کاربرد مدول پیوستگی در مشخص کردن ژئودزیک‌ها

حجت فرزادفرد
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد شیراز، گروه ریاضی

دریافت ۹۷/۰۳/۰۱ پذیرش ۹۸/۰۲/۱۸

چکیده

اگر $f: (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ یک تابع پیوسته باشد، مدول پیوستگی f تابعی است که به هر $a \in X$ و $\epsilon > 0$ بزرگ‌ترین $\delta > 0$ای را نظیر می‌کند که در تعریف پیوستگی صدق می‌کند، یعنی برای هر $x \in X$ اگر $d_X(x,a) < \delta$، آنگاه $d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$. در این مقاله نشان می‌دهیم که خطی بودن مدول پیوستگی یک تابع $f \ : \ \mathbb{R} \to X$ مشخصه‌ای برای ژئودزیک بودن آن است (کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه از یک فضای متریک را یک ژئودزیک می‌نامند).

واژه‌های کلیدی: ژئودزیک، مدول پیوستگی، طول مسیر

مقدمه

فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد. اگر x_1 و x_2 دو نقطه از X باشند، یک مسیر از x_1 به x_2 عبارت از یک تابع پیوستهٔ γ از یک بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ به توی X است به قسمی که $\gamma(a) = x_1$ و $\gamma(b) = x_2$. مسیر γ را یک ژئودزیک[1] نامند هرگاه حافظ فاصله باشد، یعنی به ازای هر دو نقطهٔ t_1 و t_2 در $[a,b]$ رابطهٔ $d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2|$ برقرار باشد. اگر دامنهٔ γ را تمام $\mathbb{R}$ بگیریم، به آن یک خط ژئودزیک می‌گویند. ژئودزیک‌ها به‌طور گسترده در مباحثی چون هندسهٔ ریمانی (و در حالت کلی هندسهٔ متریک)، فیزیک گرانش، نسبیت عام و هندسهٔ زمین به‌کار می‌روند. مثلاً جرمی که در شرایط خلأ تحت گرانش حرکت می‌کند یک مسیر ژئودزیک را می‌پیماید. برای کاربرد ژئودزیک‌ها در هندسهٔ ریمانی به [۱]، در فیزیک گرانش به [۵] و در نسبیت عام به [۳] رجوع شود.

در واقع ژئودزیک‌ها معرف کوتاه‌ترین مسیرها هستند، یعنی طول یک ژئودزیک $\gamma \ : \ [a,b] \ \to X$ برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ $\gamma(a)$ از نقطه ی $\gamma(b)$ در فضای متریک X. توجه شود که طول یک مسیر بدین‌صورت تعریف می‌شود:

تعریف ۱. طول یک مسیر $\gamma : [a,b] \ \to (X,d)$ عبارت است از:

$$L(\gamma) = \sup_{P} \sum_{i=1}^{n} d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i))$$

که در آن سوپریمم روی تمام افرازهای $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ از بازهٔ $[a,b]$ گرفته می‌شود.

*نویسنده مسئول: hojjat.farzadfard@gmail.com

1 . geodesic

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.9.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.429]

به‌عنوان یک رده از مثال‌های استاندارد از ژئودزیک‌ها یا خط‌های ژئودزیک می‌توان به خط‌های مستقیم در فضاهای نرم‌دار اشاره کرد. اگر X یک فضای نرم‌دار باشد و x_1 و x_2 دو نقطهٔ متمایز از آن باشند، خط مستقیم واصل این دو نقطه با

$$\begin{aligned} \gamma :\ [0,1] &\to X \\ \gamma(t) &= (1-t)x_1 + tx_2 \\ &= x_1 + t(x_2 - x_1) \end{aligned} \qquad (۱)$$

تعریف می‌شود. در این حالت برای هر دو نقطهٔ t_1 و t_2 در بازهٔ $[0,1]$ داریم:

$$\gamma(t_1) - \gamma(t_1) = (t_1 - t_2)(x_1 - x_2)$$

و لذا

$$\|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\| = |t_1 - t_2|\|x_2 - x_1\|$$

اگرچه در این حالت γ یک ژئودزیک نیست، اما با تعریف $\gamma_0(t) = \gamma(t)/\|x_1 - x_2\|$ به یک ژئودزیک دست می‌یابیم.

می‌توان به جای بازهٔ $[0,1]$ از یک بازهٔ دلخواه $[a,b]$استفاده کرد. در این صورت ضابطهٔ γ بدین‌صورت در می‌آید:

$$\gamma(t) = x_1 + \frac{t-a}{b-a}(x_2 - x_1) \qquad (۲)$$

نمونهٔ دیگر از ژئودزیک‌ها دایره‌های عظیمه روی کره است. از هر دو نقطهٔ متمایز روی کره دایره عظیمه‌ای عبور می‌کند. قسمتی از این دایرهٔ عظیمه که طول کم‌تری دارد تصویر یک ژئودزیک را مشخص می‌کند. برای اثباتی از این مطلب به صفحهٔ ۲۷ [۴] مراجعه شود.

برای دست‌یابی به اطلاعات مفیدی در باب ژئودزیک‌ها به [۲] رجوع شود.

گوییم مسیر $\gamma : [a,b] \to (X,d)$ یک ژئودزیکِ به‌طور خطی پارامتری شده است هرگاه یک ثابت $c \geq 0$ وجود داشته باشد به‌قسمی که:

$$d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = c|t_1 - t_2| \quad (\text{برای هر } t_1 \text{ و } t_2 \text{ در } [a,b])$$

چنان‌که در بالا دیدیم خط‌های واصل نقاط در فضاهای نرم‌دار که با روابط (۱) یا (۲) تعریف می‌شوند نمونه‌هایی از ژئودزیک‌های به‌طور خطی پارامتری شده‌اند.

هدف این مقاله آن است که با استفاده از ابزار مدول پیوستگی (تعریف زیر را ببینید) مشخصه‌ای از ژئودزیک‌ها ارائه دهیم.

تعریف ۲. فرض کنیم (X,d_X) و (Y,d_Y) فضاهایی متریک باشند و $f: X \to Y$ یک تابع پیوسته باشد. مدول پیوستگی f به‌صورت تعریف می‌شود:

$$\delta_f : X \times (0,\infty) \to (0,\infty]$$

$$\delta_f(a,\epsilon) \coloneqq \sup\left\{\delta > 0 \ :\ \text{اگر } x \in X \text{ و } d_X(x,a) < \delta \text{ ، آنگاه } d_Y(f(x),f(a)) < \epsilon\right\}$$

نکتهٔ اصلی آن است که ژئودزیک بودن یک تابع پیوستهٔ $f:\mathbb{R}\to(X,d)$ ارتباط مستقیمی با خطی بودن مدول پیوستگی‌اش دارد، در این‌جا منظور از خطی بودن مدول پیوستگی آن است که یک ثابت $c>0$ وجود داشته باشد به قسمی که $\delta_f(t,\epsilon)=\frac{\epsilon}{c}$ برای هر $t\in\mathbb{R}$ و $\epsilon>0$.

نتایج اصلی این مقاله عبارتند از قضیه‌های ۵، ۶، ۱۳ و نتیجه‌های ۱۴ و ۱۵. در قضیه‌های ۵ و ۶ توابع پیوستهٔ $f:\mathbb{R}\to(X,d)$ را مشخص می‌کنیم که مدول پیوستگی آن‌ها خطی است. معلوم می‌شود که رفتار چنین توابعی بسیار شبیه ژئودزیک‌ها است، به همین دلیل ما هر چنین تابعی را یک نیم-ژئودزیک می‌نامیم. اگرچه هر ژئودزیک یک نیم-ژئودزیک است، اما مثال $f(t)=|t|$ نشان می‌دهد که یک نیم-ژئودزیک لزوماً یک ژئودزیک نیست.

قضیهٔ ۱۳ به مشخص کردن نیم-ژئودزیک‌ها در فضاهای نرم‌دار اکیداً محدب می‌پردازد (تعریف ۹ را ببینید). سرانجام نتیجهٔ ۱۵ تمام نیم-ژئودزیک‌های $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را مشخص می‌کند.

مدول پیوستگی به‌عنوان مشخصه‌ای برای ژئودزیک‌ها

در این بخش با استفاده از ابزار مدول پیوستگی به مشخص کردن خط‌های ژئودزیک می‌پردازیم.

حکم ۳. فرض کنیم f یک تابع پیوسته از $\mathbb{R}$ به توی یک فضای متریک (X,d) باشد. اگر $t\in\mathbb{R}$، $\epsilon>0$، $\delta_f(t,\epsilon)<\infty$، آن‌گاه:

الف) $d(f(t+\delta_f(t,\epsilon)),f(t))\leq\epsilon\,,\,d(f(t-\delta_f(t,\epsilon)),f(t))\leq\epsilon$

ب) در قسمت (الف) در حداقل یکی از روابط تساوی برقرار است.

اثبات. قرار می‌دهیم $t_2:=t+\delta_f(t,\epsilon),t_1:=t-\delta_f(t,\epsilon)$. توجه شود که برای هر $s\epsilon\mathbb{R}$ داریم $|s-t|<\delta_f(t,\epsilon)$ اگر و فقط اگر $t_1<s<t_2$. بنابراین طبق تعریف $\delta_f(t,\epsilon)$ برای هر $t_1<s<t_2$ داریم $d\big(f(s),f(t)\big)<\epsilon$. در رابطهٔ اخیر یک بار فرض می‌کنیم $s\to t_1^+$ و بار دیگر فرض می‌کنیم $s\to t_2^-$ و (الف) نتیجه می‌شود.

برای اثبات (ب) کافی است توجه کنیم که مجموعهٔ $C:=\{s\in\mathbb{R}:d(f(s),f(t))<\epsilon\}$ باز است، زیرا نگاشت $s\to d\big(f(s),f(t)\big)$ پیوسته است. بنابراین اگر هر دوی t_1 و t_2 به مجموعهٔ C متعلق باشند، آن‌گاه یک عدد $\delta>\delta_f(t,\epsilon)$ پیدا می‌شود به قسمی که $(t-\delta,t+\delta)\subseteq C$. اما این با ماکسیمالیتی $\delta_f(t,\epsilon)$ تناقض دارد.

یکی از رده‌های مهم از توابع پیوسته بین فضاهای متریک ردهٔ توابع لیپشیتز است. اگر (X,d_X) و (Y,d_Y) دو فضای متریک باشند و $f:X\to Y$، گویند f لیپشیتز است هرگاه یک ثابت $c\geq0$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$d_Y(f(x_1),f(x_2))\leq cd_X(x_1,x_2)\quad (\text{برای هر } x_1 \text{ و } x_2 \text{ در } X)$$

عدد c را یک ثابت لیپشیتز برای f می‌نامند. توجه شود که هر تابع لیپشیتز پیوسته است. از طرف دیگر می‌توان به‌راحتی دید که اگر $f:X\to Y$ پیوسته و یک ثابت $c>0$ وجود داشته باشد به‌قسمی‌که

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.9.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.429]

برای هر $x \in X$ و $\epsilon > 0$ رابطهٔ $\delta_f(x,\epsilon) = \frac{\epsilon}{c}$ برقرار باشد، آن‌گاه f لیپشیتز با یک ثابت c است.
قضیهٔ ۵ به بررسی عکس این مطلب می‌پردازد.

ژئودزیک‌ها یک نمونه از توابع لیپشیتز هستند.

لم ۴. فرض کنیم $f : \mathbb{R} \to (X,d)$ یک تابع لیپشیتز با یک ثابت c باشد. اگر a و b نقاطی از $\mathbb{R}$ باشند به قسمی که $a \leq b$ و $d\big(f(a),f(b)\big) = c|a-b|$، آن‌گاه برای هر دو نقطهٔ t_1 و t_2 در بازهٔ $[a,b]$ رابطهٔ $d\big(f(t_1),f(t_2)\big) = c|t_1 - t_2|$ برقرار است.

اثبات. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد که $t_1 \leq t_2$. برای به‌دست آوردن یک تناقض فرض می‌کنیم $d\big(f(t_1),f(t_2)\big) \neq c|t_1 - t_2|$. در این صورت $d\big(f(t_1),f(t_2)\big) <$ $c|t_1 - t_2|$ (به لیپشیتز بودن f توجه شود). بنابراین

$$
\begin{aligned}
d\big(f(a),f(b)\big) &\leq d\big(f(a),f(t_1)\big) + d\big(f(t_1),f(t_2)\big) + d\big(f(t_2),f(b)\big) \\
&< c(t_1 - a) + c(t_2 - t_1) - c(b - t_2) = c(b-a)
\end{aligned}
$$

که فرض لم را نقض می‌کند

قضیهٔ زیر یک وجه مشخصه از توابع پیوسته‌ای که مدول پیوستگی آنها خطی است به‌دست می‌دهد.

قضیهٔ ۵. فرض کنیم تابع $f : \mathbb{R} \to (X,d)$ پیوسته باشد و $c>0$. آن‌گاه عبارت‌های زیر معادلند:

الف) برای هر $t \in \mathbb{R}$ و $\epsilon > 0$ داریم $\delta_f(x,\epsilon) = \frac{\epsilon}{c}$.

ب) f یک تابع لیپشیتز با یک ثابت c است. به‌علاوه برای هر $t_0 \in \mathbb{R}$ حداقل یکی از گزاره‌های زیر برقرار است:

۱. $d\big(f(t),f(t_0)\big) = c|t - t_0|$ برای هر $t \leq t_0$.

۲. $d\big(f(t),f(t_0)\big) = c|t - t_0|$ برای هر $t \geq t_0$.

اثبات. الف) $\Leftarrow$ ب): فرض کنیم (الف) برقرار باشد اما (ب-۱) برقرار نباشد. در این صورت یک $\epsilon_0 > 0$ وجود دارد به قسمی که

$$
d\left(f\left(t_0 - \frac{\epsilon_0}{c}\right), f(t_0)\right) < c\left|\left(t_0 - \frac{\epsilon_0}{c}\right) - t_0\right| \tag{۳}
$$

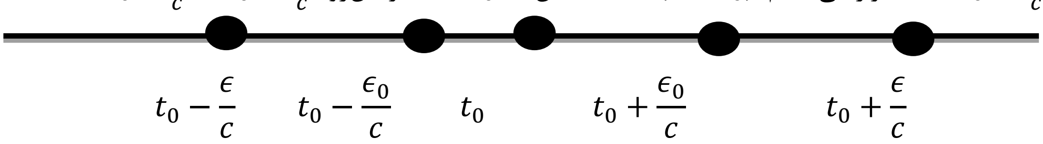
یا $d\left(f\left(t_0 - \frac{\epsilon_0}{c}\right), f(t_0)\right) < \epsilon_0$. بنابر حکم ۳ باید داشته باشیم

$$
d\left(f\left(t_0 - \frac{\epsilon_0}{c}\right), f(t_0)\right) = d\big(f(t_0 + \delta_f(t_0,\epsilon_0)), f(t_0)\big) = \epsilon_0 = c\left|\left(t_0 + \frac{\epsilon_0}{c}\right) - t_0\right|
$$

که طبق لم ۴ نتیجه می‌دهد

$$
d\big(f(t),f(t_0)\big) = c|t - t_0| \qquad \text{(برای هر } t_0 < t \leq t_0 + \tfrac{\epsilon_0}{c}\text{)}
$$

اگر $t > t_0 + \frac{\epsilon_0}{c}$، قرار می‌دهیم $\epsilon := c(t - t_0)$. آن‌گاه $\epsilon > \epsilon_0$ از این‌رو، $t_0 - \frac{\epsilon}{c} < t_0 - \frac{\epsilon_0}{c}$:



در این حالت بنا بر لم ۴ و رابطهٔ (۳) داریم:

$$d\left(f\left(t_0-\delta_f(t_0,\epsilon)\right),f(t_0)\right)=d\left(f\left(t_0-\frac{\epsilon}{c}\right),f(t_0)\right)<c\left|\left(t_0-\frac{\epsilon}{c}\right)-t_0\right|=\epsilon$$

حال حکم ۳ نتیجه می‌دهد که

$$d(f(t),f(t_0))=d\big(f\big(t_0-\delta_f(t_0,\epsilon_0)\big),f(t_0)\big)=\epsilon=c(t-t_0)$$

پس (ب-۲) برقرار است. *بدین‌ترتیب* (ب) اثبات می‌شود.

(ب) $\Leftarrow$ (الف): فرض کنیم $\epsilon>0\ ,t\in\mathbb{R}$ آن‌گاه حداقل یکی از روابط زیر برقرار است:

$$d\left(f\left(t-\frac{\epsilon}{c}\right),f(t)\right)=\epsilon \quad \text{یا} \quad d\left(f\left(t+\frac{\epsilon}{c}\right),f(t)\right)=\epsilon$$

پس $\delta_f(t,\epsilon)\le\frac{\epsilon}{c}$. از طرف دیگر با توجه به لیپشتیز بودن f داریم $\delta_f(t,\epsilon)\ge\frac{\epsilon}{c}$. بنابراین $\delta_f(t,\epsilon)=\frac{\epsilon}{c}$.

نظر به قضیهٔ اخیر یک تابع پیوستهٔ $f:\mathbb{R}\to(X,d)$ را یک نیم- ژئودزیک نامیم هرگاه یک ثابت $c>0$ وجود داشته باشد به‌قسمی‌که $\delta_f(t,\epsilon)=\frac{\epsilon}{c}$ برای هر $t\in\mathbb{R}$ و $\epsilon>0$. این ثابت c را نرم f می‌نامیم و آن را با $\|f\|$ نشان می‌دهیم. قضیهٔ ۶ به مشخص کردن نیم- ژئودزیک‌ها می‌پردازد.

قضیهٔ ۶. اگر $f:\mathbb{R}\to(X,d)$ یک نیم- ژئودزیک باشد و $c=\|f\|$، آن‌گاه دقیقا یکی از حالت‌های زیر رخ می‌دهد:

الف) $d\big(f(t_1),f(t_2)\big)=c|t_1-t_2|$ برای هر t_2,t_1 در $\mathbb{R}$.

ب) یک نقطهٔ یکتای $t_0\in\mathbb{R}$ وجود دارد به‌قسمی‌که تمام موارد زیر برقرارند:

۱. $d\big(f(t_1),f(t_2)\big)=c|t_1-t_2|$ برای هر $t_1\le t_0$ و $t_2\le t_0$.

۲. $d\big(f(t_1),f(t_2)\big)=c|t_1-t_2|$ برای هر $t_1\ge t_0$ و $t_2\ge t_0$.

۳. برای هر $t_1<t_0$ وجود دارد $t_2>t_0$ به‌قسمی‌که $d\big(f(t_1),f(t_2)\big)<c|t_1-t_2|$.

۴. برای هر $t_1>t_0$ وجود دارد $t_2<t_0$ به‌قسمی‌که $d\big(f(t_1),f(t_2)\big)<c|t_1-t_2|$.

ج) دو نقطهٔ یکتای $a<b$ در $\mathbb{R}$ وجود دارند به‌قسمی‌که تمام این موارد برقرارند:

۱. $d\big(f(t_1),f(t_2)\big)=c|t_1-t_2|$ برای هر $t_1\le b$ و $t_2\le b$.

۲. $d\big(f(t_1),f(t_2)\big)=c|t_1-t_2|$ برای هر $t_1\ge a$ و $t_2\ge a$.

۳. برای هر $t_1<a$ وجود دارد $t_2>b$ به قسمی که $d\big(f(t_1),f(t_2)\big)<c|t_1-t_2|$.

۴. برای هر $t_1>b$ وجود دارد $t_2<a$ به قسمی که $d\big(f(t_1),f(t_2)\big)<c|t_1-t_2|$.

بالعکس، اگر $f:\mathbb{R}\to(X,d)$ یک تابع لیپشیتز با یک ثابت c باشد که در یکی از سه حالت مذکور صدق می‌کند، آن‌گاه f یک نیم- ژئودزیک است.

اثبات. این‌که حداکثر یکی از سه حالت مذکور رخ می‌دهد بدیهی است. فرض کنیم (الف) برقرار نباشد. نشان می‌دهیم که حداقل یکی از (الف) یا (ب) برقرار است. از آن‌جاکه فرض کرده‌ایم (الف) برقرار نیست،

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.9.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.429]

نقاط t_1 و t_2 در $\mathbb{R}$ وجود دارند به‌طوری‌که $t_1 < t_2$ و $d\big(f(t_1), f(t_2)\big) < c|t_1 - t_2|$. قرار می‌دهیم:

$$A := \left\{t \in \mathbb{R} : \text{وجود دارد } s > t \text{ به قسمی که } d(f(s), f(t)) < c\ |s - t|\right\}$$
$$B := \left\{t \in \mathbb{R} : \text{وجود دارد } s < t \text{ به قسمی که } d(f(s), f(t)) < c\ |s - t|\right\}$$
$$C := \left\{t \in \mathbb{R} : \text{برای هر } s \in \mathbb{R} \text{ داریم } d(f(s), f(t)) < c\ |s - t|\right\}$$

آن‌گاه A و B ناتهی‌اند زیرا $t_1 \in A$ و $t_2 \in B$. قرار می دهیم a:=sup A و b:=inf B. ادعا می‌کنیم که $A \cap B = \emptyset$. فرض کنیم $t \in A$. آن‌گاه یک نقطهٔ $s_1 > t$ وجود دارد به‌طوری‌که $d(f(t), f(s_1)) < c\ |t - s_1|$. پس بنا بر قضیهٔ ۵ برای هر $s \le t$ داریم $d\big(f(t), f(s)\big) = c\ |t - s|$. این نشان می دهد که t در B نیست. از این رو $A \cap B = \emptyset$.

اگر t<a، آن‌گاه وجود دارد $t' \in A$ چنان که $t < t' \le a$. بنا بر تعریف A وجود دارد $s > t'$ به‌طوری‌که $d(f(t'), f(s)) < c\ |t' - s|$. بنابراین طبق لم ۴ رابطهٔ $d(f(t), f(s)) < c\ |t - s|$ را داریم. این بحث نتیجه می‌دهد که $t \in A$. چون این برای هر $t < a$ برقرار است، یا $A = (-\infty, a)$ و یا $A = (-\infty, a]$. به طریق مشابه می‌توان نشان داد که یا $B = (b, \infty)$ و یا $B = [b, \infty)$. به ویژه $a \le b$.

اگر $a < s < t$، آنگاه $s \notin A$. پس برای هر $r > s$ داریم $d(f(r), f(s)) = c\ |r - s|$. به‌ویژه $d(f(t), f(s)) = c\ |t - s|$. به‌عنوان یک نتیجه

$$d\big(f(t), f(a)\big) = \lim_{s \to a^+} d\big(f(t), f(s)\big) = c \lim_{s \to a^+} |t - s| = c|t - a|$$

از این بحث عبارت زیر را داریم:

برای هر $t_1 \ge a$ و $t_2 \ge a$ رابطهٔ $d(f(t_1), f(t_2)) = c\ |t_1 - t_2|$ برقرار است.

به‌طور مشابه:

برای هر $t_1 \le b$ و $t_2 \le b$ رابطهٔ $d(f(t_1), f(t_2)) = c\ |t_1 - t_2|$ برقرار است.

به‌ویژه $C = [a, b], B = (b, \infty), A = (-\infty, a)$. حال برای a=b حالت (ب) برقرار است و برای a< b حالت (ج).

اثبات قسمت عکس با استفاده از قضیهٔ ۵ صورت می‌گیرد.

حال نشان می‌دهیم که تمام حالت‌های مذکور در قضیهٔ اخیر ممکن است رخ دهند. تابع همانی $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(t)=t$ مثالی از حالت (الف) است. تابع قدر مطلق $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(t) = |t|$ نمونه‌ای از حالت (ب) به‌دست می‌دهد، که برای آن $t_0 = 0$. حال به ساختن مثالی برای حالت (ج) می‌پردازیم. برای هر $t \in \mathbb{R}$ تابع $f(t): [0,1] \to \mathbb{R}$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$\big(f(t)\big)(s) = \begin{cases} t - (1 + t)s & (t \le -1) \\ t & (-1 \le t \le 0) \\ ts & (t \ge 0) \end{cases}$$

این یک تابع پیوستهٔ $f: \mathbb{R} \to C[0,1]$ تعریف می‌کند که در حالت (ج) قضیهٔ اخیر به‌ازای $a = -1$ و $b = 0$ صدق می‌کند (فضای $C([0,1])$ با نرم سوپریمم مجهز شده است). توجه شود که نمودار تابع $s \to (f(t))(s)$ به‌ازای $t < -1$ پاره‌خطی است که نقاط $(0, t)$ و $(1, t)$ را به‌هم وصل می‌کند. اگر $-1 \le t \le 0$، نمودار تابع مذکور یک پاره‌خط افقی است که دو نقطهٔ گفته شده را به‌هم وصل می‌کند. سرانجام اگر $t > 0$، نمودار تابع مورد بحث پاره‌خطی است که مبدأ را به نقطهٔ $(1, t)$ وصل می‌کند.

ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر $t_1 \le 0$ و $t_2 \le 0$ رابطهٔ $\|f(t_1) - f(t_2)\| = |t_1 - t_2|$ برقرار است. برای شروع فرض می‌کنیم $t_1 \le -1$ و $t_2 \le -1$. در این صورت

$$\begin{aligned}\|f(t_1) - f(t_2)\| &= \sup\{\left|\left(f(t_1) - f(t_2)\right)(s)\right| : 0 \le s \le 1\} \\ &= \sup\{|t_1 - t_2 + (t_2 - t_1)s| :\ 0 \le s \le 1\} \\ &= |t_1 - t_2|\end{aligned}$$

حال فرض کنیم $t_1 \le -1$ و $0 \le t_2 \le 0$. در این صورت

$$\begin{aligned}\|f(t_1) - f(t_2)\| &= \sup\{|t_1 - (1 + t_1)s - t_2| : 0 \le s \le 1\} \\ &= \sup\{|t_2 - t_1 + (1 + t_1)s| : 0 \le s \le 1\}\end{aligned}$$

با توجه به این‌که تابع $s \to t_2 - t_1 + (1 + t_1)s$ نزولی است و در بازهٔ $0 \le s \le 1$ هرگز منفی نمی‌شود، مقدار بیشینهٔ خود را در بازهٔ مذکور به‌ازای $s = 0$ اختیار می‌کند. پس در این حالت نیز داریم $\|f(t_1) - f(t_2)\| = |t_1 - t_2|$.

سرانجام فرض می‌کنیم t_1 و t_2 هر دو در بازهٔ $[-1\,, 0]$ باشند. در این برای هر $0 \le s \le 1$ داریم $\left(f(t_1)\right)(s) = t_1$ و $\left(f(t_2)\right)(s) = t_2$. پس $\|f(t_1) - f(t_2)\| = |t_1 - t_2|$.

حال نشان می‌دهیم که برای هر $t_1 \ge -1$ و $t_2 \ge 0$ رابطهٔ $\|f(t_1) - f(t_2)\| = |t_1 - t_2|$ برقرار است. ابتدا فرض می‌کنیم $t_1 \ge 0$ و $t_2 \ge 0$. آن‌گاه

$$\begin{aligned}\|f(t_1) - f(t_2)\| &= \sup\{\left|\left(f(t_1)\right)(s) - \left(f(t_2)\right)(s)\right| :\ 0 \le s \le 1\} \\ &= \sup\{|t_1 s - t_2 s| :\ 0 \le s \le 1\} = |t_1 - t_2|\end{aligned}$$

حال فرض می‌کنیم $-1 \le t_1 \le 0$ و $t_2 \ge 0$. آن‌گاه

$$\begin{aligned}\|f(t_1) - f(t_2)\| &= \sup\{\left|\left(f(t_1)\right)(s) - \left(f(t_2)\right)(s)\right| :\ 0 \le s \le 1\} \\ &= \sup\{|t_1 - t_2 s| :\ 0 \le s \le 1\} = |t_1 - t_2|\end{aligned}$$

در رابطهٔ اخیر از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که تابع $s \to t_2 s - t_1$ صعودی و روی بازهٔ $[0\,, 1]$ نامنفی است.

حالت سوم حالتی است که $-1 \le t_1 \le 0$ و $-1 \le t_2 \le 0$؛ این حالت قبلاً بررسی شده است.

حال نشان می‌دهیم که برای هر $t_1 < -1$ و هر $t_2 > 0$ داریم $\|f(t_1) - f(t_2)\| < |t_1 - t_2|$. اگر $t_1 < -1$ و $t_2 > 0$ ، آن‌گاه

$$\|f(t_1) - f(t_2)\| = \sup\{|(1 + t_1 + t_2)s - t_1| :\ 0 \le s \le 1\}$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.9.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.429]

اگر $1 + t_1 + t_2 \geq 0$ ، آن‌گاه تابع $s \to (1 + t_1 + t_2)s - t_1$ صعودی و روی بازهٔ $[0 , 1]$ مثبت است، از این‌رو بیشینهٔ خود را به‌ازای $s = 1$ اختیار می‌کند. پس

$$\|f(t_1) - f(t_2)\| = 1 + t_2 < t_2 - t_1$$

اگر $1 + t_1 + t_2 < 0$ ، آن‌گاه تابع $s \to (1 + t_1 + t_2)s - t_1$ صعودی و روی بازهٔ $[0 , 1]$ مثبت است، از این‌رو بیشینهٔ خود را به‌ازای $s = 0$ اختیار می‌کند. پس

$$\|f(t_1) - f(t_2)\| = -t_1 < t_2 - t_1$$

توجه شود که از مجموعه بحث های فوق لیپشیتز بودن f نتیجه می‌شود. از این‌رو، طبق قضیهٔ ۶ تابع f یک نیم- ژئودزیک است.

تعریف ۷. نقطهٔ t_0 در حالت (ب) قضیهٔ ۶ را نقطهٔ زاویه‌دار نوع اول و نقاط a و b در قسمت (ج) آن قضیه را نقاط زاویه‌دار نوع دوم می‌نامیم.

حکم ۸. فرض کنیم $f : \mathbb{R} \to (X, d)$ یک نیم- ژئودزیک باشد و $c := \|f\|$.

الف) اگر f نقطهٔ زاویه‌دار نوع اول (دوم) داشته باشد، آن‌گاه نمی‌تواند نقطهٔ زاویه‌دار نوع دوم (اول) داشته باشد.

ب) برای هر نقطهٔ $x \in X$، مجموعهٔ $f^{-1}(\{x\})$ حداکثر دو عضو دارد.

اثبات. قسمت (الف) نتیجهٔ مستقیم قضیهٔ ۶ است. برای اثبات (ب) فرض کنیم $t_1 < t_2 < t_3$ سه نقطه در $f^{-1}(\{x\})$ به‌ازای $x \in X$ ای باشند. از آن‌جاکه $f(t_1) = f(t_2)$ ، داریم $d\big(f(t_1), f(t_2)\big) < c|t_1 - t_2|$ و بنا بر قضیهٔ ۵ برای هر $t \geq t_2$ رابطهٔ $d\big(f(t), f(t_2)\big) < c|t - t_2|$ برقرار است. اما این با رابطهٔ $f(t_2) = f(t_3)$ تناقض دارد. بنابراین (ب) برقرار است.

در قضیهٔ ۱۳ نشان خواهیم داد که تحت شرایط خاصی روی فضای نرم‌دار X نقاط زاویه‌دار نوع دوم پدیدار نمی‌شوند. این نوع فضاهای نرم‌دار در تعریف ذیل معرفی شده‌اند:

تعریف ۹. (**تعریف ۷.۱.۱**،[۲]). فضای نرم‌دار X را اکیداً محدب گویند هرگاه برای هر دو نقطهٔ متمایز x_1 و x_2 در X با $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ و هر $0 < t < 1$ داشته باشیم $\|(1 - t)x_1 + tx_2\| < 1$.

حکم ۷.۲.۱، [۲] بیان می‌کند که فضای نرم‌دار X اکیداً محدب است اگر و فقط اگراز هر دو نقطهٔ متمایز x_1 و x_2 از آن دقیقاً یک مسیر ژئودزیک عبور کند.

تعریف ۱۰. (**تعریف ۲.۴.۱۴**، [۲]). فضای متریک X را به‌طور یکتا ژئودزیک نامند هرگاه از هر دو نقطهٔ متمایز X دقیقاً یک ژئودزیک عبور کند.

در بخش بعد به تعیین نیم- ژئودزیک‌ها در فضاهای اکیداً محدب می‌پردازیم.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.9.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.429]

نیم- ژئودزیک‌ها در فضاهای اکیداً محدب

هدف اصلی این بخش بیان و اثبات مشابه قضیهٔ ۶ برای حالتی است که X یک فضای نرمدار اکیداً محدب است. از حکم ۱۱ به‌عنوان ابزار استفاده می‌کنیم. این حکم تعمیم یک نتیجهٔ استاندارد در حسابان است.

حکم ۱۱. فرض کنیم X یک فضای نرم دار، I یک بازهٔ حقیقی با طول مثبت و $f : I \to X$ یک تابع مشتق‌پذیر باشد. اگر $f' : I \to X$ یک تابع ثابت باشد، آن‌گاه نقاط یکتای x_0وy_0 در X وجود دارند به‌قسمی که $f(t) = tx_0 + y_0$ برای هر $t \in I$.

اثبات. ابتدا حالتی را بررسی می‌کنیم که $f'(t) = 0$ برای هر $t \in I$. نقطهٔ $a \in I$ را ثابت در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم:

$$\phi : I \to \mathbb{R}$$
$$\phi(t) := \|f(t) - f(a)\|$$

آن‌گاه برای هر $t_0 \in I$ و هر $t \neq t_0$ داریم $\left|\frac{\phi(t)-\phi(t_0)}{t-t_0}\right| \leq \left\|\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\right\|$. با میل دادن t به‌سمت t_0 نتیجه می‌شود که $\phi'(t_0) = 0$. چون t_0 نقطه‌ای دلخواه بود و دامنه و برد ϕ بازه‌هایی حقیقی‌اند، نتیجه می‌گیریم که ϕ یک تابع ثابت است. بنابراین برای هر $t \in I$ داریم $\phi(t) = \phi(a) = 0$. حال تعریف ϕ ایجاب می‌کند که f یک تابع ثابت است.

اینک به سراغ حالت کلی می‌رویم. فرض کنیم $x_0 \in X$ و $f'(t) = x_0$ برای هر $t \in I$. قرار می‌دهیم $g(t) := f(t) - tx_0$ $(t \in I)$. آن‌گاه $g' = 0$. پس طبق بحث مذکور یک نقطهٔ $y_0 \in X$ وجود دارد به‌قسمی‌که $g(t) = y_0$ برای هر $t \in I$. با قرار دادن در ضابطهٔ f حکم اثبات می‌شود.

حکم ۱۲. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار اکیداً محدب و I یک بازهٔ حقیقی با طول مثبت باشد. اگر $f : I \to X$ و $c > 0$ ، آن‌گاه گزاره‌های زیر معادلند:

الف) برای هر $t_1 \in I$ و $t_2 \in I$داریم $\|f(t_1) - f(t_2)\| = c|t_1 - t_2|$.

ب) نقاط یکتای x_0 و y_0 در X وجود دارند به‌قسمی‌که $\|x_0\| = c$ و $f(t) = tx_0 + y_0$ برای هر $t \in \mathbb{R}$.

اثبات. (الف) $\Longleftarrow$ (ب): نشان می‌دهیم که f' روی I موجود و برابر با مقداری ثابت است. فرض کنیم t_1 و t_2 در I باشند. نقاط متمایز a و b را در I طوری بر می‌گزینیم که $a \leq t_i \leq b$ برای $i \in \{1,2\}$. از آن‌جاکه تحدید f به بازهٔ $[a , b]$یک ژئودزیک به‌طور خطی پارامتری شده است (طبق ویژگی یکتایی ژئودزیک‌ها در فضاهای اکیداً محدب)، برای هر $a \leq t \leq b$ داریم

$$f(t) = f(a) + \frac{t-a}{b-a}\big(f(b) - f(a)\big),$$

پس

$$f'(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.9.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.429]

از این‌رو، $f'(t_1) = f'(t_2)$. پس $f' : I \to X$ یک تابع ثابت است. بنابراین طبق حکم ۱۱ نقاط یکتای x_0 و y_0 در X وجود دارند به‌قسمی‌که

$$f(t) = tx_0 + y_0 \qquad (\text{برای هر } t \in I)$$

توجه شود که $x_0 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ از این‌رو، $\|x_0\| = c$.

(ب) $\Leftarrow$ (الف): سر راست.

اکنون زمینه فراهم است که به مشخص کردن نیم- ژئودزیک‌ها در فضاهای نرم‌دار اکیداً محدب بپردازیم. چنان‌که قبلاً خاطرنشان کردیم، در این‌جا نقاط زاویه‌دار نوع دوم ظاهر نمی‌شوند.

قضیهٔ ۱۳. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار اکیداً محدب و $f : \mathbb{R} \to X$ یک نیم- ژئودزیک باشد و $c =: \|f\|$. آن‌گاه دقیقاً یکی از حالت‌های رخ می‌دهد:

الف) نقاط یکتای x_0 و y_0 در X وجود دارند به‌طوری‌که برای هر $t \in \mathbb{R}$ داریم $f(t) = tx_0 + y_0$.

ب) نقطهٔ یکتای $t_0 \in \mathbb{R}$ و نقاط یکتای x_1 ، x_2 و y_0 در X وجود دارند به‌قسمی‌که $x_1 \neq x_2$ و $\|x_1\| = \|x_2\| = c$ و برای هر $t \in \mathbb{R}$ داریم

$$f(t) = \begin{cases} (t-t_0)x_1 + y_0 & (t \le t_0) \\ (t-t_0)x_2 + y_0 & (t \ge t_0) \end{cases}$$

بالعکس، هر تابع $f : \mathbb{R} \to X$ که به فرم (الف) یا (ب) باشد یک نیم-ژئودزیک است.

اثبات. اگر حالت (الف) قضیهٔ ۶ رخ دهد، آن‌گاه طبق حکم ۱۲ حالت (الف) برقرار است.

اگر یکی از حالت های (ب) یا (ج) قضیهٔ ۶ رخ دهد، آن‌گاه نقاط a و b از $\mathbb{R}$ وجود دارند به‌قسمی‌که $a \le b$ و

$$\|f(t_1) - f(t_2)\| = c|t_1 - t_2| \quad \left(\text{برای هر } t_1 \le b \text{ و } t_2 \le b\right)$$

$$\|f(t_1) - f(t_2)\| = c|t_1 - t_2| \quad (\text{برای هر } t_1 \ge a \text{ و } t_2 \ge a)$$

پس طبق حکم ۱۲ نقاط یکتای x_1، y_1، x_2 و y_2 در X وجود دارند به‌طوری‌که

$$f(t) = tx_1 + y_1 \quad \left(\text{برای هر } t \le b\right) \tag{۴}$$

$$f(t) = tx_2 + y_2 \quad \left(\text{برای هر } t \ge a\right) \tag{۵}$$

به‌ویژه رابطهٔ (۴) ایجاب می‌کند که

$$f(a) = ax_1 + y_1 \qquad f(b) = bx_1 + y_1$$

پس $f(a) - f(b) = (a-b)x_1$. از طرف دیگر رابطهٔ (۵) ایجاب می کند که

$$f(a) = ax_2 + y_2 \qquad f(b) = bx_2 + y_2$$

بنابراین $f(a) - f(b) = (a-b)x_2$. به‌ویژه رابطهٔ زیر را داریم: $(a-b)x_1 - (a-b)x_2$. حال اگر $a \neq b$ ، آن‌گاه $x_1 = x_2 =: x_0$ و $y_1 = y_2 =: y_0$ و برای هر $t \in \mathbb{R}$ داریم $f(t) = tx_0 + y_0$. در این صورت حالت (الف) رخ می‌دهد. به‌ویژه حالت (ج) قضیهٔ ۶ نمی‌تواند رخ دهد.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.9.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.429]

اگر $y_0 =: a = b$ ، آن‌گاه روابط (۴) و (۵) به‌ترتیب بدین‌صورت در می‌آیند:

$$f(t) = tx_1 + y_1 \quad (\text{برای هر } t \le t_0)$$

$$f(t) = tx_2 + y_2 \quad (\text{برای هر } t \ge t_0)$$

قرار می‌دهیم $y_0 \coloneqq f(t_0)$. آن‌گاه برای هر $j \in \{1,2\}$ داریم $y_j = f(t_0) - t_0x_j = y_0 - t_0x_j$.
پس برای هر $t \le t_0$ داریم

$$f(t) = tx_1 + y_0 - t_0x_1 = (t - t_0)x_1 + y_0$$

و برای هر $t \ge t_0$

$$f(t) = tx_2 + y_0 - t_0x_2 = (t - t_0)x_2 + y_0$$

حال اگر حالت (ب) قضیهٔ ۶ رخ دهد، باید داشته باشیم $x_1 \neq x_2$. این‌که $\|x_1\| = \|x_2\| = c$ از حکم ۱۲ نتیجه می‌شود.

برای قسمت عکس کافی است با توجه به قضیهٔ ۵ نشان دهیم که f یک تابع لیپشیتز با یک ثابت c است. اگر f در (الف) صدق کند، دیدن این مطلب راحت است. فرض کنیم f در (ب) صدق کند و t_1 و t_2 دو نقطه در $\mathbb{R}$ باشند. اگر t_1 و t_2 هر دو در بازهٔ $(-\infty, t_0]$ و یا در بازهٔ $(t_0\,, \infty)$ باشند، آن‌گاه به‌دلیل خطی بودن f روی این دو بازهٔ به‌راحتی می‌توان دید که $\|f(t_1) - f(t_2)\| \le c|t_1 - t_2|$. اگر $t_1 < t_0$ و $t_2 > 0$، آن‌گاه

$$f(t_1) - f(t_2) = (t_1 - t_0)x_1 - (t_2 - t_0)x_2$$

پس $\|f(t_1) - f(t_2)\| \le c|t_1 - t_2|$.

نتیجهٔ ۱۴. تحت مفروضات قضیهٔ مذکور حالت (ج) در قضیهٔ ۶ هیچگاه رخ نمی‌دهد.

در حالت حقیقی نتیجهٔ ۱۵را داریم:

نتیجهٔ ۱۵. اگر $f\,:\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک نیم-ژئودزیک باشد و $c = \|f\|$ ، آن‌گاه دقیقاً یکی از این حالت‌ها رخ می‌دهد:

الف) نقاط یکتای x_0 و y_0 در $\mathbb{R}$ وجود دارند به‌قسمی‌که $f(t) = tx_0 + y_0$ برای هر $t \in \mathbb{R}$. به‌علاوه $x_0 = \pm c$.

ب) نقاط یکتای t_0، x_0 و y_0 در $\mathbb{R}$ وجود دارند به‌قسمی‌که $x_0 = \pm c$ و $f(t) = |t - t_0|x_0 + y_0$ برای هر $t \in \mathbb{R}$.

بالعکس، هر تابع به فرم (الف) یا (ب) یک نیم- ژئودزیک است.

منابع

1. Jost J., "Riemannian Geometry and Geometric Analysis", Berlin, New York: Springer-Verlag (2002).

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.9.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.3.429]

2. Papadopoulos A., "Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature", 2nd edition, European Mathematical Society (2014).

3. Plebanski J., Krasimski A., "An Introduction to General Relativity and Cosmology", Cambridge University Press (2006).

4. Weinstock R., "Calculus of Variations with Applications to Physics & Engineering", Dover Publications, Inc., NewYork (1974).

5. Will C., "Theory and Experiment in Gravitational Physics", Cambridge University Press (1993).

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.3.9.2]

[DOI: 10.52547/mmr.6.3.429]