,...,2^{j_0+1} + 3$$

تعریف ۲. *زیرفضای* W_{j_0} *مکمل متعامد* V_{j_0} *طبق قضیه تجزیهٔ متعامد و شرایط متعامدی با استفاده از روابط (۵) تشریح می‌شود:*

$$W_{j_0} = \overline{span}\{\psi^{(4)}_{j_0,k}(x), k = -3,...,2^{j_0} - 4\}, \quad \psi^{(4)}_{j_0,i-4}(x) = w_i, \quad i = 1,...,2^{j_0} \qquad (۵)$$

$\psi^{(4)}_{j_0,k}(x), k = -3,...,2^{j_0} - 4$ پایهٔ فضای W_{j_0} را موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی متناظر با توابع مقیاس بی‌اسپلاین مکعبی پایه فضای V_{j_0} می‌نامند. هم‌چنین w_i نیز با معادلهٔ $w_i = \frac{1}{\|\Omega_i\|_2}\Omega_i$ به‌دست می‌آید به‌طوری‌که

$$\Omega_i = det\begin{pmatrix} u_i & u_{i+1} & \cdots & u_{2i+6} \\ < u_i, v_1 > & < u_{i+1}, v_1 > & \cdots & < u_{2i+6}, v_1 > \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ < u_i, v_{i+6} > & < u_{i+1}, v_{i+6} > & \cdots & < u_{2i+6}, v_{i+6} > \end{pmatrix}, \quad i = 1,2,3$$

$$\Omega_i = det\begin{pmatrix} u_{2i-4} & u_{2i-3} & \cdots & u_{2i+6} \\ < u_{2i-4}, v_{i-3} > & < u_{2i-3}, v_{i-3} > & \cdots & < u_{2i+6}, v_{i-3} > \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ < u_{2i-4}, v_{i+6} > & < u_{2i-3}, v_{i+6} > & \cdots & < u_{2i+6}, v_{i+6} > \end{pmatrix}, \quad i = 4,5$$

$w_i, (i = 1,2,3)$ و $w_i, (i = 4,5)$ به‌ترتیب موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی داخلی و مرزی چپ است. هم‌چنین به‌دلیل خاصیت تقارن موجک‌های بی‌اسپلاین برای موجک‌های بی‌اسپلاین مرزی راست خواهیم داشت:

$$w_i = \psi_{j_0,5-i}(1-x), \quad i = 6,7,8$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.10.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.119]

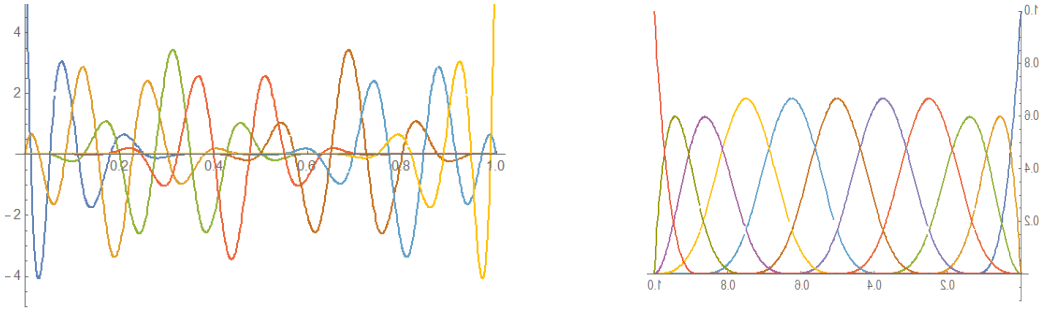
شکل ۱ توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی در فضاهای V_3 و W_3 را نشان می‌دهد.

موجک‌های $\psi_{j,k}^{(4)}(x)$ برای $j \geq j_0$ با رابطهٔ (۶) داده می‌شود:

$$\psi_{j,k}^{(4)}(x)=\begin{cases}\psi_{j_0,k}^{(4)}(2^{j-j_0}x) & k=-3,-2,-1\\ \psi_{j_0,2^j-7-k}^{(4)}(1-2^{j-j_0}x) & k=2^j-6,\ldots,2^j-4\\ \psi_{j_0,0}^{(4)}(2^{j-j_0}x-\dfrac{k}{2^j0}) & k=0,\ldots,2^j-7\end{cases} \qquad (۶)$$

به‌وضوح قابل اثبات است که W_j برای $j\in\mathbb{Z}$ مکمل متعامد V_j در V_{j+1} است و $\{\psi_{j,k}^{(4)}, k, j\in\mathbb{Z}\}$ یک پایهٔ ریس برای $L^2(\mathbb{R})$ است، پس بنابر قضیهٔ تجزیهٔ متعامد و تجزیهٔ چندگانه داریم:

$$L^2(\mathbb{R})=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\oplus W_j=V_{j_0}\oplus\sum_{j=j_0}^{\infty}\oplus W_j=\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}V_j} \qquad (۷)$$



ب　　الف

شکل ۱. الف) توابع مقیاس بی‌اسپلاین مکعبی در فضای V_3، ب)موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی در فضای W_3

از طرفی تکیه‌گاه تابع مقیاس بی‌اسپلاین مکعبی بازهٔ $[0,1]$ و تکیه‌گاه موجک متناظر بازهٔ $[0,7]$ است. در هر مقیاس تجزیه، طول گام $\frac{1}{2^j}$ است بنابراین برای هر $j>0$، بازهٔ $[0,1]$ به 2^j زیربازه تقسیم می‌شود از این‌رو، برای این‌که حداقل یک موجک درونی در بازه داشته باشیم، j باید به‌گونه‌ای انتخاب شود که $2^j\geq 7$، پس پایین‌ترین سطح برای j عبارت است از: $j=j_0=3$.

در نتیجه با توجه به مفروضات بالا و طبق رابطهٔ (۷)، تصویر متعامد $f(x)$ در فضای $L^2(\mathbb{R})$ با j_u معین به‌صورت (۸) بیان می‌شود :

$$f(x)\simeq\sum_{k=-3}^{2^{j_0}-1}c_{j_0,k}\varphi_{j_0,k}^{(4)}(x)+\sum_{j=j_0}^{j_u}\sum_{k=-3}^{2^j-4}d_{j,k}\psi_{j,k}^{(4)}(x) \qquad (۸)$$

که ضرایب $c_{j_0,k}$ و $d_{j_0,k}$ با استفاده از معادلات (۹) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}c_{j_0,k}&=\int_0^1 f(x)\tilde{\phi}_{j,k}^{(4)}(x),\ k=-3\ldots2^{j_0}-1\\ d_{j_0,k}&=\int_0^1 f(x)\tilde{\psi}_{j,k}^{(4)}(x),\ k=-3,\ldots,2^j-4,\ j=j_0,\ldots,j_u.\end{aligned} \qquad (۹)$$

توابع $\tilde{\phi}_{j,k}^{(4)}$ و $\tilde{\psi}_{j,k}^{(4)}$ را به‌ترتیب دوگان توابع $\phi_{j_0,k}^{(4)}$ و $\psi_{j,k}^{(4)}$ می‌گویند. با توجه به این‌که توابع مقیاس و موجک‌های

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.10.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.119]

بی‌اسپلاین مکعبی شبه متعامد است، از این‌رو برای استفادهٔ بهتر از آنها برای تقریب، تجزیهٔ چندگانه دوگان را با زیرفضاهای $\tilde{V}_j = \{\tilde{\varphi}^{(4)}_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$ و $\tilde{W}_j = \{\tilde{\psi}^{(4)}_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$ که در شرایط تعامد (۱۰) صدق می‌کنند، به‌کار می‌بریم.

$$\tilde{V}_j \perp W_j ,\ V_j \perp \tilde{W}_j ,\ \tilde{W}_j \perp W_i ,\ j \neq i \qquad (۱۰)$$
$$\tilde{V}_j \perp W_i ,\ V_j \perp \tilde{W}_i ,\ i \geq j$$

با فرض

$$\gamma_{j_u}(x) = [\varphi^{(4)}_{j_0,-3}(x), ..., \varphi^{(4)}_{j_0,2^{j_0}-1}(x), \psi^{(4)}_{j_0,-3}(x), ..., \psi^{(4)}_{j_0,2^{j_0}-4}(x),\ \psi^{(4)}_{j_0+1,-3}(x), ..., \psi^{(4)}_{j_u,2^{j_u}-4}(x)]^T$$
$$\rho = [c_{j_0,-3}, ..., c_{j_0,2^{j}_{0}-1}, d_{j_0,-3}, ..., d_{j_0,2^{j_0}-4}, d_{j_0+1,-3}, ..., d_{j_u,2^{j_u}-4}] \qquad (۱۱)$$

رابطهٔ (۸) می‌تواند به‌صورت ماتریسی (۱۲) نوشته شود.

$$f(x) \simeq \rho \gamma_{j_u}(x) \qquad (۱۲)$$

هم‌چنین با در نظر گرفتن $\tilde{\gamma}_{j_u}(x)$ به‌عنوان ماتریس دوگان توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی داریم:

$$\tilde{\gamma}_{j_u}(x) = T\gamma_{j_u}(x) \qquad (۱۳)$$

طرفین رابطهٔ (۱۳) را در $\gamma^T_{j_u}(x)$ ضرب کرده و روی بازهٔ $[0,1]$ انتگرال می‌گیریم، با استفاده از (۱۰) به‌دست می‌آید:

$$P = T^{-1} = \int_0^1 \gamma_{j_u}(x)\gamma^T_{j_u}(x)dx \qquad (۱۴)$$

پس داریم: $\tilde{\gamma}_{j_u}(x) = P^{-1}\gamma_{j_u}(x)$.

اگر مشتق تابع برداری $\gamma^T_{j_u}(x)$ به‌صورت $\gamma'_{j_u}(x) = D_{j_u}\gamma_{j_u}(x)$ در نظر گرفته شود، داریم:

$$D_{j_u} = \int_0^1 \gamma'_{j_u}(x)\tilde{\gamma}^T_{j_u}(x)dx = \int_0^1 \gamma'_{j_u}(x)(P^{-1}\gamma_{j_u}(x))^T dx = E_\gamma (P^{-1})^T \qquad (۱۵)$$

که $E_\gamma = \int_0^1 \gamma'_{j_u}(x)\gamma^T_{j_u}(x)dx$. D_{j_u} و P را به‌ترتیب ماتریس عملیاتی مشتق و انتگرال حاصل‌ضرب توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی می‌نامند.

حل عددی مسئلهٔ کنترل بهینه با قید معادله انتگرالی یا قید معادله انتگرال-دیفرانسیل

در این بخش مسائل کنترل بهینه با قیود معادلات انتگرالی یا انتگرال -دیفرانسیل و تابعک معیار درجهٔ دوم را با استفاده از ماتریس‌های عملیاتی انتگرال حاصل‌ضرب و مشتق حاصل از بسط توابع کنترل و حالت بر اساس توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی، روش هم‌محلی و قاعدهٔ انتگرال گیری گاوس-لژاندر به یک مسئلهٔ بهینه‌سازی غیرخطی تبدیل کرده و به‌کمک نرم‌افزار Mathematica10.4 آن را حل می‌کنیم، و از آن‌جا توابع کنترل و حالت بهینه به‌دست می‌اید. هم‌چنین به بحث در مورد پیچیدگی محاسباتی روش می‌پردازیم.

۱. تقریب تابعک معیار

برای تقریب تابعک معیار ابتدا هر یک از توابع حالت، کنترل و هم‌چنین توابع $f(t)$ و $g(t)$ را بر اساس توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی و دوگان آنها به‌صورت (۱۶) بسط می‌دهیم.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.10.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.119]

$$x(t) \simeq X\gamma_{j_u}(t), \quad u(t) \simeq U\gamma_{j_u}(t),$$
$$f(t) \simeq F\tilde{\gamma}_{j_u}(t), \quad g(t) \simeq G\tilde{\gamma}_{j_u}(t) \qquad (۱۶)$$

که بردارهای سطری F و G به‌دلیلمعلوم بودن f و g بردارهای معلومی هستند و از رابطهٔ (۹) به‌دست می‌آیند. $\gamma_{j_u}(t)$ و $\tilde{\gamma}_{j_u}(t)$ بردارهای توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین و دوگان آنها تعریف شده در (۱۱) و (۱۳) هستند. هم‌چنین X و U بردارهای مجهول از مرتبهٔ $(2^{j_u+1}+3)$، به‌صورت‌های (۱۷) بیان می‌شوند.

$$X = [x_1, x_2, ..., x_{2^{j_u+1}+3}], \quad U = [u_1, u_2, ..., u_{2^{j_u+1}+3}] \qquad (۱۷)$$

با جای‌گذاری روابط (۱۶) در تابعک معیار (۱) به‌دست می‌آوریم:

$$\tilde{J}(X,U) = \int_0^1 (U\gamma_{j_u}(t)\gamma_{j_u}^T(t)U^T + X\gamma_{j_u}(t)\gamma_{j_u}^T(t)X^T + F\tilde{\gamma}_{j_u}(t)\gamma_{j_u}^T(t)X^T + G\tilde{\gamma}_{j_u}(t)\gamma_{j_u}^T(t)U^T)dt, \qquad (۱۸)$$

با توجه به این‌که توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی و دوگان آنها طبق (۱۰) متعامد یکه است؛ هم‌چنین با به‌کار بردن رابطهٔ (۱۴) داریم:

$$\tilde{J}(X,U) = UPU^T + XPX^T + FX^T + GU^T \qquad (۱۹)$$

رابطهٔ (۱۹) نشان می‌دهد که $\tilde{J}$ تابعی غیرخطی از X و U می‌باشد.

۲. تقریب سیستم با معادله انتگرالی

تابع حالت x و کنترل u را که به‌صورت (۱۶) بسط داده شده است در سیستم دینامیکی (۲) جای‌گذاری می‌کنیم، بنابراین به‌دست می‌آوریم:

$$X\gamma_{j_u}(t) = y(t) + \int_0^t K(s,t,X\gamma_{j_u}(t),U\gamma_{j_u}(t))ds \qquad (۲۰)$$

نقاط هم‌محلی t_i را به‌صورت (۲۱) تعریف می‌کنیم:

$$t_i = \frac{2i-1}{2(2^{j_u+1}+3)}, \quad ,i = 1,2,...,2^{j_u+1}+3 \qquad (۲۱)$$

با قرار دادن این نقاط در (۲۰) داریم:

$$X\gamma_{j_u}(t_i) = y(t_i) + \int_0^{t_i} K(s,t_i,X\gamma_{j_u}(s),U\gamma_{j_u}(s))ds, \quad ,i = 1,2,...,2^{j_u+1}+3 \qquad (۲۲)$$

برای محاسبهٔ انتگرال‌های موجود در (۲۲) از قاعدهٔ انتگرال‌گیری گاوس -لژاندر استفاده می‌کنیم. بنابراین بازهٔ انتگرال‌گیری باید به بازهٔ $[-1,1]$ تبدیل شود. برای این کار از تغییر متغیر $s = \frac{t_i}{2}(\tau+1)$ استفاده می‌کنیم، در نتیجه (۲۲) به سیستم (۲۳) تبدیل می‌شود:

(۲۳)

$$X\gamma_{j_u}(t_i) = y(t_i) + \frac{t_i}{2}\int_{-1}^1 K(\frac{t_i}{2}(\tau+1),t_i,X\gamma_{j_u}(\frac{t_i}{2}(\tau+1)),U\gamma_{j_u}(\frac{t_i}{2}(\tau+1)))d\tau, \quad i = 1,2,...,2^{j_u+1}+3$$

با اعمال قاعدهٔ انتگرال‌گیری عدی گاوس-لژاندر به‌دست می‌آید؛

(۲۴)

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.10.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.119]

$$X\gamma_{j_u}(t_i)=y(t_i)+\frac{t_i}{2}\sum_{j=1}^{2^{j_u+1}+3}w_jK(\frac{t_i}{2}(\tau_j+1),t_i,X\gamma_{j_u}(\frac{t_i}{2}(\tau_j+1)),U\gamma_{j_u}(\frac{t_i}{2}(\tau_j+1))),\quad ,i=1,2,...,2^{j_u+1}+3$$

که $\tau_j\in[-1,1]$ها صفرهای چندجمله‌ای لژاندر $p_{2^{j_u+1}+3}$ است و w_jها وزن‌های متناظر آنها هستند که از رابطهٔ (۲۵) به‌دست می‌آیند:

$$w_j=\frac{2}{(1-\tau_j^2)(p'_{2^{j_u+1}+3}(\tau_j))^2},\quad j=1,2,...,2^{j_u+1}+3 \qquad (۲۵)$$

۳. تقریب سیستم دینامیکی با معادله انتگرال-دیفرانسیل

برای تقریب سیستم دینامیکی (۳)، $x(t)$ و $u(t)$ را به‌صورت (۱۸) در نظر می‌گیریم، بنابراین برای $x'(t)$ از رابطهٔ (۱۵) داریم:

$$x'(t)\simeq D_{j_u}X\gamma_{j_u}(t) \qquad (۲۶)$$

اکنون با جای‌گذاری روابط (۱۶) و (۲۶) در (۳) و استفاده نقاط هم‌محلی (۲۶) و هم‌چنین با به‌کارگیری قاعده انتگرال‌گیری گاوس-لژاندر داریم:

$$D_{j_u}X\gamma_{j_u}(t_i)=a(t_i)X\gamma_{j_u}(t_i)+b(t_i)U\gamma_{j_u}(t_i)+\frac{t_i}{2}\sum_{j=1}^{2^{j_u+1}+3}w_jK\left(t_i,\frac{t_i}{2}(\tau_j+1)\right) \qquad (۲۷)$$

$$\eta\Big(X\gamma_{j_u}(\frac{t_i}{2}(\tau_j+1)),U\gamma_{j_u}(\frac{t_i}{2}(\tau_j+1))\Big),\quad X\gamma_{j_u}(0)=x_0,\ i=1,2,...,2^{j_u+1}+3$$

که τ_jها صفرهای چندجمله‌ای لژاندر از درجهٔ $2^{j_u+1}+4$ و w_j وزن‌های بیان شده در (۲۵) است.

۴. حل مسئلهٔ بهینه‌سازی غیرخطی

تابع معیار تقریب زده شده در (۱۹) با قیود (۲۵) یا (۲۷) مسئلهٔ کنترل بهینهٔ (۱) و (۲) یا (۳) را به یک مسئلهٔ بهینه‌سازی غیرخطی به‌صورت‌های (۲۸) تبدیل می‌کند.

$$\min\tilde{J}(X,U)=UPU^T+XPX^T+FX^T+GU^T$$

$$s.to:\quad X\gamma_{j_u}(t_i)=y(t_i)+\frac{t_i}{2}\sum_{j=1}^{2^{j_u+1}+3}w_jK\Big(\frac{t_i}{2}(\tau_j+1),t_i,$$

$$X\gamma_{j_u}(\frac{t_i}{2}(\tau_j+1)),U\gamma_{j_u}(\frac{t_i}{2}(\tau_j+1))\Big),\quad i=1,2,...,2^{j_u+1}+3. \qquad (۲۸)$$

یا

$$O((2^{(j_u+1}+3)^2)$$

$$s.to:\quad D_{j_u}X\gamma_{j_u}(t_i)=a(t_i)X\gamma_{j_u}(t_i)+b(t_i)U\gamma_{j_u}(t_i)+\frac{t_i}{2}\sum_{j=1}^{2^{j_u+1}+3}w_jK\left(t_i,\frac{t_i}{2}(\tau_j+1)\right) \qquad (۲۹)$$

$$\eta\Big(X\gamma_{j_u}(\frac{t_i}{2}(\tau_j+1)),U\gamma_{j_u}(\frac{t_i}{2}(\tau_j+1))\Big),\quad X\gamma_{j_u}(0)=x_0,\quad i=1,2,...,2^{j_u+1}+3.$$

با حل این مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی به‌وسیلهٔ یکی از الگوریتم‌های بهینه‌سازی غیرخطی جواب‌های بهینهٔ $X^*=[x_1^*,x_2^*,...,x_{2^{j_u+1}+3}^*]$ و $U^*=[u_1^*,u_2^*,...,u_{2^{j_u+1}+3}^*]$ به‌دست می‌آیند. بنابراین توابع حالت و کنترل

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.10.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.119]

بهینه تقریبی با بسط‌های (۳۰) مشخص می‌شوند:

$$x^*(t) \simeq X^* \gamma_{j_u}(t), \quad u^*(t) \simeq U^* \gamma_{j_u}(t) \qquad (۳۰)$$

هم‌چنین جواب بهینهٔ $\tilde{J}^*(X^*, U^*)$ که تقریبی از جواب بهینهٔ J^* است، به‌دست می‌آید.

۵. پیچیدگی محاسباتی

در این قسمت به بحث در مورد تعداد گام‌های مورد نظر برای حل مسائل کنترل بهینه با معادلات انتگرال یا انتگرال-دیفرانسیل به روش ارائه شده در این مقاله می‌پردازیم.

درایه‌های $\gamma_{j_u}(t)$ شامل توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی است که به‌ترتیب با استفاده از روابط (۴) و (۶) به‌دست می‌آیند. برای به‌دست آوردن آنها عملیات ریاضی مشخصی استفاده می‌شود، از آن‌جاکه تعداد این درایه‌ها $2^{j_u+1}+3$ است بنابراین پیچیدگی محاسباتی آن از مرتبهٔ $O(2^{j_u+1}+3)$ می‌شود.

ماتریس عملیاتی P با انتگرال‌گیری از درایه‌های ماتریس حاصل از ضرب $\gamma_{j_u}(t)$ در ترانهاده‌اش به‌دست می‌آید و به‌دلیل این‌که این بی‌اسپلاین‌ها دارای تکیه‌گاه فشرده و شبه متعامدند پس خیلی از درایه‌های آن صفر است، از این‌رو مرتبهٔ پیچیدگی آن کم‌تر از $O((2^{j_u+1}+3)^2)$ است.

ماتریس D_{j_u} از حاصل‌ضرب دو ماتریس از مرتبهٔ $(2^{j_u+1}+3)\times(2^{j_u+1}+3)$ پس پیچیدگی محاسباتی آن $O((2^{j_u+1}+3)^3)$ است با توجه [۳۲] به می‌توان پیچیدگی آن را کاهش داد و به $O((2^{j_u+1}+3)^{2.373})$ رساند.

هر یک از عامل‌های UPU^T، XPX^T، FX^T و GU^T در (۱۹) پیچیدگی محاسباتی $O((2^{j_u+1}+3)^2)$ دارد، پس تابعک معیار تقریبی از پیچیدگی محاسباتی $O((2^{j_u+1}+3)^2)$ برخوردار است.

سیستم‌های تقریبی (۲۴) و (۲۷) هر کدام یک دستگاه از معادلات غیر خطی با $2^{j_u+1}+3$ معادله و $2^{j_u+1}+3$ هستند، که با روش هم‌محلی به‌دست آمده‌اند؛ و در محاسبهٔ آنها نیز عامل‌های $X\gamma_{j_u}(t)$ و $U\gamma_{j_u}(t)$ نقش دارند، بنابراین پیچیدگی محاسباتی برای سیستم‌ها نیز $O((2^{j_u+1}+3)^2)$ است. در نتیجه می‌توان گفت که پیچیدگی محاسباتی روش ارائه شده در این مقاله $O((2^{j_u+1}+3)^3)$ است.

همگرایی روش

در این بخش ابتدا نشان داده می‌شود که اگر مسئلهٔ کنترل بهینه با تابعک معیار (۱) و سیستم دینامیکی (۲) (مسئلهٔ A) دارای جواب شدنی باشد آن‌گاه مسئلهٔ تقریب شدهٔ (۲۸) (مسئلهٔ B) جواب شدنی دارد. سپس اثبات خواهد شد که دنباله‌ای از جواب‌های بهینه مسئلهٔ B به جواب بهینهٔ مسئلهٔ A همگرا می‌شود و هم‌چنین کران بالای خطای تقریب را نیز به‌دست می‌آوریم. این مطالب در قالب سه قضیهٔ ۳ و ۴ و ۵ نشان داده می‌شود.

قضیهٔ ۳. *برای بی اسپلاین مرتبهٔ m اگر x_{j_u} جواب تقریبی برای جواب دقیق x باشد آنگاه کران بالای خطای تقریب با* رابطهٔ (۳۱) *داده* می‌شود[۱۹]:

$$|x - x_{j_u}| \le C_m 2^{-j_u m} |x^{(m)}|, \quad C_m = \sqrt{\frac{B_{2m}}{(2m)!}} \qquad (۳۱)$$

که B_{2m} یک عدد برنولی از مرتبهٔ $2m$ است.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.10.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.119]

قضیهٔ ۴. *فرض کنید* x *و* u *جواب‌های شدنی مسئلهٔ* A *و متعلق به فضای* $C^{(4)}(\mathbb{R})$ *باشند و* $K(s,t,x(s),u(s))$ *نسبت به هر دو متغیر* $x(t)$ *و* $u(t)$ *در شرط لیپ شیتز صدق کند آن‌گاه عدد مثبت* $j_u^{'}$ *وجود دارد به‌طوری‌که برای* $j_u \geq j_u^{'}$ *مسئلهٔ* B *دارای جواب‌های شدنی* $x_{j_u}(t_p) = X\gamma_{j_u}(t_p)$ *و* $u_{j_u}(t_p) = U\gamma_{j_u}(t_p)$ *به‌ازای* $t_p \in l_i = [\frac{i-1}{2^{j_u+1}+3}, \frac{i}{2^{j_u+1}+3}), i = 1,2,...,2^{j_u+1}+3$ *است و جواب‌های شدنی در روابط* (۳۲) *صدق می‌کنند.*

$$|x(t_p)-x_{j_u}(t_p)| \leq C_4 2^{-4j_u} |x^{(4)}|, \quad p = 1,2,...,2^{j_u+1}+3$$
$$|u(t_p)-u_{j_u}(t_p)| \leq C_4 2^{-4j_u} |u^{(4)}|, \quad p = 1,2,...,2^{j_u+1}+3 \qquad (۳۲)$$

t_p صفرهای چند جمله‌ای لژاندر انتقال یافته به بازهٔ $[0,1]$ است.

اثبات. فرض‌کنیم x و u جواب‌های شدنی مسئلهٔ A و x_{j_u} و u_{j_u} تقریب این توابع به‌وسیلهٔ موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی روی بازهٔ $[0,1]$ باشند طبق قضیهٔ ۳ برای $t_p \in l_i = [\frac{i-1}{2^{j_u+1}+3}, \frac{i}{2^{j_u+1}+3}]$ رابطهٔ (۳۲) به‌دست می‌آید. از آن‌جاکه $x(t_p)$ و $u(t_p)$ جواب‌های شدنی مسئله A می‌باشند؛ پس داریم:

$$x(t_p) - y(t_p) - \int_0^{t_p} K(s,t_p,x(s),u(s))ds = 0 \qquad (۳۳)$$

از این‌رو طبق رابطه‌های (۳۲) و (۳۳) و این‌که K در شرط لیپ شیتز صدق می‌کند، برای $x_{j_u}(t)$ و $u_{j_u}(t)$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&|x_{j_u}(t_p) - y(t_p) - \int_0^{t_p} K(s,t_p,x_{j_u}(s),u_{j_u}(s))ds| \leq |x_{j_u}(t_p) - x(t_p)| \\
&+ |\int_0^{t_p} K(s,t_p,x_{j_u}(s),u_{j_u}(s))ds - \int_0^{t_p} K(s,t_p,x(s),u(s))ds| \\
&+ |x(t_p) - y(t_p) - \int_0^{t_p} K(s,t_p,x(s),u(s))ds| \\
&\leq C_4 2^{-4j_u} |x^{(4)}| + \lambda_k \int_0^{t_p} |x_{j_u}(t_p) - x(t_p)| + |u_{j_u}(t_p) - u(t_p)| ds \\
&\leq C_4 2^{-4j_u} |x^{(4)}| + \lambda_k \frac{t_p}{2} (C_4 2^{-4j_u} |x^{(4)}| + C_4 2^{-4j_u} |u^{(4)}|) \\
&\leq (C_4 |x^{(4)}| + \lambda_k \frac{i}{2^{j_u+1}+3} (C_4 |x^{(4)}| + C_4 u^{(4)}|)) 2^{-4j_u}
\end{aligned}$$

که λ_k ثابت لیپ شیتز است.

قرار می‌دهیم: $j_u^{'} = \max_{1 \leq i \leq 2^{j_u+1}+3} \lceil C_4 |x^{(4)}| + \lambda_k \frac{i}{2^{j_u+1}+3} (C_4 |x^{(4)}| + C_4 u^{(4)}|) \rceil$

پس برای $j_u \geq j_u^{'}$ داریم:

$$|x_{j_u}(t_p) - y(t_p) - \int_0^{t_p} K(s,t_p,x_{j_u}(s),u_{j_u}(s))ds| \leq j_u 2^{-4j_u} \qquad (۳۴)$$

با افزایش j_u (۳۴) به مسئلهٔ B نزدیک می‌شود بنابراین نتیجه می‌گیریم x_{j_u} و u_{j_u} جواب‌های شدنی مسئلهٔ B است.

با فرض این‌که X^* و U^* جواب‌های بهینه‌ای باشند که از حل مسئلهٔ برنامه‌ریزی غیرخطی B حاصل می‌شوند،

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.10.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.119]

توابع حالت و کنترل بهینهٔ تقریبی به شکل ماتریسی (۳۵) تعریف می‌شوند:

$$x^*_{j_u}(t) = X^*\gamma_{j_u}(t), \quad u^*_{j_u}(t) = U^*\gamma_{j_u}(t) \qquad (۳۵)$$

در قضیهٔ زیر ثابت می‌شود که دنبالهٔ $\{(x^*_{j_u}(t_p), u^*_{j_u}(t_P)) : 1 \le p \le 2^{j_u+1}+3\}^{\infty}_{j_u=j'}$ از زوج جواب‌های بهینه مسئلهٔ B به زوج جواب بهینهٔ مسئلهٔ A همگرا خواهد شد.

قضیهٔ ۵. *فرض کنید که دنبالهٔ* $\{(x^*_{j_u}(t_p), u^*_{j_u}(t_P)) : 1 \le p \le 2^{j_u+1}+3\}^{\infty}_{j_u=j'}$ *یک دنباله از جواب‌های بهینهٔ مسئلهٔ* B *باشد که به* $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$ *همگرای یکنواخت است آن‌گاه* $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$ *زوج جواب بهینهٔ مسئلهٔ* A *است.*

اثبات. ابتدا نشان داده می‌شود که $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$ یک زوج جواب شدنی مسئلهٔ A است. فرض کنیم جواب شدنی نباشد پس طبق تعریف جواب شدنی $t' \in [0,1]$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\tilde{x}(t') - y(t') - \int_0^{t'} K(s,t',\tilde{x}(s),\tilde{u}(s))ds \neq 0 \qquad (۳۶)$$

هم‌چنین $i \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که $t' \in l_i$، چون صفرهای چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته به بازهٔ $[0,1]$ در این بازه چگال هستند پس دنباله $\{t_n\}$ از این نقاط وجود دارد به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty} t_n = t'$. از آن‌جاکه توابع $x^*_{j_u}$، $u^*_{j_u}$ و $K(s,t_p,x^*_{j_u}(s),u^*_{j_u}(s))$ روی بازهٔ فشردهٔ $[0,1]$ پیوسته در نتیجه پیوسته یکنواخت است و j_u نیز با افزایش n افزایش می‌یابد، بنابراین با توجه به فرض قضیه داریم:

$$x^*_{j_u}(t) \to \tilde{x}(t), \quad u^*_{j_u}(t) \to \tilde{u}(t), \quad K(s,t,x^*_{j_u}(s),u^*_{j_u}(s)) \to K(s,t,\tilde{x}(s),\tilde{u}(s))$$

در نتیجه به‌دست می‌آید:

$$\tilde{x}(t') - y(t') - \int_0^{t'_i} K(s,t',\tilde{x}(s),\tilde{u}(s)) =$$

$$\lim_{n\to\infty}(x^*_{j_u}(t_i) - y(t_i) - \int_0^{t_i} K(s,t_i,x^*_{j_u}(s),u^*_{j_u}(s))ds) = 0.$$

که با رابطهٔ (۳۶) در تناقض است.

نشان می‌دهیم که تابعک معیار مسئلهٔ B در (X^*,U^*) به تابعک معیار مسئلهٔ A در $(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t))$ همگرا می‌شود. پس طبق روابط (۱۹)، (۱۸)، (۱)، (۳۵)، قضیهٔ ۴، فرض قضیه و قضیه همگرایی یکنواخت داریم:

$$\lim_{j_u\to\infty} \tilde{J}(X^*,U^*) = \lim_{j_u\to\infty}(U^*PU^{*T} + X^*PX^{*T} + FX^{*T} + GU^{*T})$$

$$= \int_0^1 \lim_{j_u\to\infty}(U^*\gamma_{j_u}(t)\gamma^T_{j_u}(t)U^{*T} + X^*\gamma_{j_u}(t)\gamma^T_{j_u}(t)X^{*T} + F\tilde{\gamma}_{j_u}(t)\gamma^T_{j_u}(t)X^{*T}$$

$$+ G\tilde{\gamma}_{j_u}(t)\gamma^T_{j_u}(t)U^{*T})dt = \ldots = \int_0^1(\tilde{u}^2(t) + \tilde{x}^2(t) + f(t)\tilde{x}(t) + g(t)\tilde{u}(t))dt$$

$$= J(\tilde{x}(t),\tilde{x}(t))$$

حال ثابت می‌کنیم که $(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t))$ زوج جواب بهینه مسئلهٔ A است. برای این کار فرض می‌کنیم $(x^*(t),u^*(t))$ جواب بهینه مسئلهٔ A باشد، پس طبق قضیهٔ ۴ و رابطهٔ (۳۲) دنباله‌ای از جواب‌های شدنی $\{(\hat{x}_{j_u}(t_p),\hat{u}_{j_u}(t_P)) : 1 \le p \le 2^{j_u+1}+3\}^{\infty}_{j_u=j'}$ برای مسئلهٔ B وجود دارد طوری‌که به جواب بهینه $(x^*(t_p),u^*(t_p))$ همگرای یکنواخت است. از طرفی می‌دانیم که

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.10.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.119]

$$J(x^*(t),u^*(t)) = \int_0^1 (u^{*2}(t) + x^{*2}(t) + f(t)x^*(t) + g(t)u^*(t))dt$$

و

$$\lim_{j_u\to\infty} \tilde{J}(x^*_{j_u}(t),u^*_{j_u}(t)) = J(\tilde{x}(t),\tilde{u}(t))$$

به طریق مشابه قبل می‌توان نشان داد که

$$\lim_{j_u\to\infty} \tilde{J}(\hat{x}_{j_u}(t),\hat{u}_{j_u}(t)) = J(x^*(t),u^*(t))$$

در نتیجه با استفاده از تعریف جواب بهینه داریم:

$$J(x^*(t),u^*(t)) \le J(\tilde{x}_{j_u}(t),\tilde{u}_{j_u}(t)) = \lim_{j_u\to\infty} \tilde{J}(x^*_{j_u}(t),u^*_{j_u}(t)) \le \tilde{J}(\hat{x}_{j_u}(t),\hat{u}_{j_u}(t))$$

بنابراین با استفاده از قضیه فشردگی در حد به‌دست می‌آوریم؛ $J(x^*(t),u^*(t)) = J(\hat{x}_{j_u}(t),\hat{u}_{j_u}(t))$ و این نشان می‌دهد که $((\tilde{x}(t),\tilde{u}(t))$ جواب بهینه مسئلهٔ A است.

نتایج عددی

در این بخش روش ذکر شده در مقاله را برای حل دو مثال کنترل بهینه با سیستم دینامیکی معادلات انتگرالی و دو مثال با سیستم دینامیکی معادلهٔ انتگرال-دیفرانسیل به‌کار می‌بریم. برای نشان دادن کارایی و دقت این روش از مثال‌هایی استفاده می‌کنیم که تابع کنترل بهینه، تابع حالت بهینه و جواب بهینهٔ تابعک معیار مشخص است و آن را با روش‌های دیگر مقایسه می‌کنیم . هم‌چنین به‌منظور بررسی بهتر خطای این روش‌ها از روابط (۳۷) استفاده می‌کنیم:

$$\varrho_{x^*} = \max_{1\le i\le 2^{j_u+1}+3} |x^*(t_i) - x^*_{j_u}(t_i)|, \quad \varrho_{u^*} = \max_{1\le i\le 2^{j_u+1}+3} |u^*(t_i) - u^*_{j_u}(t_i)|$$
$$\varrho_{J^*} = |J^*(x^*,u^*) - \tilde{J}^*(x^*_{j_u},u^*_{j_u})| \qquad (۳۷)$$

این مثال‌ها با استفاده از نرم‌افزار متمتیکا ۱۰.۴ برنامه‌نویسی و حل شده‌اند و مدت زمانی که طول می‌کشد تا برنامه‌ها اجرا شود نیز بیان شده است.

مثال ۶. *تابع حالت بهینه x^* و کنترل بهینه متناظر با آن u^* را طوری به‌دست آورید که در سیستم دینامیکی (۳۸) صدق کند و تابع معیار (۳۹) را حداقل نماید.*

$$x(t) = t\cos(t) - \frac{1}{2}t^3 - \int_0^t u(s)(x(s)+t)ds \qquad (۳۸)$$

$$J = \int_0^1 (x(t)-\sin(t))^2 + (u(t)-t)^2 dt \qquad (۳۹)$$

جواب‌های دقیق توابع کنترل، حالت و تابک معیار بهینه به‌ترتیب عبارتند از $u^*(t) = t$ ، $x^*(t) = \sin(t)$ و $J^* = 0$. این مسئله را با استفاده از روش مذکور برای $j_u = 4$ و $j_u = 3$ حل شد و مقدار خطای تابعک معیار بهینه تقریبی به‌ترتیب برابراست با $\varrho_{J_4^*} = 5.17657\times10^{-13}$ و $\varrho_{J_3^*} = 2.02532\times10^{-12}$، در حالی که این خطا برای روش بیان شده در [۱۳] برای توابع هایبریدی لژاندر $M = 3$ و $M = 4$ به‌صورت $\varrho_{J_3^*} = 5.6973\times10^{-9}$ و $\varrho_{J_4^*} = 3.3217\times10^{-12}$ است، که نشان می‌دهد روش موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی تاحدی دقت بیش‌تری دارد. هم‌چنین بیشینه‌های خطا در نقاط هم‌محلی برای توابع حالت و کنترل بهینهٔ تقریب برای $j_u = 4$ عبارتند از $\varrho_{x^*} = 1.88609\times10^{-9}$ و $\varrho_{u^*} = 9.07287\times10^{-7}$ ، در صورتی‌که این خطاها برای $M = 4$ در [۱۳]،

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.10.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.119]

$\varrho_{x^*} = 3.0010\times10^{-6}$ و $\varrho_{u^*} = 2.2525\times10^{-6}$، است. جدول ۱ خطای مطلق توابع حالت و کنترل بهینه تقریبی در چند نقطه برای $j_u = 4$ به ما می‌دهد. شکل ۲ توابع کنترل و حالت بهینه تقریب و دقیق را نشان می‌دهد.

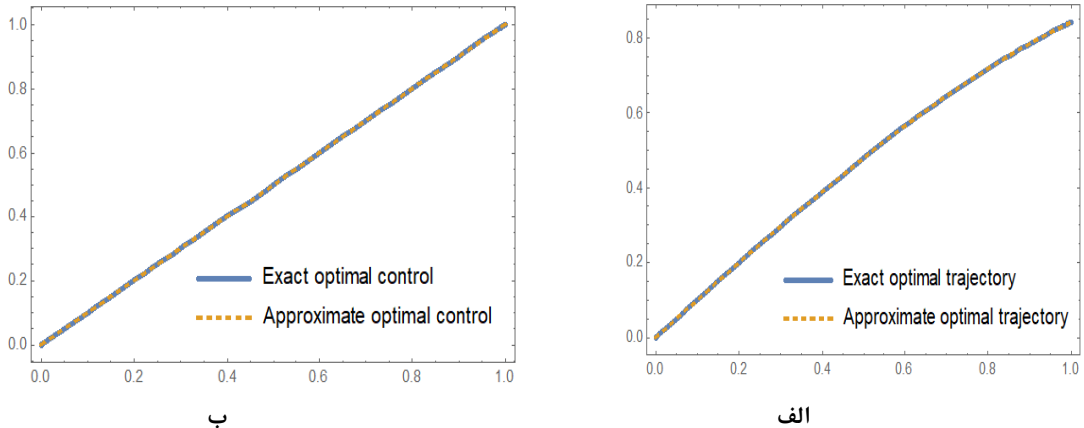
زمان اجرای برنامهٔ این مثال برای $j_u = 3$ با یک سیستم تک پردازنده ٤٧٦,٠٠٨٦٠٧٦ ثانیه طول کشید و اکثریت زمان اجرا مربوط به محاسبهٔ ماتریس‌های P در (١٤)، F و G در (١٩) و هم‌چنین دستور NMinimize موجود در نرم‌افزار است. برای تقریب بهتر این ماتریس ها به‌صورت تحلیلی حل شده‌اند.۲/۰۲۵۳۲

جدول ۱. مقایسهٔ جواب بهینه تقریبی روش [۱۳] و روش پیشنهادی برای مثال ۶

ϱ_{J^*} [۱۳]	ϱ_{J^*}	M	j_u
۵/۶۹۷۳×۱۰$^{-۹}$	۲/۰۲۵۳۲×۱۰$^{-۱۲}$	۳	۳
۳/۳۲۱۷×۱۰$^{-۱۲}$	۵/۱۷۶۵۷×۱۰$^{-۱۳}$	۴	۴

جدول۲. نتایج عددی توابع کنترل و حالت بهینه تقریبی به‌روش موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی با $j_u = 4$

$\lvert u^* - u^*_{j_u}\rvert$	$\lvert x^* - x^*_{j_u}\rvert$	t_i
۷/۹۸۲۹۳/×۱۰$^{-۷}$	۴/۲۳۴۷۲×۱۰$^{-۹}$	۰/۰
۶/۴۱۳۰۱×۱۰$^{-۷}$	۸/۲۰۸۱۱×۱۰$^{-۱۰}$	۰/۱
۶/۹۲۹۴۲×۱۰$^{-۷}$	۳/۴۹۹۸×۱۰$^{-۹}$	۰/۲
47829۷/×۱۰$^{-۷}$	۶/۳۶۲۷۱×۱۰$^{-۹}$	۰/۳
۸/۰۸۶۶۳×۱۰$^{-۸}$	۲/۷۹۸۷۴×۱۰$^{-۹}$	۰/۴
۸/۲۴۲۸×۱۰$^{-۷}$	۱/۶۲۱۰۳×۱۰$^{-۱۰}$	۰/۵
۸/۰۲۵۷۴×۱۰$^{-۷}$	۵/۰۳۲۳۶×۱۰$^{-۸}$	۰/۶
۹/۰۱۲۱۶×۱۰$^{-۷}$	۱/۳۲۹۷×۱۰$^{-۸}$	۰/۷
۷/۹۶۵۳۸×۱۰$^{-۷}$	۸/۳۶۷۹۲×۱۰$^{-۹}$	۰/۸
۴/۷۴۸۳۱×۱۰$^{-۷}$	۱/۶۷۷۱۳×۱۰$^{-۸}$	۰/۹
۲/۱۸۴۴۹×۱۰$^{-۸}$	۴/۲۵۴۷۹×۱۰$^{-۹}$	۱/۰



ب الف

شکل۲. الف) توابع حالت بهینه دقیق و بهینه تقریبی، ب) توابع کنترل بهینه دقیق و بهینه تقریبی

مثال ۷. مسئلهٔ کنترل بهینه با تابع معیار درجهٔ دوم و سیستم دینامیکی معادلهٔ انتگرالی (۴۰) را در نظر بگیرید:

$$J = \int_0^1 (x(t) - e^{-t^2})^2 + (u(t) - t)^2 dt \qquad (۴۰)$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.10.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.119]

$$\text{s.t.} \qquad x(t)=e^{-t^2}+\frac{t(1-e^{-t^2})}{2}-\int_0^t u(s)\,t\,x(s)\,ds$$

جواب‌های دقیق توابع کنترل، حالت و تابک معیار بهینه به‌ترتیب عبارتند از $u^*(t)=t$، $x^*(t)=e^{-t^2}$ و $J^*=0$. این مسئله را با استفاده از روش مذکور برای $j_u=3$ حل شد و مقدار خطای تابعک معیار بهینه تقریبی برابر است با $\varrho_{J^*}=3.7756\times10^{-13}$، در حالی که این خطا برای روش بیان شده در [۱۳] برای توابع هایبریدی لژاندر $M=5$، $\varrho_{J^*}=8.5037\times10^{-12}$ است، که نشان می‌دهد روش موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی دقت بیش‌تری دارد. هم‌چنین بیشینه‌های خطا در نقاط هم‌محلی برای توابع حالت و کنترل بهینهٔ تقریب عبارتند از $\varrho_{x^*}=2.89296\times10^{-8}$ و $\varrho_{u^*}=1.34172\times10^{-7}$، در صورتی که این خطاها برای [۱۳] $\varrho_{x^*}=4.5577\times10^{-6}$ و $\varrho_{u^*}=3.3455\times10^{-6}$ است. جدول ۳ خطای مطلق توابع حالت وکنترل بهینه تقریبی در چند نقطه به ما می‌دهد. شکل ۳ توابع کنترل و حالت بهینه تقریب و دقیق را با $j_u=3$ نشان می‌دهد.

زمان اجرای برنامهٔ این مثال برای $j_u=3$ با یک سیستم تک پردازنده ٤٨٥,٤٧٧٨٤٠٨٤ ثانیه طول کشید و اکثریت زمان اجرا مربوط به محاسبهٔ ماتریس‌های P در (١٤)، F و G در (١٩) و هم‌چنین دستور NMinimize موجود در نرم‌افزار است.

جدول ۳. نتایج عددی توابع کنترل و حالت بهینه تقریبی به روش موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی با $j_u=3$

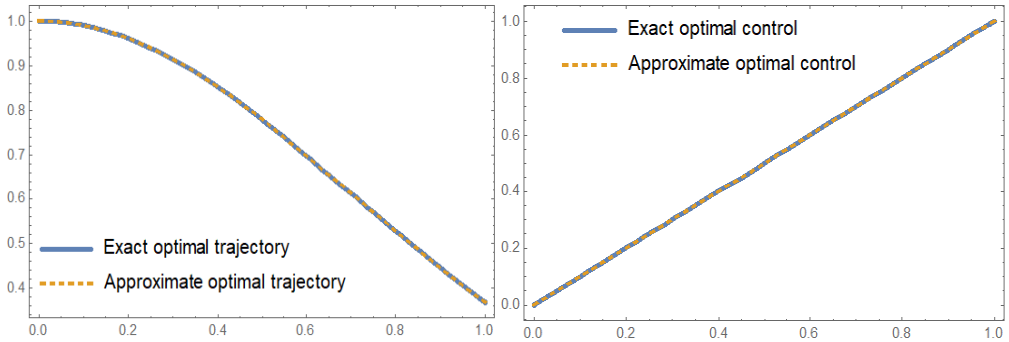
t_i	$\lvert x^*-x^*_{j_u}\rvert$	$\lvert u^*-u^*_{j_u}\rvert$
۰/۰	۲/۵۱۰۱۹×۱۰$^{-۸}$	۲/۵۲۶۰۹×۱۰$^{-۸}$
۰/۱	۳/۹۴۵۰۹×۱۰$^{-۸}$	۲/۲۷۷۳۶×۱۰$^{-۸}$
۰/۲	۱/۲۳۳۷۱×۱۰$^{-۸}$	۲/۵۹۵۰۲×۱۰$^{-۸}$
۰/۳	۳/۰۸۹۳۹×۱۰$^{-۷}$	۱/۲۷۹۷×۱۰$^{-۷}$
۰/۴	۱/۸۶۴۷×۱۰$^{-۸}$	۵/۹۷۵۰۱×۱۰$^{-۸}$
۰/۵	۱/۴۰۱۳۶×۱۰$^{-۸}$	۱/۲۵۰۱۴×۱۰$^{-۷}$
۰/۶	۶/۶۳۱۳۷×۱۰$^{-۸}$	۶/۰۴۶۲۱×۱۰$^{-۸}$
۰/۷	۸/۵۶۹۵۹×۱۰$^{-۸}$	۳/۰۰۸۷۷×۱۰$^{-۸}$
۰/۸	۶/۶۷۶۷۸×۱۰$^{-۸}$	۵/۰۴۴۶۱×۱۰$^{-۸}$
۰/۹	۲/۳۴۵۷۵×۱۰$^{-۷}$	۱/۶۵۸۴۴×۱۰$^{-۸}$
۱/۰	۷/۴۴۹۸۳×۱۰$^{-۷}$	۳/۷۶۸۵×۱۰$^{-۸}$

مثال ۸. مسئلهٔ کنترل بهینه با تابع معیار درجه دوم و سیستم دینامیکی معادلهٔ انتگرال-دیفرانسیل غیرخطی (۴۱) را نظر بگیرید:

$$J=\int_0^1\left((x(t)-e^{t^2})^2+(u(t)-2t-1)^2\right)dt \qquad (۴۱)$$

$$\text{s.to} \qquad x'(t)=-x(t)+u(t)+\int_0^t\left(t(1+2t)e^{s(t-s)}x(s)\right)ds, \quad x(0)=1$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.10.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.119]



ب الف

شکل ۳. الف) توابع حالت بهینه دقیق و بهینه تقریبی، ب) توابع کنترل بهینه دقیق و بهینه تقریبی

جواب‌های دقیق توابع کنترل، حالت و تابک معیار بهینه به‌ترتیب عبارتند از $u^*(t)=1+2t$ ، $x^*(t)=e^{t^2}$ و $J^*=0$. این مسئله را با استفاده از روش مذکور برای $j_u=4$ و $j_u=3$ حل شد و مقدار خطای تابعک معیار بهینه تقریبی به‌ترتیب برابراست با $\varrho_{J_4^*}=8.0684\times10^{-12}$ و $\varrho_{J_3^*}=3.61691\times10^{-11}$، در حالی که این خطا برای روش بیان شده در [۱۲] برای موجک‌هایی لژاندر $M=4$ و $M=6$ به‌صورت $\varrho_{J_4^*}=5.1861\times10^{-4}$ و $\varrho_{J_6^*}=7.4667\times10^{-8}$ است، که نشان می‌دهد روش موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی تا حدی دقت بیش‌تری دارد. هم‌چنین بیشینه‌های خطا در نقاط هم‌محلی برای توابع حالت و کنترل بهینهٔ تقریب برای $j_u=4$ عبارتند از $\varrho_{x^*}=3.04883\times10^{-6}$ و $\varrho_{u^*}=4.7421\times10^{-6}$ ، در صورتی که این خطاها برای $M=6$ در [۱۲]، $\varrho_{x^*}=8.0233\times10^{-5}$ و $\varrho_{u^*}=4.5393\times10^{-4}$، است. جدول ۵ خطای مطلق توابع حالت و کنترل بهینه تقریبی در چند نقطه برای $j_u=4$ به ما می‌دهد. شکل۴ توابع کنترل و حالت بهینه تقریب و دقیق را نشان می‌دهد.

زمان اجرای برنامهٔ این مثال برای $j_u=4$ با یک سیستم تک پردازنده ۱۰۴۴,۴۵۸۲۹۹۶ ثانیه طول کشید و اکثریت زمان اجرا مربوط به محاسبهٔ ماتریس‌های P در (۱۴)، D_{j_u} در(۱۵)، F و G در (۱۹) و هم‌چنین دستور NMinimize موجود در نرم افزار است.

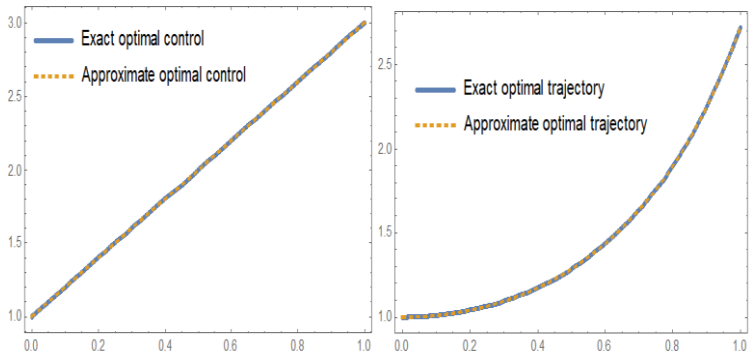
جدول ۴. مقایسه جواب بهینه تقریبی روش [۱۲] و روش پیشنهادی برای مثال ۸

j_u	M	ϱ_{J^*}	[۱۲] ϱ_{J^*}
۳	۴	۳/۶۱۶۹۱×۱۰$^{-۱۱}$	۵/۱۸۶۱×۱۰$^{-۴}$
۴	۶	۸/۰۶۸۴×۱۰$^{-۱۲}$	۷/۴۶۶۷×۱۰$^{-۸}$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.10.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.119]

جدول ۵. نتایج عددی توابع کنترل و حالت بهینه تقریبی به‌روش موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی با $j_u = 4$

t_i	$\lvert x^* - x^*_{j_u} \rvert$	$\lvert u^* - u^*_{j_u} \rvert$
۰/۰	۶/۳۶۹۲۴×۱۰$^{-۷}$	۱/۸۷۵۸۷×۱۰$^{-۷}$
۰/۱	۶/۷۰۴۱۳×۱۰$^{-۷}$	۲/۱۶۸۶۲×۱۰$^{-۸}$
۰/۲	۶/۰۶۳۲۲×۱۰$^{-۷}$	۵/۵۶۳۹۵×۱۰$^{-۸}$
۰/۳	۵/۳۶۳۸×۱۰$^{-۷}$	۱/۱۴۴۹۴×۱۰$^{-۶}$
۰/۴	۵/۰۶۵۹۵×۱۰$^{-۷}$	۳/۱۱۲۳۴×۱۰$^{-۶}$
۰/۵	۳/۱۶۹۷۴×۱۰$^{-۷}$	۴/۷۴۲۱×۱۰$^{-۶}$
۰/۶	۲/۸۰۹۳۴×۱۰$^{-۷}$	۳/۲۳۲۳۹×۱۰$^{-۶}$
۰/۷	۲/۰۳۷۳۹×۱۰$^{-۷}$	۱/۶۴۸۰۴×۱۰$^{-۶}$
۰/۸	۶/۸۸۸۱۶×۱۰$^{-۷}$	۸/۶۵۲۵۳×۱۰$^{-۸}$
۰/۹	۱/۱۱۶۶۴×۱۰$^{-۶}$	۱/۷۲۲۰۸×۱۰$^{-۷}$
۱/۰	۹/۳۶۶۴۵×۱۰$^{-۷}$	۴/۰۲۴۵۵×۱۰$^{-۸}$



ب الف

شکل۴. الف) توابع حالت بهینه دقیق و بهینه تقریبی، ب) توابع کنترل بهینه دقیق و بهینه تقریبی

مثال ۹. *تابع حالت بهینه x^* و کنترل بهینه متناظر با آن u^* را طوری به‌دست آورید که در سیستم دینامیکی (۴۲) صدق کند و تابع معیار (۴۳) را حداقل کند.*

$$x'(t) = \frac{3}{2}x(t) - \frac{1}{2}u(t) + \int_0^t \left(x^3(s)e^{t-s}\right)ds, \quad x(0) = 1 \qquad (۴۲)$$

$$J = \int_0^1 (x(t) - e^t)^2 + (u(t) - e^{3t})^2 dt \qquad (۴۳)$$

جواب‌های دقیق توابع کنترل، حالت و تابک معیار بهینه به‌ترتیب عبارتند از $u^*(t) = e^{3t}$ ، $x^*(t) = e^t$ و $J^* = 0$. این مسئله را با استفاده از روش مذکور برای $j_u = 3$ حل شد و مقدار خطای تابعک معیار بهینه تقریبی برابر است با $\varrho_{J_3^*} = 1.86307 \times 10^{-10}$ ، در حالی که این خطا برای روش بیان شده در [۱۲] برای موجک‌های لژاندر $M = 4$ به‌صورت $\varrho_{J_4^*} = 5.6973 \times 10^{-9}$ است، که نشان می‌دهد روش موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی تا حدی دقت بیش‌تری دارد. هم‌چنین بیشینه‌های خطا در نقاط هم‌محلی برای توابع حالت و کنترل بهینهٔ تقریب برای $j_u = 3$ عبارتند از $\varrho_{x^*} = 1.52922 \times 10^{-6}$ و $\varrho_{u^*} = 2.09036 \times 10^{-5}$، در صورتی‌که این خطاها برای $M = 4$ در [۱۲]، $\varrho_{x^*} = 1.6433 \times 10^{-4}$ و $\varrho_{u^*} = 1.1330 \times 10^{-2}$، است. شکل ۵ نمودار خطای مطلق توابع حالت و

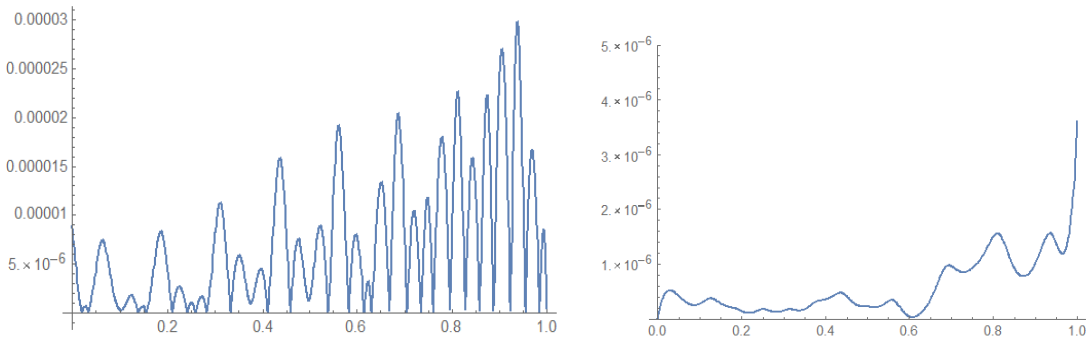
[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.10.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.119]

کنترل بهینه تقریبی برای $j_u = 3$ به ما می‌دهد. شکل ۶ توابع کنترل و حالت بهینه تقریب و دقیق را نشان می‌دهد.

نتایج

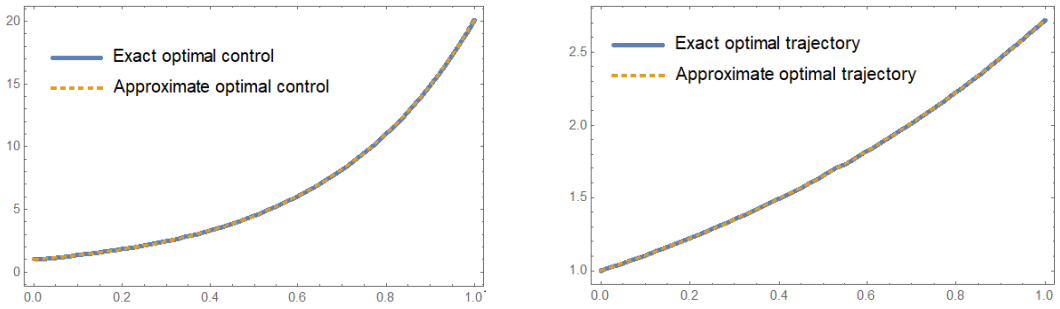
در روش پیشنهادی بردار توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی به‌طور موفقیت‌آمیزی برای مسائل کنترل بهینه با سیستم دینامیکی معادله انتگرالی و معادله انتگرال-دیفرانسیل به‌کار برده شد. هم‌چنین با استفاده از ماتریس عملیاتی حاصل‌ضرب و تقریب بعضی از توابع به‌وسیلهٔ

وگان توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین تابک معیار بدون حل انتگرال به یک معادله غیرخطی تبدیل شد. علاوه بر این با به‌کارگیری ماتریس عملیاتی مشتق، روش هم‌محلی و انتگرال‌گیری عددی سیستم دینامیکی پیوسته به‌سادگی به یک دستگاه معادلات غی‌خطی کاهش پیدا کرد. با بررسی همگرای روش به این نتیجه می رسیم که کران بالای خطا به‌صورت نمایی کاهش می‌یابد. مثال‌های عددی نشان می‌دهد که روش کارایی خوبی دارد و دقت زیادی دارد. با ساختن ماتریس‌های عملیاتی دیگر می‌توان این موجک‌ها را برای حل انواع مختلفی از مسائل کنترل بهینه به‌کار برد.



ب الف

شکل۵. الف) نمودار خطای مطلق تابع حالت بهینه تقریبی، ب) نمودار خطای مطلق تابع کنترل بهینه تقریبی



ب الف

شکل۶. الف) توابع حالت بهینه دقیق و بهینه تقریبی، ب) توابع کنترل بهینه دقیق و بهینه تقریبی

سپاس‌گزاری

نویسندگان از بررسی‌کنندگان این مقاله برای بیان نظریات و پیشنهادات خوب‌شان که به بهبود کیفیت این مقاله کمک کرد، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنند.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.10.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.119]

منابع

1. Kuo B. C., "Automatic control systems", Prentice Hall PTR (1987).
2. Peyghami M. R., Hadizadeh M., Ebrahimzadeh A., "Some explicit class of hybrid methods for optimal control of Volterra integral equations", J. Inform. Comput. Sci, 7(4) (2012) 253-266.
3. Kochetkov Y. A., Tomshin V. K., "Optimal control of deterministic systems described by integro-differential equations", Avtomatika i Telemekhanika (1) (1978) 5-11.
4. Bagley R. L., Calico R. A., "Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures", Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 14(2) (1991) 304-311.
5. Hartley T. T., Lorenzo C. F., "Dynamics and control of initialized fractional-order systems", Nonlinear Dynamics, 29 (1) (2002), 201-233.
6. Neustadt L. W., Warga J., "Comments on the Paper" Optimal Control of Processes Described by Integral Equations", I" by VR Vinokurov. SIAM Journal on Control and Optimization, 8 (4) (1970) 572.
7. Bakke V. L., "A maximum principle for an optimal control problem with integral constraints", Journal of Optimization Theory and Applications, 13 (1) (1974) 32-55.
8. Belbas S. A., "A reduction method for optimal control of Volterra integral equations", Applied Mathematics and Computation, 197(2)(2008) 880-890.
9. Belbas S. A., "A new method for optimal control of Volterra integral equations. Applied Mathematics and Computation, 189 (2) (2007) 1902-1915.
10. Belbas S. A., "Iterative schemes for optimal control of Volterra integral equations", Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications, 37 (1) (1999) 57-79.
11. Tohidi E., Samadi O. R. N., "Optimal control of nonlinear Volterra integral equations via Legendre polynomials", IMA Journal of Mathematical Control and Information, 30 (1) (2012) 67-83.
12. Maleknejad K., Ebrahimzadeh A., "Optimal control of Volterra integro-differential systems based on Legendre wavelets and collocation method. World Academy of Science", Engineering and Technology, International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering, 8 (7) (2014) 1040-1044.
13. Maleknejad K., Ebrahimzadeh A., "An efficient hybrid pseudo-spectral method for solving optimal control of Volterra integral systems", Mathematical Communications, 19 (2) (2014), 417-435.
14. Maleknejad K., Ebrahimzadeh A., "The use of rationalized Haar wavelet collocation method for solving optimal control of Volterra integral equations", Journal of Vibration and Control,

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.10.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.119]

21(10) (2015) 1958-1967.

15. Peygham M. R., Hadizadeh M., Ebrahimzadeh A., "Some explicit class of hybrid methods for optimal control of Volterra integral equations", J. Inform. Comput. Sci, 7 (4) (2012) 253-266.
16. Shamsi M., "A modified pseudospectral scheme for accurate solution of Bang-Bang optimal control problems", Optimal Control Applications and Methods, 32 (6) (2011) 668-680.
17. Maleknejad K., Almasieh H., "Optimal control of Volterra integral equations via triangular functions", J Mathematical and Computer Modelling, 53 (9) (2011) 1902-1909.
18. Xinxiu L., "Operational method for solving fractional differential equations using cubic B-spline approximation", International Journal of Computer Mathematics, 91 (12) (2014) 2584-2602.
19. Maleknejad K., Nosrati Sahlan M., "The method of moments for solution of second kind Fredholm integral equations based on B-spline wavelets. International Journal of Computer Mathematics, 87 (7) (2010) 1602-1616.
20. Çağlar H., Çağlar N., Özer M., "B-spline solution of non-linear singular boundary value problems arising in physiology", Chaos, Solitons Fractals, 39 (3) (2009) 1232-1237.
21. Xinxiu L., "Numerical solution of fractional diff erential equations using cubic B-spline wavelet collocation method. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 17 (10) (2012) 3934-3946.
22. Xinxiu L., "Numerical solution of fractional partial differential equations using cubic Bspline wavelet collocation method", Advances in Computational Mathematics and its Applications, 1 (3) (2012) 159-164.
23. Maleknejad K., Mollapourasl R., Shahabi M., "On the solution of a nonlinear integral equation on the basis of a fixed point technique and cubic B-spline scaling functions", Journal of Computational and Applied Mathematics, 239 (2013) 346-358.
24. Edrisi-Tabri Y., Lakestani M., Heydari A., "Two numerical methods for nonlinear constrained quadratic optimal control problems using linear B-spline functions", Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization 6.2 (2016) 17-38.
25. Loghmani G. B., "B-Spline Solution of Boundary Value Problems of Fractional Order Based on Optimal Control Strategy", Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran, 23 (1) (2012) 59-65.
26. Chui CK., "Wavelets: a mathematical tool for signal analysis. Society for Industrial and Applied Mathematics; (1997 Jan 1).

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.10.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.119]

27. Rahimkhani P., Ordokhani Y., Babolian E., "An efficient approximate method for solving delay fractional optimal control problems", Nonlinear Dynamics, 86(3) (2016) 1649-1661.
28. Rahimkhani P., Ordokhani Y., Babolian E., "Müntz-Legendre wavelet operational matrix of fractional-order integration and its applications for solving the fractional pantograph differential equations", Numerical Algorithms, 77 (4) (2018) 1283-1305.
29. Rahimkhani P., Ordokhani Y., "Generalized fractional-order Bernoulli–Legendre functions: an effective tool for solving two-dimensional fractional optimal control problems", IMA Journal of Mathematical Control and Information (2017).
30. Ashpazzadeh E., Lakestani M., "Biorthogonal cubic Hermite spline multiwavelets on the interval for solving the fractional optimal control problems", Computational Methods for Differential Equations, 4 (2) (2016) 99-115.
31. Edrisi Tabriz Y., Heydari A., "Generalized B-spline functions method for solving optimal control problems", Computational Methods for Differential Equations, 2 (4) (2014) 243-255.
32. Davie A. M., Stothers A. J., "Improved bound for the complexity of matrix multiplication", Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics, 143 (2) (2013) 351-369.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.10.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.119]