

## حل مسائل کنترل بهینه با معادلات انتگرالی یا معادلات انتگرال - دیفرانسیل به کمک توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی

حمید مسگرانی\*، حمید صفدری، ابوالفضل قاسمیان کریک

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، گروه ریاضی

پذیرش ۹۷/۰۵/۱۷

دریافت ۹۶/۱۱/۱۰

### چکیده

در این مقاله روشی عددی مبتنی بر توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی برای حل مسائل کنترل بهینه با سیستم دینامیکی معادله انتگرالی یا معادله انتگرال-دیفرانسیل بحث می‌شود. ماتریس‌های عملیاتی مشتق و انتگرال حاصل ضرب دو بردار موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی، روش هم‌محلی و قاعده انتگرال‌گیری گاوس-لژاندر برای گسسته‌سازی مسئله کنترل بهینه پیوسته و تبدیل آن به یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی به کار گرفته می‌شود. همگرایی توابع کنترل و حالت و تابع معیار بهینه تقریبی حاصل از روش پیشنهادی و هم‌چنین کران بالای خطای آنها به دست آورده می‌شوند. مثال‌های عددی کارایی، دقت و مفید بودن ایده پیشنهادی را نشان می‌دهند.

**واژه‌های کلیدی:** ماتریس عملیاتی، مسائل کنترل بهینه، معادلات انتگرال، توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین، روش هم‌محلی، انتگرال‌گیری عددی، ماتریس عملیاتی.

### مقدمه

سیستم کنترلی مجموعه‌ای از دستگاه‌های قابل کنترل هماهنگ است که باعث می‌شوند تا یک سری از عملیات مطابق دستورالعمل و یا هدف خاصی تحقق پذیرد. به عبارت دیگر یک سیستم کنترلی آن‌چنان سیستمی است که خروجی مطلوب به وسیله عملیاتی روی ورودی سیستم‌ها حاصل می‌شود. کنترل به معنی اعمال روش‌ها و وسیله‌هایی است که استفاده شده است تا بر عملکرد یک سیستم یا دستگاه یا ماشین اثر بگذارند [۱]. مسائل کنترلی باید به صورت ریاضی مدل‌سازی شوند، در مسائل کنترلی کلاسیک فضای حالت سیستم به صورت معادله دیفرانسیل بیان می‌شود، بسیاری از سیستم‌های فیزیکی، تکنولوژی، زیست‌شناسی، ویسکوالاستیکی، الکتروشیمی، اقتصادی و به‌طور کلی سیستم‌هایی که دارای اثر حافظه هستند را نمی‌توان به صورت معادله دیفرانسیل معمولی توصیف کرد. از این رو معادله این سیستم‌ها را به صورت معادلات انتگرالی، معادلات انتگرال-دیفرانسیل، معادلات دیفرانسیل کسری و انتگرال دیفرانسیل کسری بیان می‌کنند [۲]-[۷].

فرض کنیم که سیستم قابل کنترل است، از این‌رو، در جستجوی کنترل‌هایی هستیم که انتقال مورد نظر سیستم را به بهترین نحو انجام دهد پس هر جا بحث از سیستم‌های کنترلی می‌آید همراه با آن کنترل بهینه نیز مطرح می‌شود. نظریه کنترل بهینه در طول ۴۰ سال اخیر به سرعت توسعه یافته و در خدمت مسائل گوناگون علوم مهندسی، بیولوژی، اقتصادی و مسائل علوم اجتماعی قرار گرفته است. مسائل بسیار زیادی در طراحی بدنه هواپیماها و کشتی‌ها، در

\* نویسنده مسئول [hmesgarani@sru.ac.ir](mailto:hmesgarani@sru.ac.ir)

الکترونیک و سایر حیطه‌های علوم مهندسی در واقع مسائل کنترل بهینه هستند.

روش‌های متداولی برای حل مسائل کنترل بهینه با فضای حالت سیستم به صورت معادلات معمولی، کسری و انتگرالی وجود دارد؛ از جمله می‌توان به روش مبتنی بر استفاده از اویلر- لاگرانژ، روش استفاده از اصل ماکسیمم پونتریاگین، روش‌های عددی مبتنی بر تفاضل متناهی، جزءهای متناهی، روش گرادیان مزدوج، روش‌های طیفی، روش‌های استفاده از توابع متعامد پیوسته، روش بسط توابع و ماتریس‌های عملیاتی برای انتگرال و روش نشانیدن اشاره کرد.

روش‌هایی که در سال‌های اخیر همواره مورد توجه محققان برای حل مسائل کنترل بهینه با فضای حالت سیستم به صورت معادلات انتگرال، انتگرال-دیفرانسیل و معادلات دیفرانسیل کسری است، که به برخی از این موارد اشاره می‌شود. بیلباس [۸] مسائل کنترل بهینه تحت سیستم معادلات انتگرال را با یک دنباله از سیستم‌های تحت معادلات دیفرانسیل معمولی تقریب می‌زند، او چند روش عددی را در [۹] و [۱۰] برای حل این نوع مسائل بررسی کرده و به شرایط تضمین کننده همگرایی برای این روش‌ها پرداخته است. توحیدی و صمدی در [۱۱] مسائل کنترل بهینه انتگرال ولترای غیرخطی و انتگرال-دیفرانسیل را با استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندر حل می‌کنند. مالک‌نژاد و ابراهیمی در [۱۲] از روش موجک‌های لژاندر و هم‌محلی و در [۱۳] از هیبرید توابع بلاک-پالس و چندجمله‌ای‌های لژاندر برای حل مسائل کنترل بهینه معادلات انتگرال و انتگرال-دیفرانسیل استفاده می‌کنند. در [۲۷] رحیم‌خانی و همکارانش ماتریس عملیاتی انتگرال کسری ریمان-لیوویل موجک‌های برنولی را برای حل مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری به کار گرفته‌اند و هم‌چنین آنها در [۲۸] روش محاسباتی جدیدی را با ایده به‌کارگیری ماتریس‌های عملیاتی انتگرال مرتبه کسری موجک مونتر-لژاندر استفاده کرده‌اند. در [۲۹] روشی برپایه عملگرهای انتگرال کسری ریمان-لیوویل توابع لژاندر-برنولی مرتبه کسری تعمیم یافته برای حل یک دسته از مسائل کنترل بهینه کسری دوبعدی ارائه شده است. مقالات دیگری با انواع روش‌های مختلف و کارا برای حل این‌گونه از مسائل وجود دارد که می‌توان به [۱۴]-[۱۷] اشاره کرد.

در این مقاله بردار حاصل از توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی، دوگان و ماتریس‌های عملیاتی انتگرال حاصل ضرب و مشتق آنها به کار برده می‌شود تا تقریب تابع کنترل بهینه  $u^*(t)$  و تابع حالت بهینه  $x^*(t)$  متناظر با آن که تابع معیار درجه دوم

$$\min J = \int_0^1 (u^2(t) + x^2(t) + f(t)x(t) + g(t)u(t))dt, \quad (1)$$

را کمینه کند و در سیستم دینامیکی فضای حالت با شرط

$$x(t) = y(t) + \int_0^t K(s, t, x(s), u(s))ds. \quad (2)$$

یا

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)u(t) + \int_0^t (K(t, s)\eta(x(s), u(s)))ds, \quad x(0) = x_0. \quad (3)$$

صدق کند. که در آن توابع  $x$  و  $u$  متعلق به فضای  $C^{(4)}(\mathbb{R})$ ،  $f$  و  $g$  توابع حقیقی مقدار هستند،  $K$  نیز نسبت به متغیرهایش در شرط لیپ‌شیتز صدق کند. هم‌چنین از قاعده انتگرال‌گیری عددی گاوس-لژاندر و روش هم‌محلی برای تبدیل مسئله پیوسته و نامتناهی‌البعد به مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی پیوسته متناهی‌البعد استفاده

می‌شود.

محتوای غنی ریاضیات، مفید بودن در تقریب و توانایی بالای کاربرد موجک‌ها آن قدر راضی کننده و مطمئن بود که به سرعت توجه مهندسان و افراد با تخصص‌های گوناگون را برای حل مسائل مختلف با استفاده از این نظریه، جلب کرد. توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی شبه متعامد است، با معرفی فضای دوگان آنها شرایط متعامدی ایجاد می‌شود که با تصویر توابع موجود در تابع معیار درجه دوم در هر دو فضا می‌توان به‌سادگی بدون محاسبه انتگرال یک تابع هدف غیرخطی را داشت. بی‌اسپلاین‌های مکعبی دارای گشتاورهای صفر و تکیه‌گاه فشرده است بنابراین ماتریس‌های عملیاتی آنها تنک و درایه‌های نزدیک به صفر هستند که گاهی اوقات می‌توان با صفر قرار دادن درایه‌های بسیار کوچک به‌طوری‌که ماتریس‌های عملیاتی پایدار باقی بمانند برای سادگی محاسبات، کاهش زمان عملیات بهره‌برد، هم‌چنین باعث می‌شود که حافظه کم‌تری برای ذخیره‌سازی درایه‌ها استفاده شود. این ماتریس‌های عملیاتی نیز می‌توانند برای حل انواع مختلفی از مسائل ریاضی فراخوانی شوند. توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین دارای شکل بسته و متقارن است بنابراین به راحتی به دست می‌آیند. از دیگر ویژگی‌های مطلوب این بی‌اسپلاین‌ها می‌توان به تجزیه متعامد چندگانه اولیه و دوگان، پایه ریس بودن آنها برای فضاهای مختلف و مرتبه‌نمایی خطای تقریب اشاره کرد. در [۱۸]-[۲۵] از موجک‌های بی‌اسپلاین برای حل معادلات دیفرانسیل کسری، معادلات مشتقات جزئی کسری، معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم و معادلات انتگرال غیرخطی، مسائل کنترل بهینه با تابع معیار درجه دوم و محدودیت‌های غیرخطی، مسائل مقدار مرزی منفرد و حل مسائل مقدار مرزی مرتبه کسری با تبدیل به مسائل کنترل بهینه استفاده شده است. در [۳۰] چند موجکی‌های اسپلاین هرمیت مکعبی روی یک بازه برای حل مسائل کنترل بهینه کسری بدون بررسی آنالیز خطا و همگرایی به کار برده شده‌اند. هم‌چنین در [۳۱] روشی عددی برای حل مسائل کنترل بهینه با شرایط معادلات دیفرانسیل به کمک توابع مقیاس بی‌اسپلاین بیان شده که در این روش ماتریس عملیاتی مشتق توابع مقیاس بی‌اسپلاین مربعی با استفاده از توابع مقیاس بی‌اسپلاین خطی به دست آمده است.

ساختار باقی‌مانده این مقاله بدین شرح است: در بخش ۲ توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی و دوگان آنها روی بازه بسته و کراندار  $[0,1]$  معرفی و ماتریس‌های عملیاتی انتگرال حاصل ضرب و مشتق این توابع برای تقریب مسئله کنترل بهینه به دست می‌آید. در بخش ۳ با بسط توابع کنترل و حالت بر اساس توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی و استفاده از ماتریس‌های عملیاتی، روش هم‌محلی و قاعده انتگرال گیری گاوس- لژاندر مسئله کنترل بهینه به مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌شود. تجزیه همگرایی و کران بالای خطا برای جواب بهینه تقریبی حاصل از روش ارائه شده در مقاله در بخش ۴ بررسی می‌شود. در بخش ۵ با حل دو مثال برای مسئله کنترل بهینه با سیستم دینامیکی معادله انتگرالی و دو مثال با معادله انتگرال-دیفرانسیل به کمک نرم‌افزارهای ریاضی کارایی و دقت این روش نشان داده می‌شود.

### توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی

در این بخش ابتدا توابع مقیاس و موجک‌های شبه متعامد با تکیه‌گاه فشرده بی‌اسپلاین مکعبی روی یک بازه کراندار را معرفی می‌کنیم از آن جاکه فضای مقیاس و موجک دارای بعد متناهی در یک سطح معین است، هر تابع روی یک بازه به وسیله تعدادی متناهی موجک‌ها و توابع مقیاس نمایش داده می‌شود، آنها فضاهایی متناهی‌البعدها شامل

موجک‌ها و توابع مقیاس مرزی و داخلی را تشکیل می‌دهند، از این‌رو نقش مهمی را در تحلیل عددی مسائل کنترل بهینه با شرایط معادلات انتگرال و معادلات انتگرال-دیفرانسیل بازی می‌کنند [۱۸]، [۲۴]، [۲۶].

تعریف ۱. دنباله گره‌های  $X^{(j_0)}$  روی بازه  $[0, 1]$  برای  $j_0 \in \mathbb{N}$  بدین صورت در نظر گرفته می‌شود:

$$X^{j_0} : x_{-3} = \dots = x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{2^{j_0}} < x_2 = \frac{2}{2^{j_0}} < \dots < x_k = \frac{k}{2^{j_0}} < \dots < 1 = x_{2^{j_0}} = \dots = x_{2^{j_0}+3}$$

برای این دنباله گره‌ها توابع مقیاس بی‌اسپلین مکعبی روی  $[0, 1]$  با رابطه بازگشتی (۴) بیان می‌کنیم:

$$\varphi_{X^{(j_0)}, k}^{(4)}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+3} - x_k} \varphi_{X^{(j_0)}, k}^{(3)}(x) + \frac{x_{k+4} - x}{x_{k+4} - x_{k+1}} \varphi_{X^{(j_0)}, k+1}^{(3)}(x) \quad (4)$$

$$\varphi_{X^{(j_0)}, k}^{(1)}(x) = \chi[x_k, x_{k+1}](x), \quad k = 0, 1, \dots, 2^{j_0} - 1 \quad \text{که}$$

قرار می‌دهیم:

$$V_{j_0} = \overline{\text{span}}\{\varphi_{j_0, k}^{(4)}(x), k = -3, -2, \dots, 2^{j_0} - 1\}$$

واضح است که  $V_{j_0}$  یک زیرفضای سره  $V_{j_0+1}$  است، با تعریف

$$v_i = \varphi_{j_0, i-4}(x) = B_{X^{(j_0)}, 4i-4}(x), \quad i = 1, \dots, 2^{j_0} + 3,$$

$$u_i = \varphi_{j_0+1, i-4}(x) = B_{X^{(j_0+1)}, 4i-4}(x), \quad i = 1, \dots, 2^{j_0+1} + 3$$

تعریف ۲. زیرفضای  $W_{j_0}$  مکمل متعامد  $V_{j_0}$  طبق قضیه تجزیه متعامد و شرایط متعامدی با استفاده از روابط (۵)

تشریح می‌شود:

$$W_{j_0} = \overline{\text{span}}\{\psi_{j_0, k}^{(4)}(x), k = -3, \dots, 2^{j_0} - 4\}, \quad \psi_{j_0, i-4}^{(4)}(x) = w_i, \quad i = 1, \dots, 2^{j_0} \quad (5)$$

بی‌اسپلین مکعبی پایه فضای  $W_{j_0}$  را موجک‌های بی‌اسپلین مکعبی متناظر با توابع مقیاس

$$w_i = \frac{1}{\|\Omega_i\|_2} \Omega_i \quad \text{می‌نامند. همچنین } w_i \text{ نیز با معادله}$$

به‌دست می‌آید به طوری که

$$\Omega_i = \det \begin{pmatrix} u_i & u_{i+1} & \dots & u_{2i+6} \\ \langle u_i, v_1 \rangle & \langle u_{i+1}, v_1 \rangle & \dots & \langle u_{2i+6}, v_1 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_i, v_{i+6} \rangle & \langle u_{i+1}, v_{i+6} \rangle & \dots & \langle u_{2i+6}, v_{i+6} \rangle \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\Omega_i = \det \begin{pmatrix} u_{2i-4} & u_{2i-3} & \dots & u_{2i+6} \\ \langle u_{2i-4}, v_{i-3} \rangle & \langle u_{2i-3}, v_{i-3} \rangle & \dots & \langle u_{2i+6}, v_{i-3} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_{2i-4}, v_{i+6} \rangle & \langle u_{2i-3}, v_{i+6} \rangle & \dots & \langle u_{2i+6}, v_{i+6} \rangle \end{pmatrix}, \quad i = 4, 5$$

همچنین  $w_i, (i = 1, 2, 3)$  و  $w_i, (i = 4, 5)$  به ترتیب موجک‌های بی‌اسپلین مکعبی داخلی و مرزی چپ است.

به دلیل خاصیت تقارن موجک‌های بی‌اسپلین برای موجک‌های بی‌اسپلین مرزی راست خواهیم داشت:

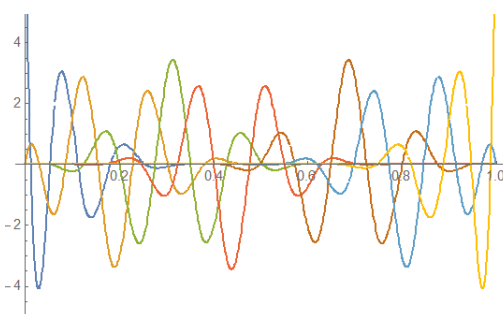
$$w_i = \psi_{j_0, 5-i}(1-x), \quad i = 6, 7, 8$$

شکل ۱ توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی در فضاهای  $V_3$  و  $W_3$  را نشان می‌دهد. موجک‌های  $\psi_{j,k}^{(4)}(x)$  برای  $j \geq j_0$  با رابطه (۶) داده می‌شود:

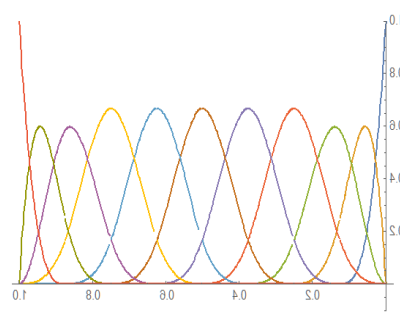
$$\psi_{j,k}^{(4)}(x) = \begin{cases} \psi_{j_0,k}^{(4)}(2^{j-j_0}x) & k = -3, -2, -1 \\ \psi_{j_0, 2^j-7-k}^{(4)}(1-2^{j-j_0}x) & k = 2^j - 6, \dots, 2^j - 4 \\ \psi_{j_0,0}^{(4)}(2^{j-j_0}x - \frac{k}{2^j}) & k = 0, \dots, 2^j - 7 \end{cases} \quad (6)$$

به‌وضوح قابل اثبات است که برای  $j \in \mathbb{Z}$  مکمل متعامد  $V_j$  در  $V_{j+1}$  است و  $\{\psi_{j,k}^{(4)}, k, j \in \mathbb{Z}\}$  یک پایه ریس برای  $L^2(\mathbb{R})$  است، پس بنابر قضیه تجزیه متعامد و تجزیه چندگانه داریم:

$$L^2(\mathbb{R}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \oplus W_j = V_{j_0} \oplus \sum_{j=j_0}^{\infty} \oplus W_j = \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} \quad (7)$$



ب



الف

شکل ۱. الف) توابع مقیاس بی‌اسپلاین مکعبی در فضای  $V_3$ ، ب) موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی در فضای  $W_3$  از طرفی تکیه‌گاه تابع مقیاس بی‌اسپلاین مکعبی بازه  $[0,1]$  و تکیه‌گاه موجک متناظر بازه  $[0,7]$  است. در هر مقیاس تجزیه، طول گام  $\frac{1}{2^j}$  است بنابراین برای هر  $j > 0$ ، بازه  $[0,1]$  به  $2^j$  زیربازه تقسیم می‌شود از این‌رو، برای این‌که حداقل یک موجک درونی در بازه داشته باشیم،  $j$  باید به‌گونه‌ای انتخاب شود که  $2^j \geq 7$ ، پس پایین‌ترین سطح برای  $j$  عبارت است از:  $j = j_0 = 3$ .

در نتیجه با توجه به مفروضات بالا و طبق رابطه (۷)، تصویر متعامد  $f(x)$  در فضای  $L^2(\mathbb{R})$  با  $j_u$  معین به‌صورت (۸) بیان می‌شود:

$$f(x) \simeq \sum_{k=-3}^{2^{j_0}-1} c_{j_0,k} \phi_{j_0,k}^{(4)}(x) + \sum_{j=j_0}^{j_u} \sum_{k=-3}^{2^j-4} d_{j,k} \psi_{j,k}^{(4)}(x) \quad (8)$$

که ضرایب  $c_{j_0,k}$  و  $d_{j_0,k}$  با استفاده از معادلات (۹) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} c_{j_0,k} &= \int_0^1 f(x) \tilde{\phi}_{j_0,k}^{(4)}(x) dx, \quad k = -3 \dots 2^{j_0} - 1 \\ d_{j_0,k} &= \int_0^1 f(x) \tilde{\psi}_{j_0,k}^{(4)}(x) dx, \quad k = -3, \dots, 2^j - 4, \quad j = j_0, \dots, j_u. \end{aligned} \quad (9)$$

توابع  $\tilde{\psi}_{j_0,k}^{(4)}$  و  $\tilde{\phi}_{j_0,k}^{(4)}$  را به‌ترتیب دوگان توابع  $\psi_{j_0,k}^{(4)}$  و  $\phi_{j_0,k}^{(4)}$  می‌گویند. با توجه به این‌که توابع مقیاس و موجک‌های

بی‌اسپلاین مکعبی شبه متعامد است، از این رو برای استفاده بهتر از آنها برای تقریب، تجزیه چندگانه دوگان را با زیرفضاهای  $\tilde{V}_j = \{\tilde{\varphi}_{j,k}^{(4)}, k \in \mathbb{Z}\}$  و  $\tilde{W}_j = \{\tilde{\psi}_{j,k}^{(4)}, k \in \mathbb{Z}\}$  که در شرایط تعامد (۱۰) صدق می‌کنند، به کار می‌بریم.

$$\begin{aligned} \tilde{V}_j \perp W_j, V_j \perp \tilde{W}_j, \tilde{W}_j \perp W_i, j \neq i \\ \tilde{V}_j \perp W_i, V_j \perp \tilde{W}_i, i \geq j \end{aligned} \quad (10)$$

با فرض

$$\begin{aligned} \gamma_{j_u}(x) = [\varphi_{j_0,-3}^{(4)}(x), \dots, \varphi_{j_0,2^{j_0}-1}^{(4)}(x), \psi_{j_0,-3}^{(4)}(x), \dots, \psi_{j_0,2^{j_0}-4}^{(4)}(x), \psi_{j_0+1,-3}^{(4)}(x), \dots, \psi_{j_u,2^{j_u}-4}^{(4)}(x)]^T \\ \rho = [c_{j_0,-3}, \dots, c_{j_0,2^{j_0}-1}, d_{j_0,-3}, \dots, d_{j_0,2^{j_0}-4}, d_{j_0+1,-3}, \dots, d_{j_u,2^{j_u}-4}] \end{aligned} \quad (11)$$

رابطه (۸) می‌تواند به صورت ماتریسی (۱۲) نوشته شود.

$$f(x) \simeq \rho \gamma_{j_u}(x) \quad (12)$$

هم‌چنین با در نظر گرفتن  $\tilde{\gamma}_{j_u}(x)$  به‌عنوان ماتریس دوگان توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی داریم:

$$\tilde{\gamma}_{j_u}(x) = T \gamma_{j_u}(x) \quad (13)$$

طرفین رابطه (۱۳) را در  $\gamma_{j_u}^T(x)$  ضرب کرده و روی بازه  $[0,1]$  انتگرال می‌گیریم، با استفاده از (۱۰) به دست

می‌آید:

$$P = T^{-1} = \int_0^1 \gamma_{j_u}(x) \gamma_{j_u}^T(x) dx \quad (14)$$

پس داریم:  $\tilde{\gamma}_{j_u}(x) = P^{-1} \gamma_{j_u}(x)$ .

اگر مشتق تابع برداری  $\gamma_{j_u}^T(x)$  به صورت  $\gamma_{j_u}'(x) = D_{j_u} \gamma_{j_u}(x)$  در نظر گرفته شود، داریم:

$$D_{j_u} = \int_0^1 \gamma_{j_u}'(x) \tilde{\gamma}_{j_u}^T(x) dx = \int_0^1 \gamma_{j_u}'(x) (P^{-1} \gamma_{j_u}(x))^T dx = E_\gamma (P^{-1})^T \quad (15)$$

که  $E_\gamma = \int_0^1 \gamma_{j_u}'(x) \gamma_{j_u}^T(x) dx$  و  $P$  را به ترتیب ماتریس عملیاتی مشتق و انتگرال حاصل ضرب توابع

مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی می‌نامند.

## حل عددی مسئله کنترل بهینه با قید معادله انتگرالی یا قید معادله انتگرال-دیفرانسیل

در این بخش مسائل کنترل بهینه با قیود معادلات انتگرالی یا انتگرال-دیفرانسیل و تابع معیار درجه دوم را با استفاده از ماتریس‌های عملیاتی انتگرال حاصل ضرب و مشتق حاصل از بسط توابع کنترل و حالت بر اساس توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی، روش هم‌محلی و قاعده انتگرال گیری گاوس-لژاندر به یک مسئله بهینه‌سازی غیرخطی تبدیل کرده و به کمک نرم‌افزار Mathematica 10.4 آن را حل می‌کنیم، و از آن‌جا توابع کنترل و حالت بهینه به دست می‌آید. هم‌چنین به بحث در مورد پیچیدگی محاسباتی روش می‌پردازیم.

### ۱. تقریب تابع معیار

برای تقریب تابع معیار ابتدا هر یک از توابع حالت، کنترل و هم‌چنین توابع  $f(t)$  و  $g(t)$  را بر اساس توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی و دوگان آنها به صورت (۱۶) بسط می‌دهیم.

$$\begin{aligned} x(t) &\approx X\gamma_{j_u}(t), & u(t) &\approx U\gamma_{j_u}(t), \\ f(t) &\approx F\tilde{\gamma}_{j_u}(t), & g(t) &\approx G\tilde{\gamma}_{j_u}(t) \end{aligned} \quad (16)$$

که بردارهای سطری  $F$  و  $G$  به دلیل معلوم بودن  $f$  و  $g$  بردارهای معلومی هستند و از رابطه (۹) به دست می‌آیند.  $\gamma_{j_u}(t)$  و  $\tilde{\gamma}_{j_u}(t)$  بردارهای توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین و دوگان آنها تعریف شده در (۱۱) و (۱۳) هستند. هم‌چنین  $X$  و  $U$  بردارهای مجهول از مرتبه  $(2^{j_u+1} + 3)$ ، به صورت‌های (۱۷) بیان می‌شوند.

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_{2^{j_u+1}+3}], \quad U = [u_1, u_2, \dots, u_{2^{j_u+1}+3}] \quad (17)$$

با جای‌گذاری روابط (۱۶) در تابع معیار (۱) به دست می‌آوریم:

$$\tilde{J}(X, U) = \int_0^1 (U\gamma_{j_u}(t)\gamma_{j_u}^T(t)U^T + X\gamma_{j_u}(t)\gamma_{j_u}^T(t)X^T + F\tilde{\gamma}_{j_u}(t)\gamma_{j_u}^T(t)X^T + G\tilde{\gamma}_{j_u}(t)\gamma_{j_u}^T(t)U^T) dt, \quad (18)$$

با توجه به این‌که توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی و دوگان آنها طبق (۱۰) متعامد یک‌ه است؛

هم‌چنین با به‌کار بردن رابطه (۱۴) داریم:

$$\tilde{J}(X, U) = UPU^T + XPX^T + FX^T + GU^T \quad (19)$$

رابطه (۱۹) نشان می‌دهد که  $\tilde{J}$  تابعی غیرخطی از  $X$  و  $U$  می‌باشد.

## ۲. تقریب سیستم با معادله انتگرالی

تابع حالت  $x$  و کنترل  $u$  را که به صورت (۱۶) بسط داده شده است در سیستم دینامیکی (۲) جای‌گذاری

می‌کنیم، بنابراین به دست می‌آوریم:

$$X\gamma_{j_u}(t) = y(t) + \int_0^t K(s, t, X\gamma_{j_u}(s), U\gamma_{j_u}(s)) ds \quad (20)$$

نقاط هم‌محلی  $t_i$  را به صورت (۲۱) تعریف می‌کنیم:

$$t_i = \frac{2i-1}{2(2^{j_u+1}+3)}, \quad i = 1, 2, \dots, 2^{j_u+1} + 3 \quad (21)$$

با قرار دادن این نقاط در (۲۰) داریم:

$$X\gamma_{j_u}(t_i) = y(t_i) + \int_0^{t_i} K(s, t_i, X\gamma_{j_u}(s), U\gamma_{j_u}(s)) ds, \quad i = 1, 2, \dots, 2^{j_u+1} + 3 \quad (22)$$

برای محاسبه انتگرال‌های موجود در (۲۲) از قاعده انتگرال‌گیری گاوس-لژاندر استفاده می‌کنیم. بنابراین بازه

انتگرال‌گیری باید به بازه  $[-1, 1]$  تبدیل شود. برای این کار از تغییر متغیر  $s = \frac{t_i}{2}(\tau + 1)$  استفاده می‌کنیم، در

نتیجه (۲۲) به سیستم (۲۳) تبدیل می‌شود:

$$(23)$$

$$X\gamma_{j_u}(t_i) = y(t_i) + \frac{t_i}{2} \int_{-1}^1 K\left(\frac{t_i}{2}(\tau + 1), t_i, X\gamma_{j_u}\left(\frac{t_i}{2}(\tau + 1)\right), U\gamma_{j_u}\left(\frac{t_i}{2}(\tau + 1)\right)\right) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, 2^{j_u+1} + 3$$

با اعمال قاعده انتگرال‌گیری عدی گاوس-لژاندر به دست می‌آید؛

$$(24)$$

$$X\gamma_{j_u}(t_i) = y(t_i) + \frac{t_i}{2} \sum_{j=1}^{2^{j_u+1}+3} w_j K\left(\frac{t_i}{2}(\tau_j+1), t_i, X\gamma_{j_u}\left(\frac{t_i}{2}(\tau_j+1)\right), U\gamma_{j_u}\left(\frac{t_i}{2}(\tau_j+1)\right)\right), \quad i=1,2,\dots,2^{j_u+1}+3$$

که  $\tau_j \in [-1,1]$  ها صفرهای چندجمله‌ای لژاندر  $p_{2^{j_u+1}+3}$  است و  $w_j$  ها وزنهای متناظر آنها هستند که از رابطه

(۲۵) به دست می‌آیند:

$$w_j = \frac{2}{(1-\tau_j^2)(p'_{2^{j_u+1}+3}(\tau_j))^2}, \quad j=1,2,\dots,2^{j_u+1}+3 \quad (25)$$

### ۳. تقریب سیستم دینامیکی با معادله انتگرال-دیفرانسیل

برای تقریب سیستم دینامیکی (۳)،  $x(t)$  و  $u(t)$  را به صورت (۱۸) در نظر می‌گیریم، بنابراین برای  $x'(t)$  از رابطه (۱۵) داریم:

$$x'(t) \simeq D_{j_u} X\gamma_{j_u}(t) \quad (26)$$

اکنون با جای گذاری روابط (۱۶) و (۲۶) در (۳) و استفاده نقاط هم‌محلی (۲۶) و هم‌چنین با به کارگیری قاعده انتگرال گیری گاوس-لژاندر داریم:

$$D_{j_u} X\gamma_{j_u}(t_i) = a(t_i)X\gamma_{j_u}(t_i) + b(t_i)U\gamma_{j_u}(t_i) + \frac{t_i}{2} \sum_{j=1}^{2^{j_u+1}+3} w_j K\left(t_i, \frac{t_i}{2}(\tau_j+1)\right) \quad (27)$$

$$\eta(X\gamma_{j_u}\left(\frac{t_i}{2}(\tau_j+1)\right), U\gamma_{j_u}\left(\frac{t_i}{2}(\tau_j+1)\right)), \quad X\gamma_{j_u}(0) = x_0, \quad i=1,2,\dots,2^{j_u+1}+3$$

که  $\tau_j$  ها صفرهای چندجمله‌ای لژاندر از درجه  $2^{j_u+1}+4$  و  $w_j$  وزنهای بیان شده در (۲۵) است.

### ۴. حل مسئله بهینه‌سازی غیرخطی

تابع معیار تقریب زده شده در (۱۹) با قیود (۲۵) یا (۲۷) مسئله کنترل بهینه (۱) و (۲) یا (۳) را به یک مسئله بهینه‌سازی غیرخطی به صورت‌های (۲۸) تبدیل می‌کند.

$$\min \tilde{J}(X, U) = UPU^T + XPX^T + FX^T + GU^T$$

$$\text{sto: } X\gamma_{j_u}(t_i) = y(t_i) + \frac{t_i}{2} \sum_{j=1}^{2^{j_u+1}+3} w_j K\left(\frac{t_i}{2}(\tau_j+1), t_i\right),$$

$$X\gamma_{j_u}\left(\frac{t_i}{2}(\tau_j+1)\right), U\gamma_{j_u}\left(\frac{t_i}{2}(\tau_j+1)\right)), \quad i=1,2,\dots,2^{j_u+1}+3. \quad (28)$$

یا

$$O((2^{j_u+1}+3)^2)$$

$$\text{sto: } D_{j_u} X\gamma_{j_u}(t_i) = a(t_i)X\gamma_{j_u}(t_i) + b(t_i)U\gamma_{j_u}(t_i) + \frac{t_i}{2} \sum_{j=1}^{2^{j_u+1}+3} w_j K\left(t_i, \frac{t_i}{2}(\tau_j+1)\right) \quad (29)$$

$$\eta(X\gamma_{j_u}\left(\frac{t_i}{2}(\tau_j+1)\right), U\gamma_{j_u}\left(\frac{t_i}{2}(\tau_j+1)\right)), \quad X\gamma_{j_u}(0) = x_0, \quad i=1,2,\dots,2^{j_u+1}+3.$$

با حل این مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی به وسیله یکی از الگوریتم‌های بهینه‌سازی غیرخطی جواب‌های بهینه  $X^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_{2^{j_u+1}+3}^*]$  و  $U^* = [u_1^*, u_2^*, \dots, u_{2^{j_u+1}+3}^*]$  به دست می‌آیند. بنابراین توابع حالت و کنترل



بهینه تقریبی با بسط‌های (۳۰) مشخص می‌شوند:

$$x^*(t) \approx X^* \gamma_{j_u}(t), \quad u^*(t) \approx U^* \gamma_{j_u}(t) \quad (30)$$

هم‌چنین جواب بهینه  $\tilde{J}^*(X^*, U^*)$  که تقریبی از جواب بهینه  $J^*$  است، به دست می‌آید.

## ۵. پیچیدگی محاسباتی

در این قسمت به بحث در مورد تعداد گام‌های مورد نظر برای حل مسائل کنترل بهینه با معادلات انتگرال یا انتگرال-دیفرانسیل به روش ارائه شده در این مقاله می‌پردازیم.

درایه‌های  $\gamma_{j_u}(t)$  شامل توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی است که به ترتیب با استفاده از روابط (۴) و (۶) به دست می‌آیند. برای به دست آوردن آنها عملیات ریاضی مشخصی استفاده می‌شود، از آن‌جا که تعداد این درایه‌ها  $2^{j_u+1} + 3$  است بنابراین پیچیدگی محاسباتی آن از مرتبه  $O(2^{j_u+1} + 3)$  می‌شود. ماتریس عملیاتی  $P$  با انتگرال‌گیری از درایه‌های ماتریس حاصل از ضرب  $\gamma_{j_u}(t)$  در ترانزپوز شده به دست می‌آید و به دلیل این که این بی‌اسپلاین‌ها دارای تکیه‌گاه فشرده و شبه متعامدند پس خیلی از درایه‌های آن صفر است، از این رو مرتبه پیچیدگی آن کم‌تر از  $O((2^{j_u+1} + 3)^2)$  است.

ماتریس  $D_{j_u}$  از حاصل ضرب دو ماتریس از مرتبه  $(2^{j_u+1} + 3) \times (2^{j_u+1} + 3)$  پس پیچیدگی محاسباتی آن  $O((2^{j_u+1} + 3)^{2.373})$  رساند. هر یک از عامل‌های  $UPU^T$ ،  $XPX^T$ ،  $FX^T$  و  $GU^T$  در (۱۹) پیچیدگی محاسباتی  $O((2^{j_u+1} + 3)^2)$  دارد، پس تابع معیار تقریبی از پیچیدگی محاسباتی  $O((2^{j_u+1} + 3)^2)$  برخوردار است.

سیستم‌های تقریبی (۲۴) و (۲۷) هر کدام یک دستگاه از معادلات غیر خطی با  $2^{j_u+1} + 3$  معادله و  $2^{j_u+1} + 3$  هستند، که با روش هم‌محلی به دست آمده‌اند؛ و در محاسبه آنها نیز عامل‌های  $X\gamma_{j_u}(t)$  و  $U\gamma_{j_u}(t)$  نقش دارند، بنابراین پیچیدگی محاسباتی برای سیستم‌ها نیز  $O((2^{j_u+1} + 3)^2)$  است. در نتیجه می‌توان گفت که پیچیدگی محاسباتی روش ارائه شده در این مقاله  $O((2^{j_u+1} + 3)^3)$  است.

## همگرایی روش

در این بخش ابتدا نشان داده می‌شود که اگر مسئله کنترل بهینه با تابع معیار (۱) و سیستم دینامیکی (۲) (مسئله A) دارای جواب شدنی باشد آن‌گاه مسئله تقریب شده (۲۸) (مسئله B) جواب شدنی دارد. سپس اثبات خواهد شد که دنباله‌ای از جواب‌های بهینه مسئله B به جواب بهینه مسئله A همگرا می‌شود و هم‌چنین کران بالای خطای تقریب را نیز به دست می‌آوریم. این مطالب در قالب سه قضیه ۳ و ۴ و ۵ نشان داده می‌شود.

**قضیه ۳.** برای بی‌اسپلاین مرتبه  $m$  اگر  $x_{j_u}$  جواب تقریبی برای جواب دقیق  $x$  باشد آنگاه کران بالای خطای

تقریب با رابطه (۳۱) داده می‌شود [۱۹]:

$$|x - x_{j_u}| \leq C_m 2^{-j_u m} |x^{(m)}|, \quad C_m = \sqrt{\frac{B_{2m}}{(2m)!}} \quad (31)$$

که  $B_{2m}$  یک عدد برنولی از مرتبه  $2m$  است.

قضیه ۴. فرض کنید  $x$  و  $u$  جواب‌های شدنی مسئله  $A$  و متعلق به فضای  $C^{(4)}(\mathbb{R})$  باشند و  $K(s, t, x(s), u(s))$  نسبت به هر دو متغیر  $x(t)$  و  $u(t)$  در شرط لیپ شیتز صدق کند آن‌گاه عدد مثبت  $j_u'$  وجود دارد به طوری که برای مسئله  $B$  دارای جواب‌های شدنی  $x_{j_u}(t_p) = X\gamma_{j_u}(t_p)$  و  $u_{j_u}(t_p) = U\gamma_{j_u}(t_p)$  برای  $i = 1, 2, \dots, 2^{j_u+1} + 3$   $t_p \in I_i = [\frac{i-1}{2^{j_u+1}+3}, \frac{i}{2^{j_u+1}+3}]$  است و جواب‌های شدنی در روابط (۳۲) صدق می‌کنند.

$$|x(t_p) - x_{j_u}(t_p)| \leq C_4 2^{-4j_u} |x^{(4)}|, \quad p = 1, 2, \dots, 2^{j_u+1} + 3$$

$$|u(t_p) - u_{j_u}(t_p)| \leq C_4 2^{-4j_u} |u^{(4)}|, \quad p = 1, 2, \dots, 2^{j_u+1} + 3 \quad (32)$$

$t_p$  صفرهای چند جمله‌ای لژاندر انتقال یافته به بازه  $[0, 1]$  است.

**اثبات.** فرض کنیم  $x$  و  $u$  جواب‌های شدنی مسئله  $A$  و  $x_{j_u}$  و  $u_{j_u}$  تقریب این توابع به وسیله موجک‌های بی‌اسپلاین

مکعبی روی بازه  $[0, 1]$  باشند طبق قضیه ۳ برای  $t_p \in I_i = [\frac{i-1}{2^{j_u+1}+3}, \frac{i}{2^{j_u+1}+3}]$  رابطه (۳۲) به دست می‌آید.

از آن‌جا که  $x(t_p)$  و  $u(t_p)$  جواب‌های شدنی مسئله  $A$  می‌باشند؛ پس داریم:

$$x(t_p) - y(t_p) - \int_0^t K(s, t_p, x(s), u(s)) ds = 0 \quad (33)$$

از این‌رو طبق رابطه‌های (۳۲) و (۳۳) و این‌که  $K$  در شرط لیپ شیتز صدق می‌کند، برای  $x_{j_u}(t)$  و  $u_{j_u}(t)$  به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & |x_{j_u}(t_p) - y(t_p) - \int_0^t K(s, t_p, x_{j_u}(s), u_{j_u}(s)) ds| \leq |x_{j_u}(t_p) - x(t_p)| \\ & + |\int_0^t K(s, t_p, x_{j_u}(s), u_{j_u}(s)) ds - \int_0^t K(s, t_p, x(s), u(s)) ds| \\ & + |x(t_p) - y(t_p) - \int_0^t K(s, t_p, x(s), u(s)) ds| \\ & \leq C_4 2^{-4j_u} |x^{(4)}| + \lambda_k \int_0^t |x_{j_u}(t_p) - x(t_p)| + |u_{j_u}(t_p) - u(t_p)| ds \\ & \leq C_4 2^{-4j_u} |x^{(4)}| + \lambda_k \frac{t_p}{2} (C_4 2^{-4j_u} |x^{(4)}| + C_4 2^{-4j_u} |u^{(4)}|) \\ & \leq (C_4 |x^{(4)}| + \lambda_k \frac{i}{2^{j_u+1}+3} (C_4 |x^{(4)}| + C_4 |u^{(4)}|)) 2^{-4j_u} \end{aligned}$$

که  $\lambda_k$  ثابت لیپ شیتز است.

$$\max_{1 \leq i \leq 2^{j_u+1}+3} [C_4 |x^{(4)}| + \lambda_k \frac{i}{2^{j_u+1}+3} (C_4 |x^{(4)}| + C_4 |u^{(4)}|)] = j_u'$$

پس برای  $j_u \geq j_u'$  داریم:

$$|x_{j_u}(t_p) - y(t_p) - \int_0^t K(s, t_p, x_{j_u}(s), u_{j_u}(s)) ds| \leq j_u 2^{-4j_u} \quad (34)$$

با افزایش  $j_u$  به مسئله  $B$  نزدیک می‌شود بنابراین نتیجه می‌گیریم  $x_{j_u}$  و  $u_{j_u}$  جواب‌های شدنی مسئله  $B$  است.

با فرض این‌که  $X^*$  و  $U^*$  جواب‌های بهینه‌ای باشند که از حل مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی  $B$  حاصل می‌شوند،

توابع حالت و کنترل بهینه تقریبی به شکل ماتریسی (۳۵) تعریف می‌شوند:

$$x_{j_u}^*(t) = X^* \gamma_{j_u}(t), \quad u_{j_u}^*(t) = U^* \gamma_{j_u}(t) \quad (35)$$

در قضیه زیر ثابت می‌شود که دنباله  $\{(x_{j_u}^*(t_p), u_{j_u}^*(t_p)) : 1 \leq p \leq 2^{j_u+1} + 3\}_{j_u=j}^\infty$  از زوج جواب‌های بهینه مسئله  $B$  به زوج جواب بهینه مسئله  $A$  همگرا خواهد شد.

**قضیه ۵.** فرض کنید که دنباله  $\{(x_{j_u}^*(t_p), u_{j_u}^*(t_p)) : 1 \leq p \leq 2^{j_u+1} + 3\}_{j_u=j}^\infty$  یک دنباله از جواب‌های بهینه مسئله  $B$  باشد که به  $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$  همگرایی یکنواخت است آن‌گاه زوج جواب بهینه مسئله  $A$  است.

**اثبات.** ابتدا نشان داده می‌شود که  $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$  یک زوج جواب شدنی مسئله  $A$  است. فرض کنیم جواب شدنی نباشد پس طبق تعریف جواب شدنی  $t' \in [0, 1]$  وجود دارد به طوری که

$$\tilde{x}(t') - y(t') - \int_0^{t'} K(s, t', \tilde{x}(s), \tilde{u}(s)) ds \neq 0 \quad (36)$$

هم‌چنین  $i \in \mathbb{N}$  وجود دارد به طوری که  $t' \in I_i$ ، چون صفرهای چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته به بازه  $[0, 1]$  در این بازه چگال هستند پس دنباله  $\{t_n\}$  از این نقاط وجود دارد به طوری که  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t'$ . از آن‌جا که توابع  $x_{j_u}^*$ ،  $u_{j_u}^*$  و  $K(s, t_p, x_{j_u}^*(s), u_{j_u}^*(s))$  روی بازه فشرده  $[0, 1]$  پیوسته در نتیجه پیوسته یکنواخت است و  $j_u$  نیز با افزایش  $n$  افزایش می‌یابد، بنابراین با توجه به فرض قضیه داریم:

$$x_{j_u}^*(t) \rightarrow \tilde{x}(t), \quad u_{j_u}^*(t) \rightarrow \tilde{u}(t), \quad K(s, t, x_{j_u}^*(s), u_{j_u}^*(s)) \rightarrow K(s, t, \tilde{x}(s), \tilde{u}(s))$$

در نتیجه به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t') - y(t') - \int_0^{t'} K(s, t', \tilde{x}(s), \tilde{u}(s)) ds = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{j_u}^*(t_i) - y(t_i) - \int_0^{t_i} K(s, t_i, x_{j_u}^*(s), u_{j_u}^*(s)) ds) = 0. \end{aligned}$$

که با رابطه (۳۶) در تناقض است.

نشان می‌دهیم که تابع معیار مسئله  $B$  در  $(X^*, U^*)$  به تابع معیار مسئله  $A$  در  $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$  همگرا می‌شود. پس طبق روابط (۱۹)، (۱۸)، (۱)، (۳۵)، قضیه ۴، فرض قضیه و همگرایی یکنواخت داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{j_u \rightarrow \infty} \tilde{J}(X^*, U^*) &= \lim_{j_u \rightarrow \infty} (U^* P U^{*T} + X^* P X^{*T} + F X^{*T} + G U^{*T}) \\ &= \int_0^1 \lim_{j_u \rightarrow \infty} (U^* \gamma_{j_u}^T(t) \gamma_{j_u}^T(t) U^{*T} + X^* \gamma_{j_u}^T(t) \gamma_{j_u}^T(t) X^{*T} + F \tilde{\gamma}_{j_u}^T(t) \gamma_{j_u}^T(t) X^{*T} \\ &\quad + G \tilde{\gamma}_{j_u}^T(t) \gamma_{j_u}^T(t) U^{*T}) dt = \dots = \int_0^1 (\tilde{u}^2(t) + \tilde{x}^2(t) + f(t) \tilde{x}(t) + g(t) \tilde{u}(t)) dt \\ &= J(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \end{aligned}$$

حال ثابت می‌کنیم که  $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$  زوج جواب بهینه مسئله  $A$  است. برای این کار فرض می‌کنیم  $(x^*(t), u^*(t))$  جواب بهینه مسئله  $A$  باشد، پس طبق قضیه ۴ و رابطه (۳۲) دنباله‌ای از جواب‌های شدنی  $\{(x_{j_u}^*(t_p), u_{j_u}^*(t_p)) : 1 \leq p \leq 2^{j_u+1} + 3\}_{j_u=j}^\infty$  برای مسئله  $B$  وجود دارد طوری که به جواب بهینه  $(x^*(t_p), u^*(t_p))$  همگرای یکنواخت است. از طرفی می‌دانیم که

$$J(x^*(t), u^*(t)) = \int_0^1 (u^{*2}(t) + x^{*2}(t) + f(t)x^*(t) + g(t)u^*(t)) dt$$

9

$$\lim_{j_u \rightarrow \infty} \tilde{J}(x_{j_u}^*(t), u_{j_u}^*(t)) = J(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$$

به طریق مشابه قبل می‌توان نشان داد که

$$\lim_{j_u \rightarrow \infty} \tilde{J}(\hat{x}_{j_u}(t), \hat{u}_{j_u}(t)) = J(x^*(t), u^*(t))$$

در نتیجه با استفاده از تعریف جواب بهینه داریم:

$$J(x^*(t), u^*(t)) \leq J(\tilde{x}_{j_u}(t), \tilde{u}_{j_u}(t)) = \lim_{j_u \rightarrow \infty} \tilde{J}(x_{j_u}^*(t), u_{j_u}^*(t)) \leq \tilde{J}(\hat{x}_{j_u}(t), \hat{u}_{j_u}(t))$$

بنابراین با استفاده از قضیه فشردگی در حد به دست می‌آوریم؛  $J(x^*(t), u^*(t)) = J(\hat{x}_{j_u}(t), \hat{u}_{j_u}(t))$  و این نشان می‌دهد که  $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$  جواب بهینه مسئله A است.

### نتایج عددی

در این بخش روش ذکر شده در مقاله را برای حل دو مثال کنترل بهینه با سیستم دینامیکی معادلات انتگرالی و دو مثال با سیستم دینامیکی معادله انتگرال-دیفرانسیل به کار می‌بریم. برای نشان دادن کارایی و دقت این روش از مثال‌هایی استفاده می‌کنیم که تابع کنترل بهینه، تابع حالت بهینه و جواب بهینه تابع معیار مشخص است و آن را با روش‌های دیگر مقایسه می‌کنیم. هم‌چنین به منظور بررسی بهتر خطای این روش‌ها از روابط (۳۷) استفاده می‌کنیم:

$$\rho_{x^*} = \max_{1 \leq i \leq 2^{j_u+1}+3} |x^*(t_i) - x_{j_u}^*(t_i)|, \quad \rho_{u^*} = \max_{1 \leq i \leq 2^{j_u+1}+3} |u^*(t_i) - u_{j_u}^*(t_i)|$$

$$\rho_{j^*} = |J^*(x^*, u^*) - \tilde{J}^*(x_{j_u}^*, u_{j_u}^*)| \quad (37)$$

این مثال‌ها با استفاده از نرم‌افزار متمتیکا ۱۰.۴ برنامه‌نویسی و حل شده‌اند و مدت زمانی که طول می‌کشد تا برنامه‌ها اجرا شود نیز بیان شده است.

**مثال ۶.** تابع حالت بهینه  $x^*$  و کنترل بهینه متناظر با آن  $u^*$  را طوری به دست آورید که در سیستم دینامیکی (۳۸) صدق کند و تابع معیار (۳۹) را حداقل نماید.

$$x(t) = t \cos(t) - \frac{1}{2} t^3 - \int_0^t u(s)(x(s) + t) ds \quad (38)$$

$$J = \int_0^1 (x(t) - \sin(t))^2 + (u(t) - t)^2 dt \quad (39)$$

جواب‌های دقیق توابع کنترل، حالت و تابع معیار به ترتیب عبارتند از  $x^*(t) = \sin(t)$ ،  $u^*(t) = t$  و  $J^* = 0$ . این مسئله را با استفاده از روش مذکور برای  $j_u = 4$  و  $j_u = 3$  حل شد و مقدار خطای تابع معیار بهینه تقریبی به ترتیب برابر است با  $\rho_{j_4^*} = 5.17657 \times 10^{-13}$  و  $\rho_{j_3^*} = 2.02532 \times 10^{-12}$ ، در حالی که این خطا برای روش بیان شده در [۱۳] برای توابع هایبریدی لژاندر  $M = 3$  و  $M = 4$  به صورت  $\rho_{j_3^*} = 5.6973 \times 10^{-9}$  و  $\rho_{j_4^*} = 3.3217 \times 10^{-12}$  است، که نشان می‌دهد روش موجک‌های بی‌اسپلین مکعبی تاحدی دقت بیشتری دارد. هم‌چنین بیشینه‌های خطا در نقاط هم‌محلی برای توابع حالت و کنترل بهینه تقریب برای  $j_u = 4$  عبارتند از  $\rho_{x^*} = 1.88609 \times 10^{-9}$  و  $\rho_{u^*} = 9.07287 \times 10^{-1}$ ، در صورتی که این خطاها برای  $M = 4$  در [۱۳]،

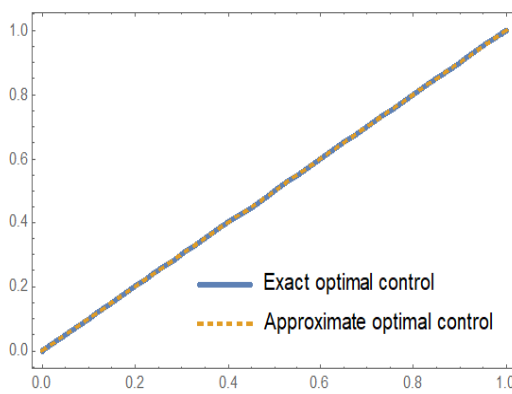
در چند نقطه برای  $J_u = 4$  به ما می‌دهد. شکل ۲ توابع کنترل و حالت بهینه تقریب و دقیق را نشان می‌دهد. زمان اجرای برنامه این مثال برای  $J_u = 3$  با یک سیستم تک پردازنده ۴۷۶,۰۰۸۶۰۷۶ ثانیه طول کشید و اکثریت زمان اجرا مربوط به محاسبه ماتریس‌های  $P$  در (۱۴)،  $F$  و  $G$  در (۱۹) و هم‌چنین دستور NMinimize موجود در نرم‌افزار است. برای تقریب بهتر این ماتریس‌ها به صورت تحلیلی حل شده‌اند. ۲/۰۲۵۳۲

جدول ۱. مقایسه جواب بهینه تقریبی روش [۱۳] و روش پیشنهادی برای مثال ۶

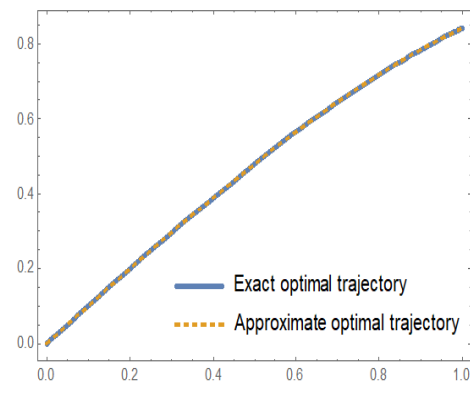
$J_u$	M	$\rho_{j^*}$	$[\rho_{j^*}]_{[13]}$
۳	۳	$2/0.2532 \times 10^{-12}$	$5/6973 \times 10^{-3}$
۴	۴	$5/17657 \times 10^{-13}$	$3/3217 \times 10^{-12}$

جدول ۲. نتایج عددی توابع کنترل و حالت بهینه تقریبی به روش موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی با  $J_u = 4$

$t_i$	$ x^* - x_{j_u}^* $	$ u^* - u_{j_u}^* $
۰/۰	$4/23472 \times 10^{-9}$	$7/98292 \times 10^{-7}$
۰/۱	$8/20811 \times 10^{-10}$	$6/41301 \times 10^{-7}$
۰/۲	$3/4998 \times 10^{-9}$	$6/92942 \times 10^{-7}$
۰/۳	$6/36271 \times 10^{-9}$	$478297 \times 10^{-7}$
۰/۴	$2/79874 \times 10^{-9}$	$8/08663 \times 10^{-8}$
۰/۵	$1/62103 \times 10^{-10}$	$8/2428 \times 10^{-7}$
۰/۶	$5/03236 \times 10^{-8}$	$8/02574 \times 10^{-7}$
۰/۷	$1/3297 \times 10^{-8}$	$9/01216 \times 10^{-7}$
۰/۸	$8/36792 \times 10^{-9}$	$7/96538 \times 10^{-7}$
۰/۹	$1/67713 \times 10^{-8}$	$4/74831 \times 10^{-7}$
۱/۰	$4/25479 \times 10^{-9}$	$2/18449 \times 10^{-8}$



ب



الف

شکل ۲. الف) توابع حالت بهینه دقیق و بهینه تقریبی، ب) توابع کنترل بهینه دقیق و بهینه تقریبی  
 مثال ۷. مسئله کنترل بهینه با تابع معیار درجه دوم و سیستم دینامیکی معادله انتگرالی (۴۰) را در نظر بگیرید:

$$J = \int_0^1 (x(t) - e^{-t^2})^2 + (u(t) - t)^2 dt \tag{40}$$

$$\text{s.t.} \quad x(t) = e^{-t^2} + \frac{t(1-e^{-t^2})}{2} - \int_0^t u(s, x) s(ds)$$

جواب‌های دقیق توابع کنترل، حالت و تابک معیار بهینه به ترتیب عبارتند از  $u^*(t) = t$ ،  $x^*(t) = e^{-t^2}$  و  $J^* = 0$ . این مسئله را با استفاده از روش مذکور برای  $j_u = 3$  حل شد و مقدار خطای تابع معیار بهینه تقریبی برابر است با  $\rho_{j^*} = 3.7756 \times 10^{-13}$ ، در حالی که این خطا برای روش بیان شده در [۱۳] برای توابع هایبریدی لژاندر  $M = 5$ ،  $\rho_{j^*} = 8.5037 \times 10^{-12}$  است. که نشان می‌دهد روش موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی دقت بیشتری دارد. همچنین بیشینه‌های خطا در نقاط هم‌محلی برای توابع حالت و کنترل بهینه تقریب عبارتند از  $\rho_{x^*} = 2.89296 \times 10^{-8}$  و  $\rho_{u^*} = 1.34172 \times 10^{-7}$ ، در صورتی که این خطاها برای [۱۳]  $\rho_{x^*} = 4.5577 \times 10^{-6}$  و  $\rho_{u^*} = 3.3455 \times 10^{-6}$  است. جدول ۳ خطای مطلق توابع حالت و کنترل بهینه تقریبی در چند نقطه به ما می‌دهد. شکل ۳ توابع کنترل و حالت بهینه تقریب و دقیق را با  $j_u = 3$  نشان می‌دهد.

زمان اجرای برنامه این مثال برای  $j_u = 3$  با یک سیستم تک پردازنده  $4.084, 4.778, 4.85$  ثانیه طول کشید و اکثریت زمان اجرا مربوط به محاسبه ماتریس‌های  $P$  در (۱۴)،  $F$  و  $G$  در (۱۹) و همچنین دستور NMinimize موجود در نرم‌افزار است.

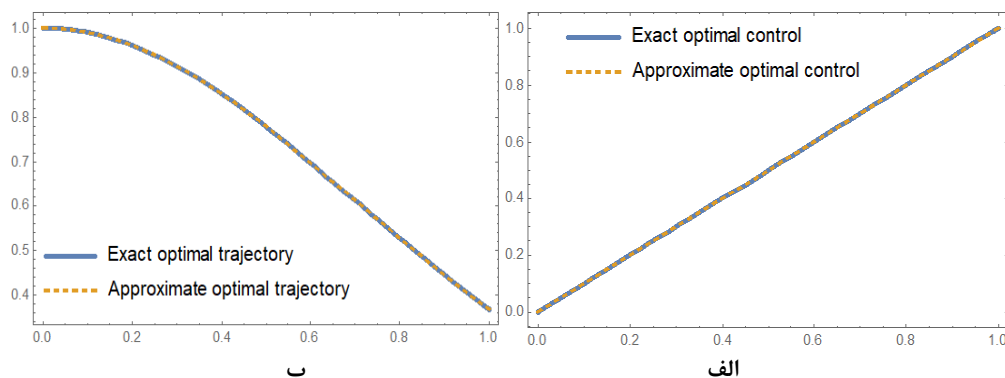
جدول ۳. نتایج عددی توابع کنترل و حالت بهینه تقریبی به روش موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی با  $j_u = 3$

$ u^* - u_{j_u}^* $	$ x^* - x_{j_u}^* $	$t_i$
$2/526.09 \times 10^{-8}$	$2/51.19 \times 10^{-8}$	۰/۰
$2/27736 \times 10^{-8}$	$3/945.09 \times 10^{-8}$	۰/۱
$2/595.02 \times 10^{-8}$	$1/23371 \times 10^{-8}$	۰/۲
$1/2797 \times 10^{-7}$	$3/0.8939 \times 10^{-7}$	۰/۳
$5/975.01 \times 10^{-8}$	$1/8647 \times 10^{-8}$	۰/۴
$1/25.14 \times 10^{-7}$	$1/4.136 \times 10^{-8}$	۰/۵
$6/0.4621 \times 10^{-8}$	$6/63137 \times 10^{-8}$	۰/۶
$3/0.877 \times 10^{-8}$	$8/56959 \times 10^{-8}$	۰/۷
$5/0.4461 \times 10^{-8}$	$6/67678 \times 10^{-8}$	۰/۸
$1/65844 \times 10^{-8}$	$2/34575 \times 10^{-7}$	۰/۹
$3/7685 \times 10^{-8}$	$7/44983 \times 10^{-7}$	۱/۰

مثال ۸. مسئله کنترل بهینه با تابع معیار درجه دوم و سیستم دینامیکی معادله انتگرال-دیفرانسیل غیرخطی (۴۱) را نظر بگیرید:

$$J = \int_0^1 ((x(t) - e^{t^2})^2 + (u(t) - 2t - 1)^2) dt \quad (41)$$

$$\text{s.t.} \quad x'(t) = -x(t) + u(t) + \int_0^t (1+2t)e^{s(t-s)} x(s) ds, \quad x(0) = 1$$



شکل ۳. الف) توابع حالت بهینه دقیق و بهینه تقریبی، ب) توابع کنترل بهینه دقیق و بهینه تقریبی

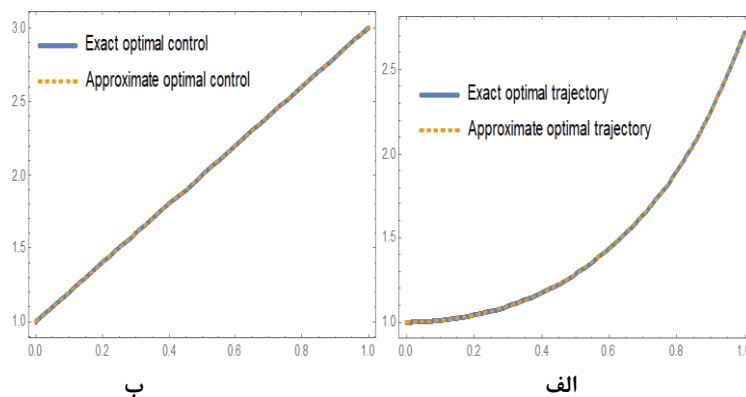
جواب‌های دقیق توابع کنترل، حالت و تابک معیار بهینه به ترتیب عبارتند از  $u^*(t) = 1 + 2t$ ،  $x^*(t) = e^{t^2}$  و  $J^* = 0$ . این مسئله را با استفاده از روش مذکور برای  $j_u = 4$  و  $j_u = 3$  حل شد و مقدار خطای تابع معیار بهینه تقریبی به ترتیب برابر است با  $\rho_{j_4}^* = 8.0684 \times 10^{-12}$  و  $\rho_{j_3}^* = 3.61691 \times 10^{-11}$ ، در حالی که این خطا برای روش بیان شده در [۱۲] برای موجک‌هایی لژاندر  $M = 4$  و  $M = 6$  به صورت  $\rho_{j_4}^* = 5.1861 \times 10^{-4}$  و  $\rho_{j_6}^* = 7.4667 \times 10^{-8}$  است، که نشان می‌دهد روش موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی تا حدی دقت بیشتری دارد. همچنین بیشینه‌های خطا در نقاط هم‌محلی برای توابع حالت و کنترل بهینه تقریب برای  $j_u = 4$  عبارتند از  $\rho_{x^*}^* = 3.04883 \times 10^{-6}$  و  $\rho_{u^*}^* = 4.742 \times 10^{-6}$ ، در صورتی که این خطاها برای  $M = 6$  در [۱۲]،  $\rho_{x^*}^* = 8.0233 \times 10^{-5}$  و  $\rho_{u^*}^* = 4.5393 \times 10^{-4}$  است. جدول ۵ خطای مطلق توابع حالت و کنترل بهینه تقریبی در چند نقطه برای  $j_u = 4$  به ما می‌دهد. شکل ۴ توابع کنترل و حالت بهینه تقریب و دقیق را نشان می‌دهد. زمان اجرای برنامه این مثال برای  $j_u = 4$  با یک سیستم تک پردازنده ۱۰۴۴،۴۵۸۲۹۹۶ ثانیه طول کشید و اکثریت زمان اجرا مربوط به محاسبه ماتریس‌های  $P$  در (۱۴)،  $D_{j_u}$  در (۱۵)،  $F$  و  $G$  در (۱۹) و همچنین دستور NMinimize موجود در نرم افزار است.

جدول ۴. مقایسه جواب بهینه تقریبی روش [۱۲] و روش پیشنهادی برای مثال ۸

$\rho_{j^*}^*$	$\rho_{j^*}^*$	M	$j_u$
$5.1861 \times 10^{-4}$	$3.61691 \times 10^{-11}$	۴	۳
$7.4667 \times 10^{-8}$	$8.0684 \times 10^{-12}$	۶	۴

جدول ۵. نتایج عددی توابع کنترل و حالت بهینه تقریبی به روش موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی با  $j_u = 4$

$ u^* - u_{j_u}^* $	$ x^* - x_{j_u}^* $	$t_i$
$1/875817 \times 10^{-7}$	$6/36924 \times 10^{-7}$	۰/۰
$2/16862 \times 10^{-8}$	$6/70413 \times 10^{-7}$	۰/۱
$5/56395 \times 10^{-8}$	$6/06322 \times 10^{-7}$	۰/۲
$1/14494 \times 10^{-7}$	$5/3638 \times 10^{-7}$	۰/۳
$3/11234 \times 10^{-7}$	$5/06595 \times 10^{-7}$	۰/۴
$4/7421 \times 10^{-7}$	$3/16974 \times 10^{-7}$	۰/۵
$3/22239 \times 10^{-7}$	$2/80934 \times 10^{-7}$	۰/۶
$1/64804 \times 10^{-7}$	$2/03739 \times 10^{-7}$	۰/۷
$8/65253 \times 10^{-8}$	$6/88816 \times 10^{-7}$	۰/۸
$1/72208 \times 10^{-7}$	$1/11664 \times 10^{-7}$	۰/۹
$4/02455 \times 10^{-8}$	$9/36645 \times 10^{-7}$	۱/۰



شکل ۴. الف) توابع حالت بهینه دقیق و بهینه تقریبی، ب) توابع کنترل بهینه دقیق و بهینه تقریبی

مثال ۹. تابع حالت بهینه  $x^*$  و کنترل بهینه متناظر با آن  $u^*$  را طوری به دست آورید که در سیستم دینامیکی (۴۲) صدق کند و تابع معیار (۴۳) را حداقل کند.

$$x'(t) = \frac{3}{2}x(t) - \frac{1}{2}u(t) + \int_0^t (x^3(s)e^{t-s})ds, \quad x(0) = 1 \quad (42)$$

$$J = \int_0^1 (x(t) - e^t)^2 + (u(t) - e^{3t})^2 dt \quad (43)$$

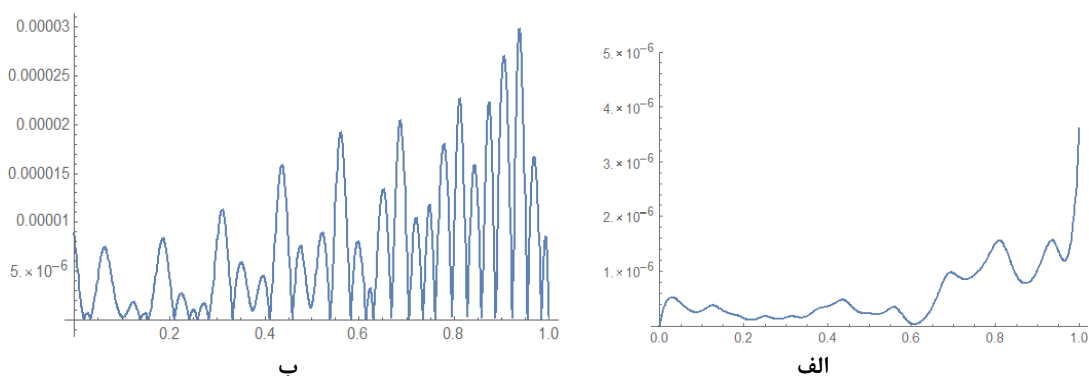
جواب‌های دقیق توابع کنترل، حالت و تابع معیار به ترتیب عبارتند از  $u^*(t) = e^{3t}$ ،  $x^*(t) = e^t$  و  $J^* = 0$ . این مسئله را با استفاده از روش مذکور برای  $j_u = 3$  حل شد و مقدار خطای تابع معیار بهینه تقریبی برابر است با  $\rho_{j_3}^* = 1.86307 \times 10^{-10}$ ، در حالی که این خطا برای روش بیان شده در [۱۲] برای موجک‌های لژاندر  $M = 4$  به صورت  $\rho_{j_4}^* = 5.6973 \times 10^{-9}$  است، که نشان می‌دهد روش موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی تا حدی دقت بیشتری دارد. همچنین بیشینه‌های خطا در نقاط هم‌محلی برای توابع حالت و کنترل بهینه تقریب برای  $j_u = 3$  عبارتند از  $\rho_{x^*}^* = 1.52922 \times 10^{-6}$  و  $\rho_{u^*}^* = 2.09036 \times 10^{-5}$ ، در صورتی که این خطاها برای  $M = 4$  در [۱۲]،  $\rho_{x^*}^* = 1.6433 \times 10^{-4}$  و  $\rho_{u^*}^* = 1.1330 \times 10^{-2}$  است. شکل ۵ نمودار خطای مطلق توابع حالت و



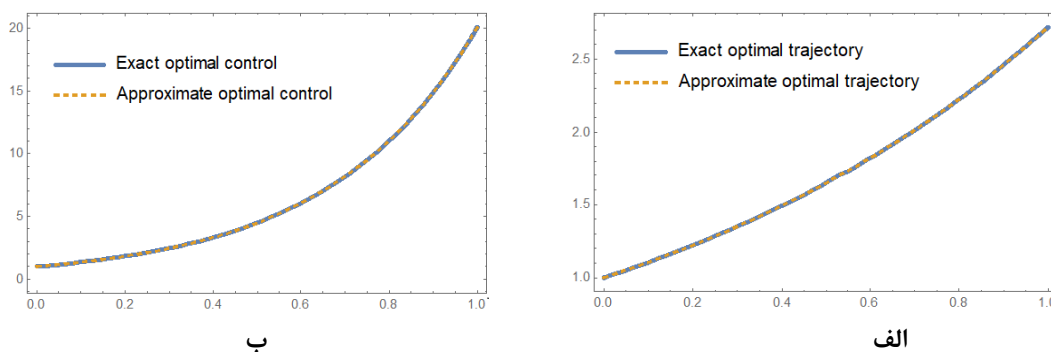
کنترل بهینه تقریبی برای  $J_{II} = 3$  به ما می‌دهد. شکل ۶ توابع کنترل و حالت بهینه تقریب و دقیق را نشان می‌دهد.

### نتایج

در روش پیشنهادی بردار توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین مکعبی به‌طور موفقیت‌آمیزی برای مسائل کنترل بهینه با سیستم دینامیکی معادله انتگرالی و معادله انتگرال-دیفرانسیل به‌کار برده شد. همچنین با استفاده از ماتریس عملیاتی حاصل ضرب و تقریب بعضی از توابع به‌وسیلهٔ وگان توابع مقیاس و موجک‌های بی‌اسپلاین تابک معیار بدون حل انتگرال به یک معادله غیرخطی تبدیل شد. علاوه بر این با به‌کارگیری ماتریس عملیاتی مشتق، روش هم‌محلی و انتگرال‌گیری عددی سیستم دینامیکی پیوسته به‌سادگی به یک دستگاه معادلات غی خطی کاهش پیدا کرد. با بررسی همگرای روش به این نتیجه می‌رسیم که کران بالای خطا به‌صورت نمایی کاهش می‌یابد. مثال‌های عددی نشان می‌دهد که روش کارایی خوبی دارد و دقت زیادی دارد. با ساختن ماتریس‌های عملیاتی دیگر می‌توان این موجک‌ها را برای حل انواع مختلفی از مسائل کنترل بهینه به‌کار برد.



شکل ۵. الف) نمودار خطای مطلق تابع حالت بهینه تقریبی، ب) نمودار خطای مطلق تابع کنترل بهینه تقریبی



شکل ۶. الف) توابع حالت بهینه دقیق و بهینه تقریبی، ب) توابع کنترل بهینه دقیق و بهینه تقریبی

### سپاس‌گزاری

نویسندگان از بررسی‌کنندگان این مقاله برای بیان نظریات و پیشنهادات خوب‌شان که به بهبود کیفیت این مقاله کمک کرد، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنند.

## منابع

1. Kuo B. C., "Automatic control systems", Prentice Hall PTR (1987).
2. Peyghami M. R., Hadizadeh M., Ebrahimzadeh A., "Some explicit class of hybrid methods for optimal control of Volterra integral equations", *J. Inform. Comput. Sci*, 7(4) (2012) 253-266.
3. Kochetkov Y. A., Tomshin V. K., "Optimal control of deterministic systems described by integro-differential equations", *Avtomatika i Telemekhanika* (1) (1978) 5-11.
4. Bagley R. L., Calico R. A., "Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 14(2) (1991) 304-311.
5. Hartley T. T., Lorenzo C. F., "Dynamics and control of initialized fractional-order systems", *Nonlinear Dynamics*, 29 (1) (2002), 201-233.
6. Neustadt L. W., Warga J., "Comments on the Paper" Optimal Control of Processes Described by Integral Equations", I" by VR Vinokurov. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 8 (4) (1970) 572.
7. Bakke V. L., "A maximum principle for an optimal control problem with integral constraints", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 13 (1) (1974) 32-55.
8. Belbas S. A., "A reduction method for optimal control of Volterra integral equations", *Applied Mathematics and Computation*, 197(2)(2008) 880-890.
9. Belbas S. A., "A new method for optimal control of Volterra integral equations. *Applied Mathematics and Computation*, 189 (2) (2007) 1902-1915.
10. Belbas S. A., "Iterative schemes for optimal control of Volterra integral equations", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications*, 37 (1) (1999) 57-79.
11. Tohidi E., Samadi O. R. N., "Optimal control of nonlinear Volterra integral equations via Legendre polynomials", *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 30 (1) (2012) 67-83.
12. Maleknejad K., Ebrahimzadeh A., "Optimal control of Volterra integro-differential systems based on Legendre wavelets and collocation method. *World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering*, 8 (7) (2014) 1040-1044.
13. Maleknejad K., Ebrahimzadeh A., "An efficient hybrid pseudo-spectral method for solving optimal control of Volterra integral systems", *Mathematical Communications*, 19 (2) (2014), 417-435.
14. Maleknejad K., Ebrahimzadeh A., "The use of rationalized Haar wavelet collocation method for solving optimal control of Volterra integral equations", *Journal of Vibration and Control*,

21(10) (2015) 1958-1967.

15. Peygham M. R., Hadizadeh M., Ebrahimzadeh A., "Some explicit class of hybrid methods for optimal control of Volterra integral equations", *J. Inform. Comput. Sci*, 7 (4) (2012) 253-266.
16. Shamsi M., "A modified pseudospectral scheme for accurate solution of Bang-Bang optimal control problems", *Optimal Control Applications and Methods*, 32 (6) (2011) 668-680.
17. Maleknejad K., Almasieh H., "Optimal control of Volterra integral equations via triangular functions", *J Mathematical and Computer Modelling*, 53 (9) (2011) 1902-1909.
18. Xinxu L., "Operational method for solving fractional differential equations using cubic B-spline approximation", *International Journal of Computer Mathematics*, 91 (12) (2014) 2584-2602.
19. Maleknejad K., Nosrati Sahlan M., "The method of moments for solution of second kind Fredholm integral equations based on B-spline wavelets. *International Journal of Computer Mathematics*, 87 (7) (2010) 1602-1616.
20. Çağlar H., Çağlar N., Özer M., "B-spline solution of non-linear singular boundary value problems arising in physiology", *Chaos, Solitons Fractals*, 39 (3) (2009) 1232-1237.
21. Xinxu L., "Numerical solution of fractional differential equations using cubic B-spline wavelet collocation method. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17 (10) (2012) 3934-3946.
22. Xinxu L., "Numerical solution of fractional partial differential equations using cubic B-spline wavelet collocation method", *Advances in Computational Mathematics and its Applications*, 1 (3) (2012) 159-164.
23. Maleknejad K., Mollapourasl R., Shahabi M., "On the solution of a nonlinear integral equation on the basis of a fixed point technique and cubic B-spline scaling functions", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 239 (2013) 346-358.
24. Edrisi-Tabri Y., Lakestani M., Heydari A., "Two numerical methods for nonlinear constrained quadratic optimal control problems using linear B-spline functions", *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization* 6.2 (2016) 17-38.
25. Loghmani G. B., "B-Spline Solution of Boundary Value Problems of Fractional Order Based on Optimal Control Strategy", *Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran*, 23 (1) (2012) 59-65.
26. Chui CK., "Wavelets: a mathematical tool for signal analysis. *Society for Industrial and Applied Mathematics*; (1997 Jan 1).

27. Rahimkhani P., Ordokhani Y., Babolian E., "An efficient approximate method for solving delay fractional optimal control problems", *Nonlinear Dynamics*, 86(3) (2016) 1649-1661.
28. Rahimkhani P., Ordokhani Y., Babolian E., "Müntz-Legendre wavelet operational matrix of fractional-order integration and its applications for solving the fractional pantograph differential equations", *Numerical Algorithms*, 77 (4) (2018) 1283-1305.
29. Rahimkhani P., Ordokhani Y., "Generalized fractional-order Bernoulli–Legendre functions: an effective tool for solving two-dimensional fractional optimal control problems", *IMA Journal of Mathematical Control and Information* (2017).
30. Ashpazzadeh E., Lakestani M., "Biorthogonal cubic Hermite spline multiwavelets on the interval for solving the fractional optimal control problems", *Computational Methods for Differential Equations*, 4 (2) (2016) 99-115.
31. Edrisi Tabriz Y., Heydari A., "Generalized B-spline functions method for solving optimal control problems", *Computational Methods for Differential Equations*, 2 (4) (2014) 243-255.
32. Davie A. M., Stothers A. J., "Improved bound for the complexity of matrix multiplication", *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 143 (2) (2013) 351-369.