فرآیندهای خود بازگشتی میانگین متحرک پیوسته با محرک نیمه لوی

نویده مدرسی[۱]، سعید رضاخواه*[۲]، شیرین شعاعی[۳]
۱. دانشگاه علامه طباطبائی، دانشکدهٔ آمار، ریاضی و علوم کامپیوتر،
۲. دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر،
۳. دانشگاه شهید بهشتی، دانشکدهٔ علوم ریاضی، گروه بیم‌سنجی

دریافت ۹۷/۰۲/۳۰ پذیرش ۹۸/۱۰/۰۳

چکیده

مدل‌های خود بازگشتی میانگین متحرک زمان پیوسته (کارما) با محرک لوی با ویژگی ایستایی نموها دارای یک محدودیت قوی است و باعث ایستایی فرایند می‌شوند. در این مقاله با تعمیم فرآیند کارما به حالتی که محرک فرآیند نیمه لوی باشد زمینه‌ای ایجاد می‌شود که فرایند کارما یک فرایند دوره‌ای و لذا دارای کاربرد بسیار وسیع‌تر است. بر این اساس، ویژگی‌های آماری فرایند کارما با محرک نیمه لوی بررسی شده و با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی شده در حالت گسسته، خواص آماری اثبات شده تائید می‌شود.

واژه‌های کلیدی: اندازهٔ نیمه لوی، فرایندهای دوره‌ای، مدل میانگین متحرک خود بازگشتی زمان پیوسته.

مقدمه

یکی از مدل‌های مشهور برای بررسی نمونه‌های مشاهده شده در فواصل مساوی از سری‌های زمانی ایستا، فرایندهای خودبازگشتی میانگین متحرک (آرما)[۱] است که بر حسب نویزهای مستقل و هم‌توزیع و یا نویزهای ایستا مدل‌بندی می‌شوند. بسیاری از سری‌های زمانی فیزیکی به‌طور پیوسته نسبت به زمان تحقق می‌یابند و دارای ساختار تغییرات پیوسته هستند از این‌رو، تعیین مدلی در زمان پیوسته برای بررسی این‌گونه سری‌های زمانی بسیار مناسب‌تر از مدل زمان گسسته است. برتری این مدل‌ها در استنباط و برآورد برای داده‌های با فرکانس بالا، مشاهدات قابل اندازه‌گیری در فواصل غیرمساوی و هم‌چنین در زمانی که با داده‌های مفقود شده[۲] مواجه هستیم دارای اهمیت بیش‌تری است [۱]. این موارد از جمله دلایلی هستند که فرایندهای آرمای زمان پیوسته (کارما)[۳] را بررسی می‌کنند. این مدل‌ها با اندازه لوی کلاسی از فرایندهای تجمعی و ایستای زمان پیوسته را تشکیل می‌دهند که تحقیقات چشم‌گیری در زمینه آنها انجام شده است. این فرایندها توان مدل‌بندی جهش‌ها و تلاطم‌های تصادفی را دارند، به‌همین دلیل در بررسی پدیده‌های طبیعی و بازارهای مالی به‌کار می‌روند. در حالت کلی فرایندهای کارما دارای تابع کواریانسی هستند که با افزایش فاصله بین مشاهدات به‌طور نمایی کاهش پیدا می‌کنند بنابراین حافظه کوتاه مدت دارند. در مقابل کلاس تعمیم یافته‌ای از این فرایندها به نام فرایندهای کارمای تفاضلی کسری[۴] وجود دارند که قادر به مدل‌بندی

*نویسنده مسئول rezakhah@aut.ac.ir

1. Autoregressive moving average (ARMA)
2. Missing data
3. Continuous-time ARMA (CARMA)
4. Fractionally integrated CARMA

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-27]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.8.1]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.465]

پدیده‌هایی با حافظه طولانی مدت هستند [۲]. این ویژگی اغلب در داده‌های مالی، اقتصادی و مخابراتی دیده می‌شوند. برای اولین بار براکول فرایندهای کارمای آستانه‌ای[1] را معرفی کرد [۳]. این فرایندها جواب یکتای یک معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی با ضرایب تکه‌ای خطی[2] و لیپشیتز هستند. این شرایط وجود و یکتایی جواب را تضمین می‌کند. بعد از آن براکول واشترامر تقریبی از این فرایندها را برای مدل بندی لکه‌های خورشیدی به‌کار بردند [۴]. در این مقالات اندازه به‌کار رفته در معادلات دیفرانسیل تصادفی، حرکت براونی استاندارد است و در نتیجه جواب معادله یک فرایند کارمای گوسی است. این مدل‌ها در حالت خطی و غیرخطی برای مدل بندی سری‌های زمانی مالی نیز به کار گرفته می‌شدند [۴].

در بازارهای مالی تغییرات و جهش‌ها نقش مهمی را در مدل‌بندی قیمت‌گذاری دارایی و نوسانات بازار ایفا می‌کنند و همین موضوع باعث شده که در مدل بندی‌های مالی به‌ویژه در فرمول‌های قیمت‌گذاری اختیارات بلک-شولز[3]، مرتن[4] و تعمیم آنها نیز از فرایندهای لوی استفاده شود [۶]، [۷]. فرایندهای لوی فرایندهای پیوسته تصادفی با نموهای مستقل و ایستا هستند که در هر نقطه از راست پیوسته و دارای حد چپ است. این فرایندها، مارکفی و تغییرات جهشی را در بر می‌گیرند بنابراین درمدل‌های قیمت‌گذاری سهام، تعیین تلاطم بازار، مدیریت ریسک و نرخ بازگشت سرمایه نیز به‌کار می‌روند. مثال‌های متعددی از مدل‌های زمان پیوسته و کاربردهای آن در اقتصادسنجی و مالی وجود دارند که برای بررسی آنها می‌توان به کتاب برگستروم [۸] و [۹] مراجعه کرد.

برای اولین بار براکول مدل‌های زمان پیوسته آرما با اندازهٔ لوی مرتبهٔ دوم را معرفی کرد و ویژگی‌های آنها را بررسی کرد [۱۰]. کاربرد کلاسی از این مدل‌ها را در تلاطم‌های تصادفی برندرف-نیلسن و شفارد در [۱۱] به‌طور مفصل بیان کردند. در این راستا فرایندهای ایستای اورنشتاین-اولنبک با اندازه لوی و تعمیمی از آنها برای مدل‌بندی نوسانات تصادفی[5] معرفی شدند [۱۲]. در ارتباط با ویژگی‌های آماری این مدل‌ها، از جمله سببیت و معکوس‌پذیری باید شرایط خاصی روی ضرایب مدل وجود داشته باشد تا نمایش میانگین متحرک یا نمایش خطی از این مدل‌ها موجود باشند [۱۳]. در این مرجع هسته‌ها و توابع خودهم‌بستگی و رفتار حدی آنها نیز بررسی شده است. مدل بسط داده شده و مدل کارمای مرتبهٔ p و q با اندازهٔ لوی چندمتغیره با استفاده از نمایش فضا-حالت[6] و نمایش طیفی آنها بررسی شده است [۱۴]. براکول و همکارانش در سال‌های اخیر مدل‌های کارما را برای برازش داده‌های با فواصل یکنواخت در نظر گرفتند و نتایج خود را برای مدل فرایند مدل در مورد نوسانات روزانه قیمت تغییرات ارز بررسی و تحلیل کردند [۱۵]. آنها ابتدا برآوردهای مناسبی برای پارامترهای فرآیندمدل زمان پیوسته خود بازگشتی مرتبهٔ اول به‌دست آورده و سپس روش برآورد ضرایب مدل کارما درحالت کلی را ارائه دادند. برای این کار ابتدا فرایند نمونه‌گیری شده در نقاط گسسته با فواصل مساوی را در نظر گرفته و از این فرض که هر فرایند کارما را می‌توان به‌صورت مجموعی از فرایندهای مستقل زمان پیوسته خود بازگشتی مرتبهٔ اول نوشت، کمک گرفتند و در نهایت با کمک روش‌های بازگشتی کالمن[7] و با استفاده از نمایش فضا-حالت، پارامترها را برآورد کردند. هم‌چنین با فرض این‌که فرایند کارما با اندازهٔ لوی از مرتبهٔ دوم

1. Threshold CARMA
2. Linear piecewise
3. Black-Scholes option pricing
4. Merton
5. Stochastic volatility
6. State-space representation
7. Kalman recursion

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-27]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.8.1]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.465]

سببی و ایستای اکید باشد، پیش‌بینی کننده‌های خطی[1] با کم‌ترین مربعات خطا[2] را به‌صورت امید شرطی به شرط گذشته فرایند را برای پیش‌بینی این مدل‌ها به‌کار گرفتند [۱۶].

فرایندهای تصادفی کارما معرفی شده تاکنون ایستا یا به‌طور مجانبی ایستا بوده‌اند. در این مقاله به‌منظور پوشش پدیده‌هایی که ماهیتاً ناایستا هستند خانواده‌ای از فرایندهای کارما با اندازهٔ نیمه لوی[3] با هسته نامنفی را که رفتار ایستای دوره‌ای دارند معرفی می‌کنیم. فرایندهای نیمه لوی تمامی ویژگی‌های فرایندهای لوی را دارند با این تفاوت که نموهای آنها ایستای دوره‌ای هستند. برای معرفی مدل، ابتدا ساختار اندازه نیمه لوی ساده[4] را بیان می‌کنیم. برای این کار محور مثبت اعداد حقیقی را به زیربازه‌هایی با طول ثابت به‌عنوان فواصل دوره‌ای متوالی تقسیم کرده و سپس هر یک را به تعدادی مشخص زیربازه با طول‌های معین افراز می‌کنیم. این تقسیم‌بندی به‌نحوی است که در زیربازه‌های هر دوره، نرخ رخداد پواسن متفاوت ولی در زیربازه‌های متناظر از فواصل دوره‌ای متوالی نرخ رخداد پواسون یک‌سان است، از این‌رو، فرآیند رخداد پواسن دارای نموهای ایستای دوره‌ای می‌شود. توزیع بزرگی جهش‌ها در همه زیربازه‌ها یک‌سان منظور می‌شوند. بنابراین فرایند پواسون مرکب ناهمگن حاصل، دارای نموهای ایستای دوره‌ای است. میانگین و تابع کواریانس مدل کارما با اندازهٔ نیمه لوی حاصل را به‌دست آورده و نشان می‌دهیم که رفتار دوره‌ای دارند و درستی نتایج به‌دست آمده را با تکنیک‌های شبیه‌سازی بررسی می‌کنیم.

با توجه به این حقیقت که هر فرایند ایستای دوره‌ای در حالت گسسته متناظر یک فرایند چندبعدی ایستا است [۱۷]، ایستایی فرایند چندبعدی متناظر را مورد آزمون قرار داده و ویژگی ایستای دوره‌ای بودن فرایند معرفی شده را نتیجه‌گیری می‌کنیم. با استفاده از یک مثال، رسم هم‌بستگی نگار فرایندها و رسم نمودار جعبه‌ای مربوط به آنها نشان می‌دهیم که این فرآیندها هرکدام ایستا ولی دارای میانگین و واریانس متفاوت هستند، از این‌رو، توزیع احتمالی آنها متفاوت است. با رسم هم‌بستگی نگارهای متقابل و مشاهده ایستایی آنها نتیجه می‌شود که تشکیل یک فرایند چند بعدی ایستا می‌دهند که دارای توزیع‌های متفاوتی هستند، از این‌رو، فرآیند اولیه دارای ویژگی وابستگی دوره‌ای است. هم‌چنین با رسم هم‌بستگی نگار فرآیند دوره‌ای اصلی برحسب فاصله بین داده‌ها مشاهده می‌شود که رفتار دوره‌ای نسبت به این فاصله وجود دارد که بیان‌گر وابستگی دوره‌ای اکید سری زمانی کارما با اندازهٔ نیمه لوی متناظر است.

این مقاله به‌صورت زیر تقسیم‌بندی شده است. در بخش دوم به توصیف و معرفی مدل کارما با اندازهٔ نیمه لوی می‌پردازیم و ساختار اندازهٔ نیمه لوی ساده را بیان می‌کنیم. سپس با تعیین ویژگی‌های آماری فرایند از جمله ساختار دوره‌ای میانگین و کواریانس، رفتار دوره‌ای فرایند نتیجه می‌شود. بخش سوم به شبیه‌سازی فرایند براساس مثالی ساده از فرایند کارما با اندازه نیمه لوی ساده پواسن مرکب ناهمگن اختصاص دارد. رفتار دوره‌ای فرایند کارما با محرک نیمه لوی معرفی شده را با نشان دادن ویژگی ایستایی فرایند چندبعدی متناظر نشان می‌دهیم. علاوه بر این تابع هم‌بستگی نگار فرآیند اصلی را برحسب فاصله بین مشاهدات رسم می‌کنیم که نشان می‌دهد نسبت به این فاصله رفتار دوره‌ای دارد که بیان‌گر ایستایی دوره‌ای اکید فرآیند است.

معرفی فرایند کارما با اندازهٔ نیمه لوی

در این بخش فرایند کارما با اندازه نیمه لوی را معرفی کرده و به تبیین ساختار اندازه آن می‌پردازیم. هم‌چنین با در نظر گرفتن شرایطی بر پارامترهای مدل، نمایش انتگرالی میانگین متحرک جواب را برحسب اندازهٔ نیمه لوی به‌دست

1. Linear predictor
2. Least square error
3. Semi-Levy driven CARMA model
4. Simple semi-Levy

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-27]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.8.1]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.465]

می‌آوریم. کلاس بزرگی از فرایندهای تصادفی، فرایندهایی هستند که دارای نموهای ایستا و مستقل هستند. این فرایندها دارای انعطاف پذیری بیش‌تری بوده است و این ویژگی آنها سبب می‌شود که بتوانیم توزیع‌های با بعد متناهی آنها را تعیین کنیم. به فرایندهایی که از صفر آغاز شده، به‌طور تصادفی پیوسته، دارای نموهای مستقل و ایستا و مسیرهای نمونه‌ای آنها از راست پیوسته و دارای حد چپ هستند فرایندهای لوی گفته می‌شوند که یکی از مشهورترین این فرایندها حرکت براونی است. اگر این فرایندها به‌جای نموهای ایستا دارای نموهای ایستای دوره‌ای باشند به آنها فرایندهای نیمه لوی گویند. به‌عبارت دیگر کلاسی از فرایندهای سازگار $\{X(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ را با این ویژگی که به‌ازای هر $T > 0$ و $s, t \geq 0$ داشته باشیم $X_{t+T} - X_{s+T} \overset{d}{=} X_t - X_s$ که $\overset{d}{=}$ بیان‌گر برابری توزیعی است؛ را فرایند نیمه لوی با دوره T گویند.

فرض کنید $\{S(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ یک فرایند مرتبهٔ دوم نیمه لوی نامنفی نانزولی و $\{Y(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ یک فرایندکارما از مرتبهٔ p و q با اندازهٔ نیمه لوی و جواب معادله دیفرانسیل تصادفی (۱) باشد.

$$a(D)Y(t) = b(D)DS(t) \tag{۱}$$

به‌طوری‌که D بیان‌گر مشتق نسبت به t و $a(z) = z^p + a_1 z^{p-1} + \ldots + a_p$ و $b(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_{p-1} z^{p-1}$ چندجمله‌ای‌های مشخصه آنها باشند. $a_1, \ldots, a_p$ و $b_1, \ldots, b_q$ پارامترهای ضرایب هستند به‌طوری‌که $b_q = 1$ و به‌ازای $q < j < p$، $b_j = 0$. هم‌چنین فرض می‌کنیم چندجمله‌ای‌های $a(z)$ و $b(z)$ ریشه‌های مشترک نداشته باشند. معادله مذکور را می‌توان بدین‌صورت نمایش فضا-حالت نوشت:

$$Y(t) = b' X(t) \tag{۲}$$

$$dX(t) - AX(t)dt = edS(t) \tag{۳}$$

به‌طوری‌که $A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -a_p & a \end{bmatrix}$، e بردار ستونی یکه، b بردار ستونی‌ای که درایه‌های آن ضرایب چندجمله‌ای مشخصه $b(z)$ و a بردار سطری $[-a_{p-1} \quad -a_{p-2} \quad \cdots \quad -a_1]$ است. با کمک فرمول ایتو جواب معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی مذکور بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$X(t) = e^{A(t-s)} X(s) + \int_s^t e^{A(t-u)} edS(u) \tag{۴}$$

با توجه به رابطهٔ (۴) و این‌که فرایند S دارای نموهای مستقل است، مشابه حالتی که جواب ایستا است، می‌توان به‌سادگی نشان داد که فرایند X مارکف است.

۱. ساختار اندازهٔ نیمه لوی

بر اساس تجزیه مشهور لوی-ایتو هر فرایند لوی را می‌توان به‌صورت مجموع سه فرایند لوی از جمله حرکت براونی، فرایند پوآسون مرکب و یک مارتینگل انتگرال‌پذیر مرتبهٔ دوم نوشت که اندازه جهش‌های آن کم‌تر از یک و تعداد جهش‌ها با احتمال یک شمارا باشند. با توجه به این‌که شناسایی وجود یک فرآیند نیمه لوی در طبیعت براساس ساختار تقریبی نیمه لوی متناظر است، یک اندازهٔ نیمه لوی ساده را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱: اندازهٔ تصادفی $\{M(A) : A \in \mathbb{R}\}$ را یک اندازهٔ نیمه لوی ساده با دورهٔ T گویند هرگاه افرازی مانند $B_i = (s_{i-1}, s_i]$ که $i \in \mathbb{N}$، بر محور اعداد حقیقی وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $s_0 = 0$ و به‌ازای مقادیر ثابت

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-27]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.8.1]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.465]

$r \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $T = \sum_{i=1}^{r} | B_i |$. هم‌چنین برای هر B_i اندازه لوی M_i وجود داشته باشد به‌طوری‌که M_{i+kr}، $k \in \mathbb{Z}$ بر B_{i+kr} همان ساختار توزیعی را داشته باشد که M_i بر B_i دارد.

اگر M_i یک اندازه پوآسون نیمه لوی ساده با نرخ λ_i روی B_i باشد به‌طوری‌که $\lambda_{i+kr} = \lambda_i$ آنگاه

$$M(0, kT + s] = \sum_{i=1}^{kr+j-1} M_i(s_{i-1}, s_i] + M_{kr+j}(s_{j-1}, s]$$

یک اندازهٔ پوآسون نیمه لوی ساده با دور $\mathrm{G}\,T$ نامیده می‌شود. بنابراین با فرض این‌که $t = kT + s$ و $s \in B_j$ داریم $N(t) = M(0,t]$ یک فرایند پوآسون نیمه لوی با پارامتر

$$\Lambda_t = (k-1)\sum_{i=1}^{r} \lambda_i + \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i + \frac{\lambda_j l_j^s}{l_j} \qquad (۵)$$

است که دارای نموهای دوره‌ای است. لازم به توضیح است که k تعداد دوره‌ها، $r \in \mathbb{N}$، $l_j = |B_j|$ و به‌ازای $j = 1, \ldots, r$ داریم $l_j^{\,s} = s - s_{j-1}$. بنابراین اندازهٔ نیمه لوی پوآسون مرکب $S(t)$ را به‌صورت (۶) تعریف می‌کنیم:

$$S(t) = \gamma t + \sum_{n=1}^{N(t)} J_n \qquad (۶)$$

که در آن $\gamma \in \mathbb{R}^+$، $N(t)$ یک فرایند پوآسون نیمه لوی با پارامتر Λ_t با دورهٔ T و با افراز مطرح شده در تعریف ۱ باشد. هم‌چنین جهش‌های J_n متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یک‌سان F در زمان n امین رخداد فرآیند پواسن $N(t)$ فرض شده‌اند.

۲. بررسی ویژگی‌های فرایند

چنان‌که بیان شد فرایند کارما با اندازهٔ نیمه لوی جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی است که ویژگی‌های احتمالی آن را تحلیل و بررسی قرار می‌کنیم. بدین‌منظور شرایطی را در نظر می‌گیریم تا نمایش انتگرالی جواب که یک فرایند تصادفی است به‌صورت رابطه‌ای یک به‌یک موجود باشد. برای بررسی جواب‌ها فرض می‌کنیم این‌شرایط برقرار باشند:

۱. به‌ازای هر $t \in \mathbb{R}^+$، متغیرهای $X(t)$ از $\{S(r) - S(t), r > t\}$ مستقل‌اند.

۲. قسمت‌های حقیقی مقادیر ویژه ماتریس A منفی فرض می‌شوندکه در این صورت $\lim_{t\to\infty} e^{At} = 0$ و برعکس.

اگر شرایط مذکور برقرار باشند، جواب (۴) با میل دادن $s \to -\infty$ و با فرض این‌که S یک اندازهٔ نیمه لوی باشد به نمایش میانگین متحرک زیر همگرا می‌شود

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-u)} e\, dS(u) \qquad (۷)$$

پس از به‌دست آوردن $X(t)$ و با کمک رابطهٔ (۲) می‌توان $Y(t)$ را به‌صورت $Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\, dS(u)$ نمایش داد که در آن $f(t) = b' e^{At} e I_{[0,\infty)}(t)$ هسته فرایند کارمای $Y(t)$ است و چون شرط ۱ برقرار است فرایند، تابعی سببی از S است.

با استفاده از ویژگی‌های امید ریاضی و واریانس و هم‌چنین برابری والد، بر اساس رابطهٔ (۶) امید ریاضی و واریانس اندازهٔ نیمه لوی را بدین‌صورت به‌دست می‌آوریم:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-27]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.8.1]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.465]

$$E[S(t)] = \gamma t + \kappa \Lambda_t \tag{۹}$$

$$Var[S(t)] = \beta \Lambda_t \tag{۱۰}$$

که در آن $E[J_n] = \kappa$، $E[J_n{}^2] = \beta$ و $E[N(t)] = \Lambda_t$.

برای پیدا کردن ویژگی‌های مدل معرفی شده بر اساس نمایش (۷)، ابتدا میانگین و کواریانس فرایند را برای مدل جدید معرفی شده به‌دست می‌آوریم. برای این منظور ابتدا محور حقیقی را به زیربازه‌های $B_i = (s_{i-1}, s_i]$ افراز می‌کنیم که در آن $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_{kT+j-1} \le s_{kT+j} = t$ و هم‌چنین فرض می‌کنیم $t = kT + s$ نقطه‌ای در زیربازهٔ B_{kT+j} باشد. در این‌صورت با خاصیت جمع‌پذیری انتگرال می‌توان $X(t)$ را بدین‌صورت نوشت:

$$X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(k-n)T+s}^{(k-n+1)T+s} e^{A(t-u)} e dS(u) = \lim_{d\to\infty} \sum_{n=0}^{d} \sum_{i=1}^{r} e^{At} \int_{(k-n)T+s_{j-i-2}}^{(k-n+1)T+s_{j-i-1}} e^{-Au} e dS(u) + e^{At} e \int_{kT+s_{j-1}}^{kT+s} e^{-Au} dS(u).$$

با توجه به خاصیت خطی بودن امید ریاضی کافیست $E[dS(t)]$ را با این فرض که $u, u+du \in B_j$ و با کمک رابطهٔ (۵) محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned} E[dS(t)] &= E[S(u+du)] - E[S(u)] = \gamma(u+du) + \kappa\Lambda_{u+du} - \gamma u - \kappa\Lambda_u \\ &= \gamma du + \kappa(\Lambda_{u+du} - \Lambda_u) = \gamma du + \kappa\lambda_j du = (\gamma + \kappa\lambda_j) du \end{aligned}$$

بنابراین امید ریاضی فرایند به‌صورت رابطهٔ (۱۱) حاصل می‌شود

$$E[X(t)] = -A^{-1} e^{As} [\frac{I}{I - e^{AT}} \sum_{i=0}^{j-1} (\gamma + \kappa\lambda_i)(e^{-As_{j-i-1}} - e^{-As_{j-i-2}}) + (\gamma + \kappa\lambda_j)(e^{-As} - e^{-As_{j-1}})] e \tag{۱۱}$$

که در آن I ماتریس همانی و e یک بردار ستونی واحد هستند.

لم ۱. امید ریاضی فرایند $X(t)$ دوره‌ای با دورهٔ T است.

اثبات: با توجه به مفروضات مدل به‌سادگی می‌توان با تبدیل s به $s+T$ در رابطهٔ (۱۱) برابری $E[X(t+T)] = E[X(t)]$ را نشان داد.

برای به‌دست آوردن کواریانس فرایند بدون آن‌که به کلیت مسئله خللی وارد شود کافی است فرض کنیم h مقداری بسیار کوچک و $t, t+h \in B_{kr+j}$. در این صورت داریم:

$$Cov(X(t), X(t+h)) = \beta e^{As} [\sum_{n=0}^{\infty} e^{AnT} (\sum_{i=0}^{j-1} \int_{s_{j-i-2}}^{s_{j-i-1}} e^{-Au} ee' e^{-A'u} du) e^{A'nT} + \int_{s_{j-1}}^{s} e^{-Au} ee' e^{-A'u} du] e^{A's} e^{A'h}. \tag{۱۲}$$

لم ۲. کواریانس فرایند $X(t)$ دوره‌ای با دورهٔ T است.

اثبات: با توجه به مفروضات مدل به‌سادگی می‌توان با تبدیل s به $s+T$ در رابطهٔ (۱۱) برابری $\mathrm{cov}(X(t+T), X(t+h+T)) = \mathrm{cov}(X(t), X(t+h))$ را نشان داد.

با توجه به دوره‌ای بودن توابع میانگین و کواریانس می‌توان نتیجه گرفت که $\{Y(t), t \ge 0\}$ که ترکیبی خطی از $X(t)$ است، یک فرایند کارما با اندازهٔ نیمه لوی ساده و ایستای دوره‌ای با دورهٔ T است.

در بخش بعد ابتدا الگوریتم شبیه‌سازی اندازه نیمه لوی ساده و سپس فرایند کارما تحت این محرک را بیان کرده و با بیان مثالی به بررسی خواص مدل می‌پردازیم.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-27]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.8.1]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.465]

شبیه‌سازی

در این بخش درستی نتایج تئوری ارائه شده در بخش‌های قبل مبنی بر این که فرایند زمان پیوسته دارای وابستگی دوره‌ای است را به‌کمک شبیه‌سازی نشان می‌دهیم. بدین‌منظور از روش گسسته‌سازی با محاسبهٔ مقدار تجمعی فرآیند روی زیربازه‌های مجزا و یک‌سان از دوره‌های متوالی با طول ثابت استفاده می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم که فرایند تجمعی حاصل یک فرایند ایستای دوره‌ای زمان گسسته است. بنابراین ابتدا یک فرایند کارما زمان پیوسته را با استفاده از اندازهٔ نیمه لوی شبیه‌سازی می‌کنیم. برای این منظور فواصل دوره‌ای را به‌صورت $((j-1)T, jT)$ که j یک عدد طبیعی و نمایان‌گر شمارهٔ دوره است؛ در نظر می‌گیریم. دورهٔ اول به‌وسیلهٔ r زیربازه متمایز به‌صورت $B_r, \dots, B_۲, B_۱$ افراز می‌شود که طول آنها با $|B_i|$، $i=1,\dots,r$ نشان داده می‌شود. سایر دوره ها را با افرازهایی به همین تعداد و با همین طول‌ها تقسیم‌بندی می‌کنیم. شماره‌های افراز کل دورهٔ شبیه‌سازی شده را به‌ترتیب از شمارهٔ یک در نظر می‌گیریم. سپس در مورد طول اعضای افراز برای هر عدد طبیعی j داریم که $|B_i|=|B_{i+jr}|$. هم‌چنین این فرایند در عضوهای افراز B_i و B_{i+jr} دارای نرخ رخداد یکسان λ_i هستند. حال برای تولید اندازهٔ نیمه لوی ساده S(t) بدین‌صورت عمل می‌کنیم.

۱. طول هر دوره را با یک مقدار حقیقی مثبت T و تعداد دوره‌های بررسی شده k را که برای شبیه‌سازی اندازهٔ نیمه لوی S(t) لازمند مشخص می‌کنیم.
۲. تعداد زیربازه‌های مربوط به هر دورهٔ r را مشخص می‌کنیم و این زیربازه‌ها را اعضای افراز می‌نامیم.
۳. طول همهٔ اعضای افراز یعنی $|B_i|$ ها را با در نظرگرفتن برابری $|B_i|=|B_{i+kr}|$ مشخص می‌کنیم.
۴. برای هر عضو افراز B_i یک توزیع پواسن با نرخ رخداد λ_i را در واحد زمان که $\lambda_i=\lambda_{i+jr}$ در نظر می‌گیریم.
۵. براساس نرخ رخداد λ_i از توزیع پواسن برای هر عضو افراز B_i عددی تصادفی تولید می‌کنیم.
۶. برای هر عضو افراز B_i به تعداد عددتصادفی تولید شده در قسمت ۵ اعداد تصادفی از توزیع یکنواخت پیوسته بر روی بازهٔ (L_{i-1},L_i)، که L_i بیان‌گر مجموع طول اعضای افراز از عضو شمارهٔ یک تا شمارهٔ i است، تولید می‌کنیم. این اعداد تصادفی بیان‌گر موضع وقوع جهش‌های تصادفی و مقادیر حاصل شده به‌عنوان موضع رخدادهای فرآیند پواسن در آن عضو افراز خواه است.
۷. در نهایت با توجه به این که $\gamma \in R$ مقدار ثابت و J_k ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع F هستند S(t) را با استفاده از رابطهٔ (۶) به‌دست می‌آوریم.

بنابراین با کمک از روابط (۲) و (۳) و با استفاده از اندازهٔ نیمه لوی S(t) ساخته شده می‌توان فرایند کارما را تولید کرد. ساختار الگوریتمی تولید فرایند کارما بدین‌صورت است:

۱. مقادیر p و q را تعیین می‌کنیم.
۲. مطابق ساختار و شرایط a(z) در رابطهٔ (۱) که چندجمله‌ای a(z) دارای ریشه‌هایی با بخش‌های حقیقی مثبت است، پارامترهای $a_p, \dots, a_۲, a_۱$ را محاسبه می‌کنیم.
۳. با استفاده از مقادیر $a_p, \dots, a_۲, a_۱$ ماتریس A ارائه شده پس از رابطهٔ (۳) را می‌سازیم.
۴. مقادیر $b_p, \dots, b_۲, b_۱$ را تعیین می‌کنیم.
۵. با استفاده از رابطهٔ (۳) و ساختار S(t) بیان شده، X(t) را بر اساس گسسته‌سازی به‌وسیلهٔ بازه‌های کوچک با طول‌های مساوی به‌دست می‌آوریم.
۶. در نهایت با استفاده از X(t) و مقادیر معین شدهٔ $b_p, \dots, b_۲, b_۱$ و رابطهٔ (۲) فرایند کارما مورد نظر تولید می‌شود.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-27]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.8.1]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.465]

مثال: برای بررسی این مدل، ابتدا یک نمونه از فرایند کارما را با استفاده از الگوریتم‌های شرح داده شده قبل تولید می‌کنیم. برای این منظور، پارامترهای S(t) را به‌صورت r=۷، k=۴ و مقادیر بردار $[۲,۲,۲,۲,۱,۱,۲]$ را به‌عنوان طول‌های متناظر اعضای افراز B_i در هر دوره در نظر می‌گیریم. هم‌چنین مقادیر بردار $[۷,۵,۳,۱۱,۵,۹,۱۳]$ را به‌عنوان نرخ رخدادهای پواسن متناظر λ_i برای این اعضای افراز مشخص می‌کنیم. هم‌چنین J_kها را به‌عنوان دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع نرمال با میانگین ۳ و واریانس ۱ در نظر می‌گیریم.

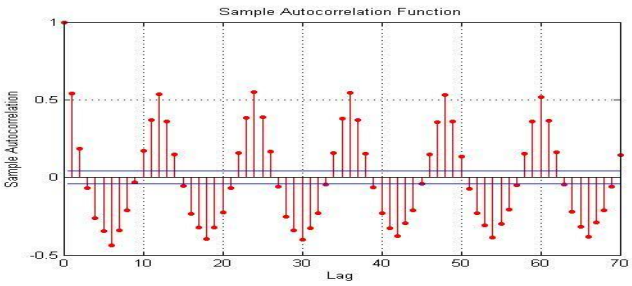
در این مثال، مدل کارما از مرتبه‌های ۴ و ۲ را شبیه‌سازی می‌کنیم. بنابراین با توجه به ساختار a(z)، ریشه‌های آن را به‌صورت $z_۱ = -۱$، $z_۲ = -۲$ و $z_۳ = -۲ - i$ و $z_۴ = -۲ + i$ در نظر می‌گیریم. در نتیجه مقادیر پارامترهای $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ و $a_۴$ به‌صورت ۷، ۱۹، ۲۳ و ۱۰ حاصل شوند و ماتریس A بدین‌صورت است:

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ -۱۰ & -۲۳ & -۱۹ & -۷ \end{bmatrix}.$$

با استفاده از ساختار S(t) و حل معادلهٔ (۳)، X(t) به‌دست می‌آید. در نهایت با استفاده از رابطهٔ (۲) و مقادیر پارامترهای $b_۰ = ۰.۵$، $b_۱ = ۲$، $b_۲ = ۱$ و $b_۳ = ۰$ مدل کارما از مرتبه‌های ۴ و ۲ به‌دست می‌آید.

در ادامه شبیه‌سازی برای بررسی ویژگی‌های بیان شده این مدل، روش زیر را به‌کار می‌بریم.

با توجه به مثال و این‌که تعداد دوره‌ها را k=۴ در نظر گرفتیم، یک مجموعه داده کامل Y(t)برای اندازهٔ نیمه لوی مربوط به فرایند کارما از مرتبه‌های ۴ و ۲ تولید می‌کنیم. سپس برای نشان دادن این‌که خروجی مدل یک فرایند ایستای دوره‌ای پیوسته است؛ کافی است نشان دهیم فرایند گسسته تولید شده به‌وسیلهٔ این فرایند براساس مقادیر نمونه‌گیری شده در فواصلی با طول مساوی تشکیل یک فرایند ایستای چند متغیرهٔ گسسته می‌دهد. نقاط نمونه‌گیری به فاصلهٔ یک از کل فرایند در نظر گرفته می‌شود و اندازه فرایند را در نقاط نمونه‌گیری شده به‌عنوان فرایند گسسته جدید در نظر می‌گیریم. اکنون براساس نتایج تئوری باید نشان دهیم که این فرایند گسسته تشکیل یک فرایند ایستای چندمتغیره گسسته می‌دهد. با توجه به فرضیات شبیه‌سازی و این‌که $B_i = [۲,۲,۲,۲,۱,۱,۲]$ نتیجه می‌شود که مشاهدات فرایند گسسته به‌طول یک باید تشکیل فرایند ایستای دوره‌ای با دورهٔ ۱۲ را بدهد. شکل۱، نمودار هم‌بستگی نگار فرایند است که رفتار دوره‌ای تابع هم‌بستگی نگار با تکرار ساختار وابستگی‌ها در فواصل ۱۲ را به‌وضوح نشان می‌دهد. این مطلب خود بیان‌گر وابستگی دوره‌ای اکید توابع خودهم‌بستگی است.



شکل ۱. نمودار هم‌بستگی نگار فرایند

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-27]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.8.1]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.465]

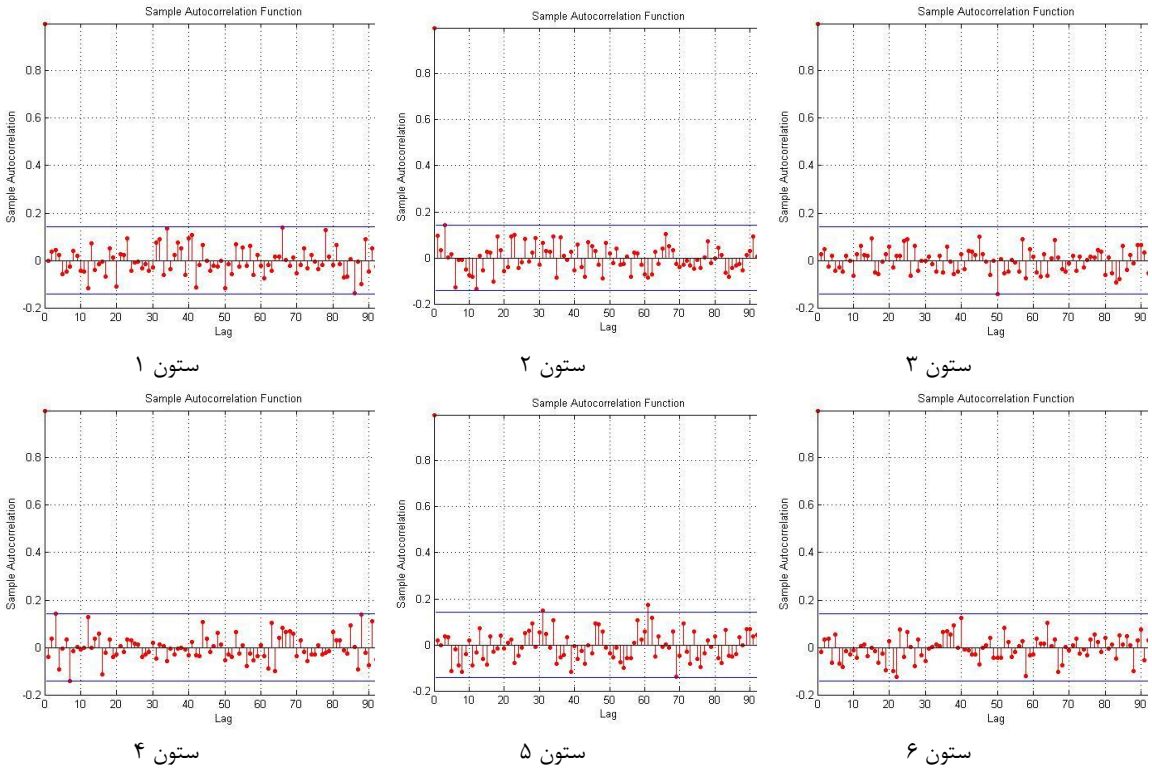
بنابراین فرایند چندمتغیره ایستا را می‌توان بر این اساس تشکیل داد و ایستایی این فرایند چندمتغیره را آزمود. برای این منظور هر دوره به‌طول ۱۲ که به ۱۲ قسمت به‌طول ۱ تقسیم شده است، مشاهدات زیربازهٔ اول، زیربازهٔ دوم تا زیربازهٔ دوازدهم را نشان داده و تشکیل یک فرایند ۱۲ متغیره ایستا می‌دهد. پس ۱۲ فرایند ایستای تک‌متغیره داریم که این ویژگی ایستایی آنها آزمایش می‌شود. حال نشان می‌دهیم که وابستگی متقابل این ۱۲ فرایند نیز ایستا است. برای انجام این آزمون ۳ مرحله زیر اجرا می‌شود.

۱. هم‌بستگی نگار تک‌تک این ۱۲ فرایند در شکل۲ ترسیم شده است، که نشان می‌دهد این ۱۲ فرایند از نظر ساختار هم‌بستگی ایستا است.

۲. هم‌بستگی نگار متقابل این ۱۲ فرایند به‌صورت دوبه‌دو و به‌ترتیب هرکدام با شمارهٔ بعدی در شکل ۳ رسم شده است و مشاهده می‌شود که تمام مقادیر در بازهٔ صفر قرار دارند، از این‌رو، هم‌بستگی متقابل این ۱۲ فرایند دارای ساختار ایستایی است.

۳. در شکل ۴ نمودار جعبه‌ای تک‌تک این فرایندها برای ۱۰۰۰ دوره ارایه می‌شود که بیان‌گر ایستایی تک‌تک فرایندها در میانگین و واریانس است و در ضمن میانگین و واریانس‌ها متفاوت هستند، از این‌رو، فرآیند اصلی در میانگین و واریانس رفتار دوره‌ای دارد.

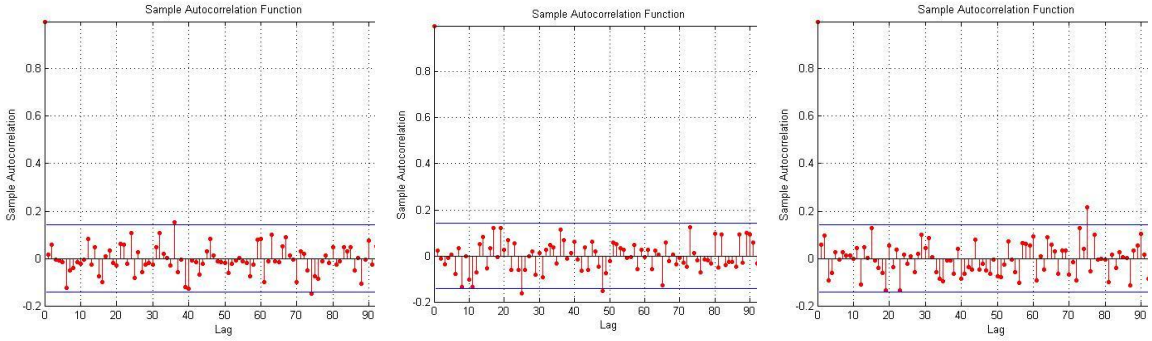
پس نتایج تئوری بدین‌وسیله تأیید می‌شود و خروجی مدل یک فرایند ایستای دوره‌ای است.



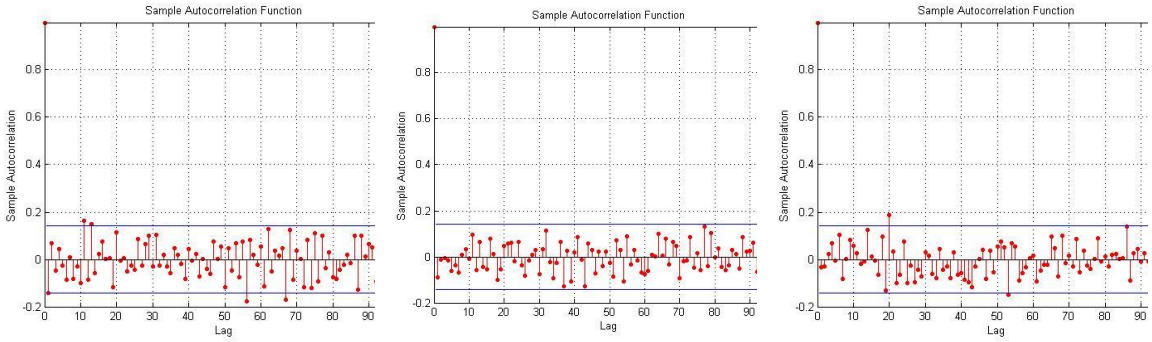
ستون ۱ ستون ۲ ستون ۳

ستون ۴ ستون ۵ ستون ۶

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-27]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.8.1]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.465]

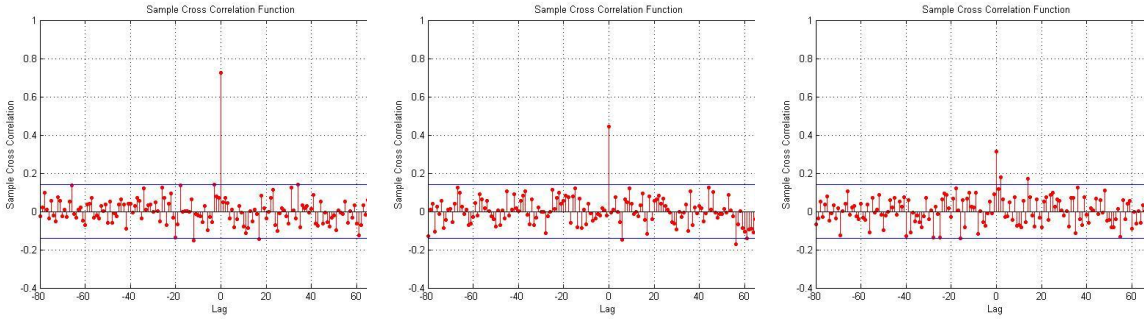


ستون ۷ ستون ۸ ستون ۹

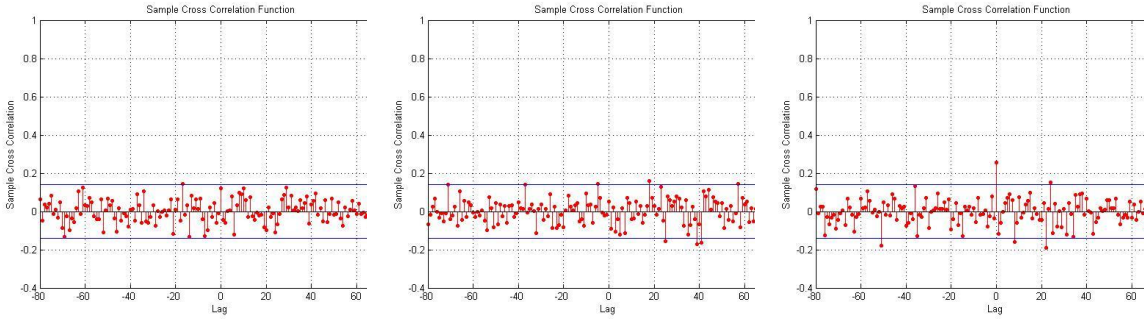


ستون ۱۰ ستون ۱۱ ستون ۱۲

شکل ۲. هم‌بستگی نگار تک‌تک این ۱۲ فرایند

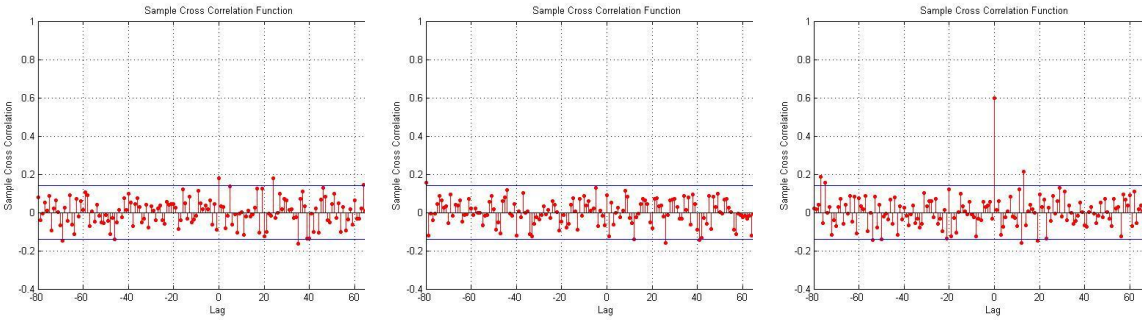


Crosscorr1&2 Crosscorr2&3 Crosscorr3&4

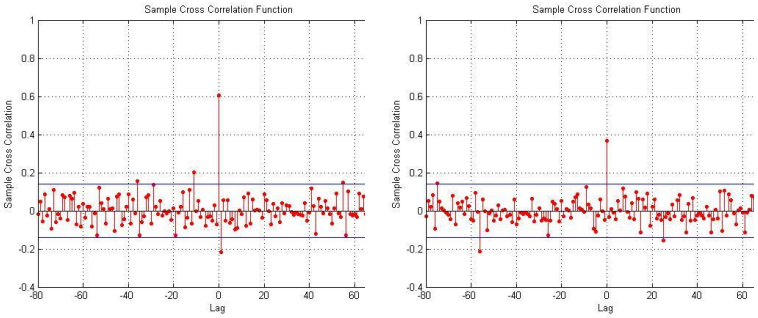


Crosscorr4&5 Crosscorr5&6 Crosscorr6&7

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-27]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.8.1]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.465]

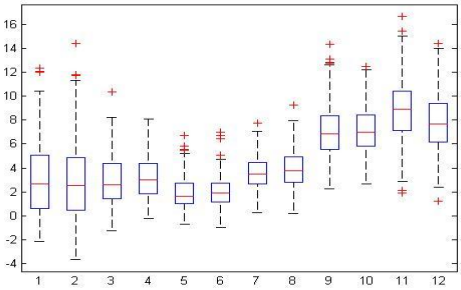


Crosscorr7&8 Crosscorr8&9 Crosscorr9&10



Crosscorr10&11 Crosscorr11&12

شکل ۳. هم‌بستگی نگار متقابل ۱۲ فرایند



شکل ۴. نمودار جعبه‌ای تک‌تک ۱۲ فرایند ایستای متناظر در فواصل دوره ای متوالی

نتیجه‌گیری و گسترش

در این مقاله به بررسی ویژگی‌های فرایند کارما با اندازه نیمه لوی براساس تقریب به‌وسیلهٔ یک اندازهٔ نیمه لوی ساده پرداختیم. نشان دادیم که گشتاورهای اول و دوم این فرایند ایستای دوره‌ای هستند. با شبیه‌سازی اندازهٔ نیمه لوی و با کمک نمایش فضا-حالت مدل، فرایند کارما را شبیه‌سازی کرده و ویژگی ایستای دوره‌ای بودن نشان داده شد. با توجه به ویژگی ایستای دوره‌ای فرآیند با برآورد پارامترهای مدل می‌توان این مدل را برای داده‌های واقعی با اندازه‌های نیمه لوی به‌کار برد و براساس نتایج این مقاله ساختار تغییرات فرآیند را با هرتقریب دلخواه به‌دست آورد. این مقاله به شرایطی که نرخ رخداد لحظه‌ای جهش‌ها در فرایند نیمه لوی لزوماً بر بازه‌ها دارای مقادیر ثابت نیست؛ بلکه صرفاً دارای رفتار دوره‌ای است، یعنی $\lambda_u = \lambda_{T+u}$ (که نرخ رخداد در بازهٔ [0,T] به‌صورت $\Lambda_t = \int_0^t \lambda_u du$ است)، قابل تعمیم است. علاوه بر این در مورد توزیع پرش‌ها تبیین ساختاری که بیان‌گر رفتار دوره‌ای توزیع پرش‌ها بدون محدودیت توزیع یک‌سان روی اعضای یک افراز باشد، زمینهٔ دیگری برای تعمیم مقاله است.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-27]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.8.1]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.465]

منابع

1. Stelzer R., "CARMA processes driven by non-Gaussian noise", TUM-IAS Primary Sources-Essays in Technology and Science 1 (1) (2011).
2. Brockwell P. J., Marquardt T., "Levy driven and fractionally integrated ARMA processes with continuous time parameter", Statist, Sinica, 15 (2005) 477-494.
3. Brockwell P. J., "On continuous-time threshold ARMA processes", Journal of statistical planning and inference, Vol.39 (1994) 291-303.
4. Brockwell P. J., Stramer O., "On the approximation of continuous-time threshold ARMA processes", Annals of the institute of statistical Mathematics, Vol. 47, Issue 1 (1995) 1-20.
5. Brockwell P. J., "Representations of continuous-time ARMA processes", Journal of Applied Probability, Stochastic Methods and Their Applications, Vol. 41 (2004) 375-382.
6. Cont R., Tankov P., "Financial Modeling with Jump Processes", Chapman& Hall/CRC, Boca Raton (2004).
7. Schoutens W., "Levy Processes in Finance; Pricing Financial Derivatives", John Wiley and Sons Ltd. Chichester (2003).
8. Bergstrom A. R., "Continuous-Time Econometric Modeling", Oxford University Press (1990).
9. Todorov V., "Econometric analysis of jump-driven stochastic volatility models", J. Econom, 160 (2010)12-21.
10. Brockwell P. J., Levy-driven continuous-time ARMA processes. Ann. Inst. Stat. Math, 53 (2000)113-124.
11. Barndorff-Nielsen O. E., Shephard N., "Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck based models and some of their uses in financial economics", J. of Roy. Stat. Soc. Ser. B 63 (2001) 167-241.
12. Brockwell P. J., Linder A., "Levy-driven time series models for financial data", Time Series Analysis: Methods and Applications, Vol. 30 (2012) 543-563.
13. Barndorff-Nielsen O. E., "Superposition of Ornstein-Uhlenbeck type processes", Theory. Probab. Appl., 45 (2) (2001) 175-194.
14. Marquardt T., Stelzer R., "Multivariate CARMA processes", Stochastic Processes and Their Applications. 117 (2007) 96-120.
15. Brockwell P. J., Davis R. A., Yang Y., "Estimation for non-negative Levy-driven CARMA processes. Journal of Business and Economic Statistics. 29 (2011) 250-259.
16. Brockwell P. J., Linder A., "Prediction of Levy-driven CARMA processes", Journal of Econometrics, Vol. 189(2) (2015) 263-271.
17. Dehay D., Hurd H. L., "Spectral theory for periodically and almost periodically correlated random processes: A survey" (1998).

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-27]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.8.1]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.465]