

## عملگرها و حساب دیفرانسیل روی $\delta$ -هوم-ابرجبرهای لی جردن

ولی‌الله خلیلی

دانشگاه اراک، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

پذیرش ۹۷/۰۹/۰۷

دریافت ۹۷/۰۳/۰۹

### چکیده

در این مقاله، به بررسی و مطالعه نوعی از عملگرهای دیفرانسیل روی  $\delta$ -هوم-ابرجبرهای لی جردن می‌پردازیم. هم‌چنین، به تعریف نوعی از عملگرهای دیفرانسیل روی مدول‌های این دسته از جبرها می‌پردازیم. سرانجام، مفهوم نوعی از حساب دیفرانسیل بر پایه مشتقات روی این دسته از جبرها را بررسی می‌کنیم و مثالی برای محقق‌سازی این مفاهیم می‌آوریم.

**واژه‌های کلیدی:** هوم-جبرهای لی، هوم-ابرجبرهای لی، مشتقات و نظریه کوهمولوژی روی هوم-ابرجبرهای لی.

### مقدمه

در [۱۵]،  $\delta$ -هوم-ابرجبرهای لی جردن<sup>۱</sup> به‌عنوان تعمیمی از جبرهای لی جردن و ابرجبرهای لی جردن معرفی شد. یک  $\delta$ -ابرجبر لی جردن یک سه‌تایی  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta)$  است که در آن  $\mathcal{L}$  یک ابر فضای برداری و یک نگاشت دوخطی  $[\cdot, \cdot]$  زوج که در خواص  $\delta$ -پاد تقارن جردن و اتحاد  $\delta$ -ژاکوبی جردن صدق کند (تعریف ۱). اگر  $\delta = 1$  باشد، یک ابرجبر لی و اگر  $\delta = -1$  باشد، یک ابرجبر لی جردن را به‌دست می‌دهد [۹]، [۱۸].

ساختار هوم-جبرهای لی، ارتباط تنگاتنگی با مباحث فیزیکی و به‌ویژه در جبرهای لی از میدان‌های برداری دارد. هوم-جبرهای لی به‌وسیله بسیاری از پژوهش‌گران بررسی شده است [۱۰]، [۱۱]، [۱۶]، [۱۷]، [۲۰]، [۲۱]. در حقیقت یک هوم-جبر لی یک سه‌تایی  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \alpha)$  است که  $\mathcal{L}$  یک فضای برداری همراه با یک براکت دوخطی شبه متقارن که اتحاد ژاکوبی آن به‌وسیله یک نگاشت خطی روی  $\mathcal{L}$  درگیر شود. حال اگر در یک هوم-جبر لی، خاصیت شبه متقارن براکت با شبه متقارن-جردن جای‌گزین شود آن‌گاه چهارتایی  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  یک  $\delta$ -هوم-ابرجبرهای لی جردن است. بدیهی است که چهارتایی  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, id_{\mathcal{L}})$  یک  $\delta$ -ابرجبر لی جردن است.

در سال ۲۰۱۰، مفهوم هوم-ابرجبرهای لی به‌عنوان تعمیمی از هوم-جبرهای لی مطرح شد [۱]، [۲]، [۳]. به‌عبارت دیگر، یک هوم-ابرجبر لی متشکل است از یک ابر فضای برداری همراه با یک براکت شبه متقارن زوج که در آن خاصیت اتحاد ابر-ژاکوبی به‌وسیله یک نگاشت خطی درگیر شود. اخیراً در سال ۲۰۱۷، خانواده‌ای از هوم-ابرجبرهای لی موسوم به  $\delta$ -هوم-ابرجبرهای لی جردن که مفهوم کلیتری از هوم-ابرجبرهای لی و هوم-جبرهای لی است معرفی شده است [۱۵]. در این مقاله، قصد داریم به نوعی از مفهوم عملگر دیفرانسیل و حساب دیفرانسیل روی این خانواده از جبرها بپردازیم.

مفاهیم متعددی از عملگرهای دیفرانسیل و حساب دیفرانسیل روی جبرهای غیرشرکت‌پذیر وجود دارد [۵]، [۶]،

\* نویسنده مسئول v-khalili@araku.ac.ir

1.  $\delta$ -Hom-Jordan Lie superalgebras

[۷]، [۸]. برحسب کاربردهایشان در مباحث فیزیکی و ریاضیات، نوعی از تعریف عملگر دیفرانسیل و مفهوم حساب دیفرانسیل را می‌توان در نظر گرفت. اما نمی‌توان یک تعریف کلاسیک را برای همه جبرهای غیرشکرت پذیر فرمول‌بندی کرد. با این وجود، برخی پژوهش‌گران به تعریف نوعی از عملگر دیفرانسیل و مفهوم نوعی از حساب دیفرانسیل روی خانواده‌ای از جبرهای غیرشکرت‌پذیر، نظیر جبرهای لی، ابرجبرهای لی و هوم-جبرهای لی پرداختند [۱۳]، [۱۴]، [۱۹]. به هر حال، نکته‌ای کلیدی وجود دارد که منجر به تعریف عملگر دیفرانسیل روی این جبرها می‌شود، آن نکته این است که، ارتباط تنگاتنگی بین تعریف عمل ضرب در این جبرها با مفهوم مشتقات روی این نوع جبرها وجود دارد. چون  $\delta$ -هوم-ابرجبرهای لی جردن تعمیمی از جبرهای لی و هوم-جبرهای لی هستند، بنابراین، متعاقب بررسی عملگرها و حساب دیفرانسیل روی هوم-جبرهای لی، ما به بررسی عملگرها و حساب دیفرانسیل روی  $\delta$ -هوم-ابرجبرهای لی جردن ترغیب شدیم.

در این مقاله، قصد داریم، ابتدا به تعریف یک نوع از عملگر دیفرانسیل از مرتبه دلخواه روی  $\delta$ -هوم-ابرجبرهای لی جردن بپردازیم. سپس این مفاهیم را روی هوم-مدول‌های این جبرها بررسی کنیم. سرانجام به بررسی مفهوم حساب دیفرانسیل بر پایه مشتقات روی این دسته از جبرها بپردازیم.

در خاتمه این مقدمه، به‌طور اختصار محتوای بخش‌ها در این مقاله را بیان می‌کنیم. در بخش دوم، تعاریف و نتایج اولیه را یادآوری می‌کنیم. بخش سوم، شامل تعریف عملگر دیفرانسیل از مرتبه صفر و مراتب بالاتر روی  $\delta$ -هوم-ابرجبرهای لی جردن و روی مدول‌های این دسته از جبرها است. در بخش چهارم مفهوم نوعی از حساب دیفرانسیل بر پایه مشتقات از یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن به کمک هوم-مختلط‌سازی شوالیه-یلینبرگ<sup>۱</sup> بیان می‌شود. سرانجام در بخش آخر مثالی برای محقق‌سازی این مفاهیم می‌آوریم.

## تعاریف اولیه

در سراسر این مقاله،  $\mathbb{F}$  را یک میدان با مشخصه صفر و  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$  را یک گروه آبدی جمعی با دو عضو در نظر می‌گیریم. همه فضاها برداری را روی میدان  $\mathbb{F}$  در نظر می‌گیریم و همچنین فرض می‌کنیم  $\delta = \pm 1$ . برای یک ابرفضای برداری  $\mathcal{L}$  که به وسیله  $-\mathbb{Z}_2$  مدرج شده است، درجه هر عضو همگن  $x \in \mathcal{L}$  را با نماد  $|x|$  نشان می‌دهیم.

### ۱. $\delta$ -هوم-ابرجبرهای لی جردن

در زیر به تعریف  $\delta$ -ابرجبرهای لی جردن و سپس به تعریف  $\delta$ -هوم-ابرجبرهای لی جردن می‌پردازیم.

تعریف ۱. [۱۸] یک  $\delta$ -ابرجبر لی جردن، یک سه‌تایی  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta)$ ، متشکل از یک ابرفضای برداری  $-\mathbb{Z}_2$  مدرج  $\mathcal{L}$  و یک نگاشت دو خطی زوج

$$[\cdot, \cdot]: \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}; [\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] \subset \mathcal{L}_{i+j}, \quad \forall i, j \in \mathbb{Z}_2,$$

موسوم به براکت که در این شرایط صدق کند:

$$[x, y] = -\delta(-1)^{|x||y|}[y, x], \quad \delta = \pm 1, \quad \forall x, y \in \mathcal{L},$$

$$(-1)^{|x||z|}[x, [y, z]] + (-1)^{|y||x|}[y, [z, x]] + (-1)^{|z||y|}[z, [x, y]] = 0, \quad \forall x, y, z \in \mathcal{L}.$$

اگر  $\delta = 1$  یا  $\delta = -1$  آن‌گاه تعریف فوق یک ابرجبر لی (یا ابرجبر لی جردن) را به دست می‌دهد.

تعریف ۲. [۱۵] یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن، یک چهارتایی  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  است که شامل یک ابرفضای

1. Chevalley-Eilenberg

بردارای  $\mathbb{Z}_2$ -مدرج  $\mathcal{L}$ ، یک نگاشت دو خطی زوج (موسوم به براکت) و یک نگاشت خطی

$$\alpha: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L},$$

که در این شرایط صدق کند:

- $[x, y] = -\delta(-1)^{|x||y|}[y, x]$ ,  $\delta = \pm 1$ ,  $\forall x, y \in \mathcal{L}$ ,
- $(-1)^{|x||z|}[\alpha(x), [y, z]] + (-1)^{|y||x|}[\alpha(y), [z, x]] + (-1)^{|z||y|}[\alpha(z), [x, y]] = 0$ ,  $\forall x, y, z \in \mathcal{L}$ .

اگر  $\delta = 1$  آن‌گاه تعریف فوق یک هوم-ابرجبر لی را به دست می‌دهد.

**تعریف ۳.** فرض کنید  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن باشد. اگر نگاشت خطی  $\alpha$  یک هم‌ریختی جبرلی باشد، آن‌گاه  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  را یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی نامیم و اگر  $\alpha$  یک خودریختی جبرلی باشد، آن را یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن منظم نامیم.

**مثال ۴.** مثال‌های متعددی برای ساختن  $\delta$ -هوم-ابرجبرهای لی جردن وجود دارد (مثال‌های ۲۰۵ و ۲۰۶ از مرجع [۱۵]). در این جا، قصد داریم مثالی از یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن با بعد ۳ ارائه دهیم، که با یک  $\delta$ -ابرجبر لی جردن شروع می‌شود. برای این منظور، فرض کنید  $\mathcal{L}$  فضای برداری همهٔ ماتریس‌های  $3 \times 3$  بدین صورت باشد:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall a, b, c \in \phi$$

جایی که  $\phi$  یک ابرجبر شرکت پذیر است. قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : b \in \phi \right\}, \quad \mathcal{V}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, c \in \phi \right\} \quad (۱)$$

در این صورت  $\mathcal{L} = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1$  همراه با براکت زیر

$$\left[ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & c' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - (-1)^{|a'||c|} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a'c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (۲)$$

یک  $\delta$ -ابرجبر لی جردن است (مثال ۱۴ مرجع [۱۸]). حال قرار می‌دهیم:

$$\alpha: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

در این صورت، با توجه به

$$[\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_0] = [\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1] = [\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_0] = 0, \quad [\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_1] \subseteq \mathcal{V}_0$$

به راحتی می‌توان نشان داد که چهارتایی  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن منظم است.

**تعریف ۵.** فرض کنیم  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  و  $(\mathcal{L}', [\cdot, \cdot]_{\mathcal{L}'}, \delta, \beta)$  دو  $\delta$ -هوم-ابرجبرهای لی جردن باشند. یک نگاشت خطی  $\theta: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$  را یک ریختار از  $\delta$ -هوم-ابرجبرهای لی جردن گوییم، هرگاه  $\theta \circ \alpha = \beta \circ \theta$ ، به علاوه

$$\theta([x, y]_{\mathcal{L}}) = [\theta(x), \theta(y)]_{\mathcal{L}'}, \quad \forall x, y \in \mathcal{L}.$$

**تعریف ۶.** یک زیرفضای  $\mathbb{Z}_2$ -مدرج  $\mathcal{H}$  از  $\mathcal{L}$  را یک هوم-زیرجبر از  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  نامیم هرگاه  $\alpha(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}$  و به علاوه  $[\mathcal{H}, \mathcal{H}] \subset \mathcal{H}$ . همچنین زیرفضای  $\mathbb{Z}_2$ -مدرج  $I$  از  $\mathcal{L}$  را یک هوم-ایده‌آل از  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  نامیم هرگاه  $\alpha(I) \subseteq I$  و به علاوه  $[I, \mathcal{L}] \subset I$ . مرکز  $\mathcal{L}$  را با  $Z(\mathcal{L})$  نشان می‌دهیم که عبارت است از:

$$Z(\mathcal{L}) = \{x \in \mathcal{L} : [x, \mathcal{L}] = 0\}.$$

۲. مشتقات روی  $\delta$ -هوم-ابرجبرهای لی جردن

فرض کنید  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی باشد. برای هر عدد صحیح نامنفی  $k$ ، ترکیب  $k$  بار از نگاشت خطی  $\alpha$  را با نماد  $\alpha^k$  نشان می‌دهیم. اگر  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن منظم باشد، ترکیب  $k$  بار نگاشت خطی همگن  $\alpha^{-1}$  (معکوس  $\alpha$ ) را با  $\alpha^{-k}$  نشان می‌دهیم.

تعریف ۷. برای هر عدد صحیح نامنفی  $k$ ، نگاشت خطی همگن  $D: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  را یک  $\alpha^k$ -مشتق از  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  گوییم، هرگاه  $D \circ \alpha = \alpha \circ D$  و برای هر  $x, y \in \mathcal{L}$  داشته باشیم

$$D([x, y]) = \delta^k [D(x), \alpha^k(y)] + \delta^k (-1)^{|D||x|} [\alpha^k(x), D(y)].$$

برای یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن منظم،  $\alpha^{-k}$ -مشتق را مشابه می‌توان تعریف کرد. مجموعه همه  $\alpha^k$ -مشتقات از یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  را با  $Der_{\alpha^k}(\mathcal{L})$  نشان می‌دهیم.

برای هر عضو همگن  $x \in \mathcal{L}$  که در شرط  $\alpha(x) = x$  صدق کند، تعریف می‌کنیم:

$$D_k(x): \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}; D_k(x)(y) = \delta[x, \alpha^k(y)], \quad \delta^k = 1, \quad \forall y \in \mathcal{L}. \quad (3)$$

بنابر لم ۳.۲ از [۱۵] نگاشت خطی  $D_k(x)$  یک  $\alpha^k$ -مشتق از  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  است، که به  $\alpha^{k+1}$ -مشتق داخلی موسوم است. مجموعه همه  $\alpha^k$ -مشتقات داخلی از یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  را با  $Inn_{\alpha^k}(\mathcal{L})$  نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر

$$Inn_{\alpha^k}(\mathcal{L}) = \{\delta[x, \alpha^{k-1}(\cdot)]: x \in \mathcal{L}, \quad \alpha(x) = x, \quad \delta^k = 1\}.$$

اکنون برای هر  $D \in Der_{\alpha^k}(\mathcal{L})$  و هر  $D' \in Der_{\alpha^s}(\mathcal{L})$  جابه‌جاگر  $[D, D']$  را به صورت متعارف (۴) تعریف

می‌کنیم

$$[D, D'] = D \circ D' - (-1)^{|D||D'|} D' \circ D \quad (4)$$

در این صورت بنا بر لم ۳.۳ از [۱۵] داریم:

$$[D, D'] \in Der_{\alpha^{k+s}}(\mathcal{L}).$$

قرار می‌دهیم:

$$Der(\mathcal{L}) = \bigoplus_{k \geq 0} Der_{\alpha^k}(\mathcal{L}).$$

تذکر ۸. فرض کنید  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \alpha)$  یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی ضربی باشد. قرار می‌دهیم:

$$Der_{\alpha^k}(\mathcal{L}) = (Der_{\alpha^k}(\mathcal{L}))_0 \oplus (Der_{\alpha^k}(\mathcal{L}))_1,$$

مجموعه همه  $\alpha^k$ -مشتقات روی  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \alpha)$  و هم‌چنین

$$Der(\mathcal{L}) = \bigoplus_{k \geq -1} Der_{\alpha^k}(\mathcal{L}).$$

بنا بر لم ۳.۲ از [۳] برای هر  $D \in (Der_{\alpha^k}(\mathcal{L}))_i$  و  $D' \in (Der_{\alpha^k}(\mathcal{L}))_j$  جایی که  $(i, j) \in \mathbb{Z}_2^2$  که  $k + s \geq -1$  در این صورت

$$[D, D'] \in (Der_{\alpha^{k+s}}(\mathcal{L}))_{|D|+|D'|}.$$

به عنوان نتایج مقدماتی، می‌توان این دو گزاره را بیان کرد:

گزاره ۹. فرض کنید  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی باشد. در این صورت دوتایی

$$(Der(\mathcal{L}) = \bigoplus_{k \geq -1} Der_{\alpha^k}(\mathcal{L}), [\cdot, \cdot]),$$

که براکت با رابطه (۴) تعریف می‌شود، یک ابرجبر لی است.

برهان. به گزاره ۲.۵ از مرجع [۳] رجوع شود.

گزاره ۱۰. فرض کنید  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی باشد. در این صورت سه‌تایی

$(Der(\mathcal{L}), [\cdot, \cdot], \tilde{\alpha})$ ، که در آن

$$\tilde{\alpha}: Der(\mathcal{L}) \rightarrow Der(\mathcal{L}); \quad \tilde{\alpha}(D) = \alpha \circ D,$$

یک هوم-ابرجبر لی است.

برهان. به گزاره ۲.۶ از مرجع [۳] رجوع شود.

### ۳. نمایش‌ها و مدول‌ها

در این بخش، ابتدا تعریف یک نمایش از یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی را یادآوری می‌کنیم و سپس مفهوم مدول‌ها روی این دسته از جبرها را بیان می‌کنیم. سرانجام، خلاصه‌ای از نظریه کوهمولوژی این دسته از جبرها را معرفی می‌کنیم. این مطالب را خواننده به‌طور مفصل می‌تواند در مرجع [۱۵] ببیند.

**تعریف ۱۱.** فرض کنید  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی باشد. یک نمایش از  $\mathcal{L}$  روی فضای برداری  $\mathbb{Z}_2$ -مدرج  $\mathcal{V}$  متناظر با نگاشت خطی  $A \in End(\mathcal{V})$ ، عبارت است از یک نگاشت خطی

$$\rho_A: \mathcal{L} \rightarrow End(\mathcal{V})$$

که در این شرایط صدق کند:

$$\rho_A(\alpha(x)) \circ A = A \circ \rho_A(x), \quad \forall x \in \mathcal{L}$$

$$\rho_A([x, y]) \circ A = \rho_A(\alpha(x)) \circ \rho_A(y) - (-1)^{|x||y|} \rho_A(\alpha(y)) \circ \rho_A(x), \quad \forall x, y \in \mathcal{L}$$

**تعریف ۱۲.** فرض کنید  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1$ ، یک فضای برداری  $\mathbb{Z}_2$ -مدرج باشد. فرض کنید  $A \in End(\mathcal{V})$ . در این صورت سه تایی  $(\mathcal{V}, \cdot, A)$  را یک  $\delta$ -هوم-مدول روی  $\mathcal{L}$  گوئیم، هرگاه نگاشت دو خطی

$$\cdot: \mathcal{L} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, \quad \mathcal{L}_i \cdot \mathcal{V}_j \subset \mathcal{V}_{i+j},$$

وجود داشته باشد که در این شرایط صدق کند:

$$\bullet \alpha(x) \cdot A(v) = A(x \cdot v), \quad \forall x \in \mathcal{L}, \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

$$\bullet [x, y] \cdot A(v) = \alpha(x) \cdot (y \cdot v) - \delta(-1)^{|x||y|} \alpha(y) \cdot (x \cdot v), \quad \forall x, y \in \mathcal{L}, \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

**تذکره ۱۳.** فرض کنید  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی باشد و  $\rho_A$  یک نمایش از  $\mathcal{L}$  روی فضای برداری  $\mathbb{Z}_2$ -مدرج  $\mathcal{V}$  متناظر با نگاشت خطی  $A \in End(\mathcal{V})$  باشد. در این صورت نگاشت دو خطی زوج

$$\cdot: \mathcal{L} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, \quad x \cdot v = \rho_A(x)(v), \quad \forall x \in \mathcal{L}, v \in \mathcal{V}.$$

را تعریف می‌کنیم. با محاسبات ساده، می‌توان نشان داد که سه‌تایی  $(\mathcal{V}, \cdot, A)$  یک  $\delta$ -هوم-مدول روی  $\mathcal{L}$  است. برعکس اگر سه‌تایی  $(\mathcal{V}, \cdot, A)$  یک  $\delta$ -هوم-مدول روی  $\mathcal{L}$  باشد، نگاشت خطی  $\rho_A: \mathcal{L} \rightarrow End(\mathcal{V})$  با این ضابطه

$$\rho_A(x)(v) = x \cdot v; \quad \forall x \in \mathcal{L}, v \in \mathcal{V},$$

یک نمایش از  $\mathcal{L}$  روی ابرفضای برداری  $\mathcal{V}$  متناظر با  $A \in End(\mathcal{V})$  است.

**مثال ۱۴.** فرض کنید  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی و  $\mathcal{V} = \mathbb{R}$  در این صورت بدیهی

است که  $End(\mathcal{V}) = \mathbb{R}$  و هر  $A \in End(\mathcal{V})$  دقیقاً یک عدد حقیقی است که با  $r$  نشان می‌دهیم. اکنون نگاشت

خطی  $\rho: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$  را نگاشت صفر (بدیهی) در نظر می‌گیریم. در این صورت  $\rho$  یک نمایش از  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن

ضربی  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  متناظر با هر عدد حقیقی  $r$  است که آن را یک نمایش بدیهی از این جبر می‌نامیم.

فرض کنید  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی باشد. می‌توان  $\mathcal{L}$  را به‌عنوان نمایشی روی

خودش تحت عمل براکت متناظر با خودریختی  $\alpha$  در نظر گرفت. این نمایش که به نمایش الحاقی موسوم است یکتا

نیست چنان‌که در تعریف ۱۵ بیان می‌شود.

**تعریف ۱۵.** برای هر عدد صحیح  $s$ ، نمایش  $\alpha^s -$  الحاقی از  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  که با نماد  $ad_s$  نشان می‌دهیم، عبارت است از:

$$ad_s(x)(y) = \delta[\alpha^s(x), y], \quad \forall x, y \in \mathcal{L}.$$

بنا بر لم ۲.۶ از [۱۵]، نمایش  $\alpha^s -$  الحاقی از  $\mathcal{L}$  خوش‌تعریف است. به عبارت دیگر

$$ad_s(\alpha(x)) \circ \alpha = \alpha \circ ad_s(x).$$

هم‌چنین

$$ad_s([x, y]) \circ \alpha = ad_s(\alpha(x)) \circ ad_s(y) - \delta(-1)^{|x||y|} ad_s(\alpha(y)) \circ ad_s(x), \quad \forall x, y \in \mathcal{L}.$$

سرانجام، به اختصار نظریه کوهمولوژی روی  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی را بیان می‌کنیم:

فرض کنید  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی و سه‌تایی  $(\mathcal{V}, \cdot, A)$  یک  $\delta$ -هوم-مدول روی  $\mathcal{L}$  باشد. فرض کنیم  $x_1, x_2, \dots, x_k$  عضو همگن از  $\mathcal{L}$  باشند، در این صورت درجه یک عضو از  $\mathcal{L}^k$  مانند  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  را با نماد  $|x_1, x_2, \dots, x_k|$  نشان می‌دهیم.

مجموعه همه  $k$ -هم‌زنجیرهای روی  $\mathcal{L}$  با مقادیر در  $\mathcal{V}$  را با نماد  $C^k(\mathcal{L}; \mathcal{V})$  نشان می‌دهیم و بر حسب تعریف، عبارت است از مجموعه همه نگاشت‌های  $k$ -خطی همگن  $f: \mathcal{L}^k \rightarrow \mathcal{V}$  با این خاصیت است:

$$f(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_k) = -\delta(-1)^{|x_i||x_{i+1}|} f(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_k), \quad 1 \leq i \leq k-1.$$

در حالت خاص برای  $k=0$  قرار می‌دهیم  $C^0(\mathcal{L}, \mathcal{V}) = \mathbb{F}$ . یک  $k$ -هوم-هم‌رنجیر روی  $\mathcal{L}$  با مقادیر در  $\mathcal{V}$  یک  $k$ -هم‌زنجیر  $f \in C^k(\mathcal{L}; \mathcal{V})$  است، به طوری که  $f$  با هم‌ریختی  $\alpha$  سازگار باشد، به عبارت دیگر  $f \circ \alpha = A \circ f$ .

مجموعه همه  $k$ -هوم-هم‌زنجیرهای روی  $\mathcal{L}$  با مقادیر در  $\mathcal{V}$  را با نماد  $C_{\alpha, A}^k(\mathcal{L}; \mathcal{V})$  نشان می‌دهیم. پس داریم:

$$C_{\alpha, A}^k(\mathcal{L}; \mathcal{V}) = \{f \in C^k(\mathcal{L}; \mathcal{V}) : f \circ \alpha = A \circ f\}.$$

برای هر عدد صحیح مثبت  $k \geq 1$  نگاشت خطی  $d^k: C_{\alpha, A}^k(\mathcal{L}; \mathcal{V}) \rightarrow C_{\alpha, A}^{k+1}(\mathcal{L}; \mathcal{V})$  با این ضابطه تعریف می‌شود:

$$d^k(f)(x_0, \dots, x_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^{i+|x_i|(|f|+|x_0|+\dots+|x_{i-1}|)} \delta^i \alpha^{k-1}(x_i) \cdot f(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k) + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{j+|x_j|(|x_{i+1}|+\dots+|x_{j-1}|)} f(\alpha(x_0), \dots, \alpha(x_{i-1}), [x_i, x_j], \alpha(x_{i+1}), \dots, \hat{x}_j, \dots, \alpha(x_k)), \quad (5)$$

یک عملگر هم‌مرز است، جایی که  $f \in C_{\alpha, A}^k(\mathcal{L}; \mathcal{V})$ ،  $|f|$  درجه  $f$ ،  $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathcal{L}$ ، و نماد  $\hat{x}_i$  به معنای حذف  $x_i$  است. بنا بر لم ۲.۴ از [۱۵]، نگاشت خطی  $d^k$  خوش‌تعریف است، یعنی  $d^k(f) \circ \alpha = A \circ d^k(f)$ . هم‌چنین بنا بر گزاره ۳.۴ از [۱۵]، زوج  $\{d^k\}_{k>0}$ ،  $C_{\alpha, A}^k(\mathcal{L}; \mathcal{V})$  یک مجتمع کوهمولوژی است. به عبارت دقیق‌تر  $d^k \circ d^{k-1} = 0$ . در این صورت به‌طور معمول مفاهیم هم‌دورها، هم‌مرزها و هم‌چنین فضای کوهمولوژی را می‌توان بدین صورت تعریف کرد:

**تعریف ۱۶.** فرض کنید  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی باشد و سه‌تایی  $(\mathcal{V}, \cdot, A)$  یک  $\delta$ -هوم-مدول روی  $\mathcal{L}$  باشد. متناظر با عملگر هم‌مرز  $d^k: C_{\alpha, A}^k(\mathcal{L}; \mathcal{V}) \rightarrow C_{\alpha, A}^{k+1}(\mathcal{L}; \mathcal{V})$  که با رابطه (۵) تعریف شده است، داریم:

• فضای  $k$ -هوم-هم‌دورها که با نماد  $Z^k(\mathcal{L}; \mathcal{V})$  نشان می‌دهیم، عبارت است از:

$$Z^k(\mathcal{L}; \mathcal{V}) = \ker d^k = \{f \in C^k(\mathcal{L}; \mathcal{V}) : d^k(f) = 0\}$$

• فضای  $k$ -هوم-هم‌مرزها که با نماد  $B^k(\mathcal{L}; \mathcal{V})$  نشان می‌دهیم، عبارت است از:

$$B^k(\mathcal{L}; \mathcal{V}) = \text{Im}d^{k-1} = \{d^{k-1}(f) : f \in C^{k-1}(\mathcal{L}; \mathcal{V})\}$$

• فضای  $k$ -امین کوهمولوژی که با نماد  $H^k(\mathcal{L}; \mathcal{V})$  نشان می‌دهیم، عبارت است از:

$$H^k(\mathcal{L}; \mathcal{V}) = Z^k(\mathcal{L}; \mathcal{V})/B^k(\mathcal{L}; \mathcal{V}).$$

### عملگرهای دیفرانسیل

مفهوم عملگرهای دیفرانسیل روی جبرهای شرکت‌ناپذیر را به راحتی نمی‌توان به عنوان تعمیمی از عملگرهای دیفرانسیل روی جبرهای شرکت‌پذیر در نظر گرفت. ما در این بخش تلاش می‌کنیم تا رده‌ای از عملگرهای دیفرانسیل را روی  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی، متعاقب تعریف عملگرهای دیفرانسیل روی جبرهای لی که در [۱۹] آمده است، تعریف کنیم.

#### ۱. عملگرهای دیفرانسیل روی $\delta$ -هوم-ابرجبرهای لی جردن

فرض کنید  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی باشد. یادآوری می‌کنیم که دو تایی  $(\text{Der}(\mathcal{L}), [\cdot, \cdot])$ ، که براکت با رابطه (۴) تعریف می‌شود، یک ابرجبر لی است (گزاره ۹). مفهوم مشتق در  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی، ما را راهنمایی می‌کند که به تعریف نوعی از عملگرهای دیفرانسیل روی این دسته از جبرها دست یابیم.

**تعریف ۱۷.** برای هر عدد صحیح نامنفی  $k$ ، یک نگاشت خطی همگن  $\varphi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  را یک  $\alpha^k$ -عملگر دیفرانسیل از مرتبه صفر روی  $\mathcal{L}$  گوئیم، هرگاه  $\varphi \circ \alpha = \alpha \circ \varphi$  و به علاوه

$$\varphi([x, y]) = \delta^k[\varphi(x), \alpha^k(y)] = -\delta^k(-1)^{|x||\varphi|}[\alpha^k(x), \varphi(y)], \quad \forall x, y \in \mathcal{L}. \quad (۶)$$

مجموعه همه  $\alpha^k$ -عملگرهای دیفرانسیل از مرتبه صفر روی  $\mathcal{L}$  را با نماد  $\text{Diff}_{\alpha^k}^0(\mathcal{L})$  نشان می‌دهیم. یک عملگر دیفرانسیل از مرتبه صفر روی  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  را می‌توان به عنوان عمل ضرب با تقریب یک اسکالر در نظر گرفت. یعنی

$$\varphi(x) = \lambda x, \quad \forall x \in \mathcal{L}, \lambda \in \mathbb{F},$$

در این صورت داریم  $\text{Diff}_{\alpha^k}^0(\mathcal{L}) = \mathbb{F}$ .

**گزاره ۱۸.** فرض کنیم  $\varphi$  یک  $\alpha^k$ -عملگر دیفرانسیل از مرتبه صفر و  $D$  یک  $\alpha^s$ -مشتق روی  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  باشند. در این صورت  $\varphi \circ D \in \text{Der}_{\alpha^{k+s}}(\mathcal{L})$ . **برهان.** فرض کنیم  $\varphi \in \text{Diff}_{\alpha^k}^0(\mathcal{L})$  و  $D \in \text{Der}_{\alpha^s}(\mathcal{L})$ . بنا بر تعاریف ۱۷ و ۲۵، برای عناصر همگن دلخواه  $x, y \in \mathcal{L}$  داریم

$$\begin{aligned} (\varphi \circ D)([x, y]) &= \varphi(D([x, y])) \\ &= \varphi(\delta^s[D(x), \alpha^s(y)] + \delta^s(-1)^{|D||x|}[\alpha^s(x), D(y)]) \\ &= \delta^{s+k}[\varphi \circ D(x), \alpha^{k+s}(y)] - \delta^{s+k}(-1)^{|x|(|D|+|\varphi|)}[\alpha^{k+s}(x), \varphi \circ D(y)]. \end{aligned} \quad (۷)$$

هم چنین داریم

$$\begin{aligned} (\varphi \circ D) \circ \alpha &= \varphi \circ (D \circ \alpha) \\ &= \varphi \circ (\alpha \circ D) \\ &= (\varphi \circ \alpha) \circ D \\ &= (\alpha \circ \varphi) \circ D \\ &= \alpha \circ (\varphi \circ D) \end{aligned} \quad (۸)$$

سر انجام بنا بر روابط (۷) و (۸)، نتیجه می‌گیریم که  $\varphi \circ D \in \text{Der}_{\alpha^{k+s}}(\mathcal{L})$ .

**قضیه ۱۹.** فرض کنیم  $\varphi$  یک  $\alpha^k -$  عملگر دیفرانسیل از مرتبه صفر و  $D$  یک  $\alpha^s -$  مشتق روی  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  باشند. در این صورت  $[\varphi, D] \in \text{Diff}_{\alpha^{k+s}}^0(\mathcal{L})$ .

**برهان.** فرض کنیم  $\varphi \in \text{Diff}_{\alpha^k}^0(\mathcal{L})$  و  $D \in \text{Der}_{\alpha^s}(\mathcal{L})$ . بدیهی است که  $\varphi \circ D$  یک نگاشت خطی همگن از درجه  $|\varphi| + |D|$  است. اکنون بنا بر تعاریف ۱۷ و ۲۵، برای عناصر همگن دلخواه  $x, y \in \mathcal{L}$  داریم

$$\begin{aligned} (\varphi \circ D)([x, y]) &= \varphi(\delta^s[D(x), \alpha^s(y)] + \delta^s(-1)^{|D||x|}[\alpha^s(x), D(y)]) \\ &= \delta^{k+s}[(\varphi \circ D)(x), \alpha^{k+s}(y)] + \delta^s(-1)^{|D||x|}\varphi([\alpha^s(x), D(y)]). \end{aligned} \quad (۹)$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned} (D \circ \varphi)([x, y]) &= D(\delta^k[\varphi(x), \alpha^k(y)]) \\ &= \delta^{k+s}[(D \circ \varphi)(x), \alpha^{k+s}(y)] + \delta^{k+s}(-1)^{|D|(|x|+|\varphi|)}[(\alpha^s \circ \varphi)(x), (D \circ \alpha^k)(y)] \\ &= \delta^{k+s}[(D \circ \varphi)(x), \alpha^{k+s}(y)] + \delta^{k+s}(-1)^{|D||x|}(-1)^{|D||\varphi|}[(\varphi \circ \alpha^s)(x), (\alpha^k \circ D)(y)] \\ &= \delta^{k+s}[(D \circ \varphi)(x), \alpha^{k+s}(y)] + \delta^s(-1)^{|D||x|}(-1)^{|D||\varphi|}\varphi([\alpha^s(x), D(y)]). \end{aligned} \quad (۱۰)$$

حال بنا بر تعریف براکت در رابطه (۴) داریم:

$$[\varphi, D]([x, y]) = (\varphi \circ D)([x, y]) - (-1)^{|D||\varphi|}(D \circ \varphi)([x, y]). \quad (۱۱)$$

اکنون، با جای گذاری روابط (۹) و (۱۰) در رابطه (۱۱)، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} [\varphi, D]([x, y]) &= \delta^{k+s}[(\varphi \circ D)(x) - (-1)^{|D||\varphi|}(D \circ \varphi)(x), \alpha^{k+s}(y)] \\ &\quad + \delta^s((-1)^{|D||x|} - (-1)^{2|D||\varphi|}(-1)^{|D||x|})\varphi([\alpha^s(x), D(y)]) \\ &= \delta^{k+s}[[\varphi, D](x), \alpha^{k+s}(y)]. \end{aligned} \quad (۱۲)$$

سرانجام بنا بر تعریف ۱۷ از رابطه (۱۲) نتیجه می‌شود که  $[\varphi, D] \in \text{Diff}_{\alpha^{k+s}}^0(\mathcal{L})$ .

با توجه به گزاره ۱۸ و قضیه ۱۹، می‌توان به تعریف عملگرهای دیفرانسیل از مرتبه اول روی یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  دست یافت.

**تعریف ۲۰.** فرض کنید  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی باشد. یک  $\alpha^{k+s} -$  عملگر دیفرانسیل از مرتبه اول روی  $\mathcal{L}$  عبارت است از مجموع یک  $\alpha^k -$  عملگر دیفرانسیل از مرتبه صفر و یک  $\alpha^s -$  مشتق روی  $\mathcal{L}$ .

**تذکر ۲۱.** اگر  $\varphi$  یک  $\alpha^k -$  عملگر دیفرانسیل از مرتبه صفر و  $D$  یک  $\alpha^s -$  مشتق روی  $\mathcal{L}$  باشند آنگاه بنا بر قضیه ۱۹  $[\varphi, D]$  یک نگاشت خطی همگن از درجه  $|\varphi| + |D|$  است و اگر  $\varphi$  و  $D$  غیر جابه‌جایی باشند، بنا بر گزاره ۱۸، نگاشت خطی  $\varphi \circ D - \alpha^{k+s} -$  مشتق روی  $\mathcal{L}$  است. همچنین، بنا بر قضیه ۱۹، نگاشت خطی همگن  $[\varphi, D]$  یک  $\alpha^{k+s} -$  عملگر دیفرانسیل از مرتبه صفر است. اکنون بنا بر [۱۱]، عملگر خطی همگن  $D \circ \varphi$  یک  $\alpha^{k+s} -$  عملگر دیفرانسیل از مرتبه اول است.

سرانجام به تعریف نوعی از عملگرهای دیفرانسیل از مراتب بالاتر روی یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی می‌پردازیم.

**تعریف ۲۲.** فرض کنید  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی باشد. یک عملگر دیفرانسیل از مرتبه  $p > 1$  روی  $\mathcal{L}$  عبارتست از ترکیب  $p$  عملگر دیفرانسیل از مرتبه اول روی  $\mathcal{L}$ .

از تعاریف، گزاره ۱۸ و قضیه ۱۹، دو نتیجه ۲۳ و ۲۴ که خواص عملگرهای دیفرانسیل از مراتب بالاتر را بیان می‌کند، به راحتی به دست می‌آید.

**نتیجه ۲۳.** فرض کنید  $\varphi$  یک  $\alpha^k -$  عملگر دیفرانسیل از مرتبه  $p$  و  $\varphi'$  یک  $\alpha^s -$  عملگر دیفرانسیل از مرتبه  $q$  روی  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  باشند به طوری که  $p, q > 1$ . در این صورت  $\varphi \circ \varphi'$  یک  $\alpha^{k+s} -$  عملگر دیفرانسیل از مرتبه



$p + q$  روی  $\mathcal{L}$  است.

نتیجه ۲۴. فرض کنید  $\varphi$  یک  $\alpha^k$ -عملگر دیفرانسیل از مرتبه  $p$  و  $\varphi'$  یک  $\alpha^s$ -عملگر دیفرانسیل از مرتبه  $q$  روی  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  باشند به طوری که  $p > 0, p \geq q$ . در این صورت  $[\varphi, \varphi']$  یک  $\alpha^{k+s}$ -عملگر دیفرانسیل از مرتبه  $q$  روی  $\mathcal{L}$  است.

## ۲. عملگرهای دیفرانسیل روی مدول‌ها

در این بخش به بررسی عملگرهای دیفرانسیل روی  $\delta$ -هوم-مدول‌ها برای  $\delta$ -هوم-ابرجبرهای لی جردن ضربی می‌پردازیم. برای این منظور فرض کنید  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی و سه‌تایی  $(\mathcal{V}, \cdot, A)$  یک  $\delta$ -هوم-مدول روی  $\mathcal{L}$  باشد.

تعریف ۲۵. برای هر عدد صحیح نامنفی  $k$ ، یک نگاشت خطی همگن  $\varphi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  را یک  $\alpha^k$ -عملگر دیفرانسیل از مرتبه صفر روی  $\mathcal{V}$  گوئیم، هرگاه  $\varphi \circ A = A \circ \varphi$  و به‌علاوه

$$\varphi(x \cdot v) = \delta^k (-1)^{|x||\varphi|} \alpha^k(x) \cdot \varphi(v), \forall x \in \mathcal{L}, v \in \mathcal{V}. \quad (13)$$

مجموعه همه  $\alpha^k$ -عملگرهای دیفرانسیل از مرتبه صفر روی  $\mathcal{V}$  را با نماد  $\text{Diff}_{\alpha^k}^0(\mathcal{V})$  نشان می‌دهیم. یک عملگر دیفرانسیل از مرتبه صفر روی  $\delta$ -هوم-مدول‌ها را می‌توان به‌عنوان عمل ضرب با تقریب یک اسکالر در نظر گرفت. یعنی

$$\varphi(v) = \lambda v, \forall v \in \mathcal{V}, \lambda \in \mathbb{F},$$

در این صورت داریم  $\text{Diff}_{\alpha^k}^0(\mathcal{V}) = \mathbb{F}$ . چنین عملگرهای دیفرانسیل از مرتبه صفر را به‌وضوح می‌توان برای  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$  به‌عنوان یک  $\delta$ -هوم-مدول روی  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  که

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \alpha: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}, \alpha := \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

مشاهده کرد (مثال ۴ را ببینید).

اکنون با الهام از مفهوم یک مدول روی یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی (تعریف ۱۲ را ببینید)، به تعریف نوعی از عملگرهای دیفرانسیل از مرتبه اول روی  $\delta$ -هوم-مدول‌ها می‌رسیم.

تعریف ۲۶. یک  $\alpha^{k+s}$ -عملگر دیفرانسیل از مرتبه اول روی  $\delta$ -هوم-مدول  $\mathcal{V}$  عبارت است از یک نگاشت خطی همگن  $\Delta: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  که  $\Delta \circ A = A \circ \Delta$  و به‌علاوه

$$\Delta(x \cdot v) = D(x) \cdot A(v) + \varphi(x \cdot v), \quad \forall x \in \mathcal{L}, v \in \mathcal{V}, \quad (14)$$

که در آن  $\varphi$  یک  $\alpha^k$ -عملگر دیفرانسیل از مرتبه صفر روی  $\delta$ -هوم-مدول  $\mathcal{V}$  و  $D$  یک  $\alpha^s$ -مشتق روی  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  است. مجموعه همه  $\alpha^{k+s}$ -عملگرهای دیفرانسیل از مرتبه اول روی  $\delta$ -هوم-مدول  $\mathcal{V}$  را با نماد  $\text{Diff}_{\alpha^{k+s}}^1(\mathcal{V})$  نشان می‌دهیم.

گزاره ۲۷. فرض کنید  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی و سه‌تایی  $(\mathcal{V}, \cdot, A)$  یک  $\delta$ -هوم-مدول روی  $\mathcal{L}$  باشد. در این صورت برای هر  $x \in \mathcal{L}$  نگاشت خطی

$$\Delta_x: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}; \quad \Delta_x(v) = \alpha(x) \cdot v, \quad v \in \mathcal{V},$$

یک  $\alpha^1$ -عملگر دیفرانسیل از مرتبه اول روی  $\mathcal{V}$  است.

برهان. فرض کنید سه‌تایی و سه‌تایی  $(\mathcal{V}, \cdot, A)$  یک  $\delta$ -هوم-مدول روی  $\mathcal{L}$  باشد. بنا بر تعریف ۱۲ داریم:

$$\alpha(x) \cdot A(v) = A(x) \cdot v,$$

به‌علاوه

$$[x, y] \cdot A(v) = \alpha(x) \cdot (y \cdot v) - \delta(-1)^{|x||y|} \alpha(y) \cdot (x \cdot v). \quad (15)$$

اکنون از رابطه (۱۵) به‌دست می‌آوریم

$$\alpha(x) \cdot (y \cdot v) = [x, y] \cdot A(v) + \delta(-1)^{|x||y|} \alpha(y) \cdot (x \cdot v). \quad (16)$$

بنا بر تعریف ۱۵ داریم:

$$ad_0(x): \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}; ad_0(x)(y) = \delta[\alpha^0(x), y] = \delta[x, \alpha^0(y)], \quad \forall y \in \mathcal{L}. \quad (17)$$

بنا بر رابطه (۳) داریم  $D_0(x) = ad_0(x)$  که یک  $\alpha^0$ -مشتق (یا  $\alpha^1$ -مشتق داخلی) روی  $(\mathcal{L}, [., .], \delta, \alpha)$  است. هم‌چنین با تعریف نگاشت

$$\varphi_x: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}; \quad \varphi_x(v) = x \cdot v, \quad \forall v \in \mathcal{V},$$

داریم

$$\varphi_x(y \cdot v) = \delta^1(-1)^{|y||\varphi|} \alpha(y) \cdot \varphi_x(v), \quad (18)$$

که بنا بر تعریف ۲۶ نگاشت خطی همگن  $\varphi_x$  یک  $\alpha^1$ -عملگر دیفرانسیل از مرتبه اول روی  $\mathcal{V}$  است. اکنون با به‌کار بردن روابط (۱۷) و (۱۸)، اگر رابطه (۱۶) را بازنویسی کنیم، نتیجه می‌گیریم:

$$\Delta_x(y \cdot v) = D_0(x)(y) \cdot A(v) + \varphi_x(y \cdot v) \Delta_x(v). \quad (19)$$

سرانجام، بنا بر تعریف ۲۶ رابطه (۱۹) نشان می‌دهیم که  $\Delta_x$  یک  $\alpha^{0+1}$ -عملگر دیفرانسیل از مرتبه اول روی  $\delta$ -هوم-مدول  $\mathcal{V}$  است.

**مثال ۲۸.** فرض کنید  $(\mathcal{L}, [., .], \delta, \alpha)$  یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی باشد. در این صورت  $\mathcal{L}$  را به‌عنوان یک  $\delta$ -هوم-مدول روی خودش تحت عمل براکت متناظر با هم‌ریختی  $\alpha$  در نظر می‌گیریم. به‌عبارت دیگر  $\mathcal{L} = \mathcal{V}$  یک  $\delta$ -هوم-مدول الحاقی است. بنا بر گزاره ۲۷، هر  $\alpha^1$ -عملگر دیفرانسیل از مرتبه اول روی  $\mathcal{L}$  یک  $\alpha^1$ -عملگر دیفرانسیل از مرتبه اول روی  $\delta$ -هوم-مدول  $\mathcal{V}$  است.

**تذکر ۲۹.** اگر  $\varphi \in Diff_{\alpha^k}^0(\mathcal{V})$  و  $\Delta \in Diff_{\alpha^s}^1(\mathcal{V})$  در این صورت با محاسبات ساده می‌توان نشان داد  $\varphi \circ \Delta \in Diff_{\alpha^{k+s}}^1(\mathcal{V})$ . اگر چه  $[\varphi, \Delta]$  نمی‌تواند یک عملگر دیفرانسیل از مرتبه صفر روی  $\delta$ -هوم-مدول  $\mathcal{V}$  باشد. هم‌چنین براکت دو عملگر دیفرانسیل از مرتبه اول روی  $\delta$ -هوم-مدول  $\mathcal{V}$  نیز نمی‌تواند یک عملگر دیفرانسیل از مرتبه اول باشد.

**تعریف ۳۰.** فرض کنید  $\mathcal{V}$  یک  $\delta$ -هوم-مدول روی  $\mathcal{L}$  باشد. یک عملگر دیفرانسیل از مرتبه  $p > 1$  روی  $\mathcal{V}$  عبارت است از ترکیب  $p$  عملگر دیفرانسیل از مرتبه اول روی  $\mathcal{V}$ .

با توجه به تذکر ۲۹ نتیجه ۳۱ را می‌توان از تعریف ۳۰ به‌دست آورد.

**نتیجه ۳۱.** فرض کنید  $\Delta \in Diff_{\alpha^k}^p(\mathcal{V})$  و  $\Delta' \in Diff_{\alpha^s}^q(\mathcal{V})$ . در این صورت

$$\Delta \circ \Delta' \in Diff_{\alpha^{k+s}}^{p+q}(\mathcal{V}).$$

### حساب دیفرانسیل

در این بخش، قصد داریم به مفهوم نوعی از حساب دیفرانسیل روی  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی بپردازیم. متعاقب تعریف حساب دیفرانسیل روی جبرهای لی [۱۹] با به‌کاربردن کوهمولوژی روی این دسته از جبرها تلاش می‌کنیم که به تعریف نوعی از حساب دیفرانسیل روی یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی  $(\mathcal{L}, [., .], \delta, \alpha)$  دست یابیم.

۱. حساب دیفرانسیل روی  $\delta$ -هوم-ابرجبرهای لی جردن ضربی

فرض کنید  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی با مرکز  $Z(\mathcal{L})$  باشد. بنا بر گزاره ۲۷ سه‌تایی  $(Der(\mathcal{L}), [\cdot, \cdot], \tilde{\alpha})$ ، که در آن

$$\tilde{\alpha}: Der(\mathcal{L}) \rightarrow Der(\mathcal{L}), \quad \tilde{\alpha}(D) = \alpha \circ D,$$

یک هوم-ابرجبر لی است. اکنون  $\mathcal{L}$  را به‌عنوان یک  $Der(\mathcal{L})$ -مدول با عمل زیر در نظر می‌گیریم

$$\cdot: Der(\mathcal{L}) \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}, \quad D \cdot x = D(x).$$

بنابراین سه‌تایی  $(\mathcal{L}, \cdot, \tilde{\alpha})$  یک هوم-مدول روی  $Der(\mathcal{L})$  متناظر با  $\tilde{\alpha}$  است. بنا بر آنچه که در بخش ۲ بیان شد، مجموعه همه  $k$ -هوم-هم‌زنجیرهای روی  $Der(\mathcal{L})$  با مقادیر در  $\mathcal{L}$  که با نماد  $C_{\tilde{\alpha}}^k(Der(\mathcal{L}), \mathcal{L})$  نشان می‌دهیم، در نظر می‌گیریم. ضابطه عملگر هم‌مرز

$$d^k: C_{\tilde{\alpha}}^k(Der(\mathcal{L}), \mathcal{L}) \rightarrow C_{\tilde{\alpha}}^{k+1}(Der(\mathcal{L}), \mathcal{L}),$$

با رابطه  $(\delta)$  داده شده است. در این صورت زوج  $(\bigoplus_{k \geq 0} C_{\tilde{\alpha}}^k(Der(\mathcal{L}), \mathcal{L}), \{d^k\}_{k > 0})$  یک مجتمع کوهمولوژی است.

اکنون، به تعریف نوعی از حساب دیفرانسیل روی یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  بر پایه مشتقات روی  $\mathcal{L}$  می‌پردازیم.

تعریف ۳۲. فرض کنید  $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot], \delta, \alpha)$  یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی با مرکز  $Z(\mathcal{L})$  باشد. مجتمع  $(C_{\tilde{\alpha}}^k(Der(\mathcal{L}), \mathcal{L}), d^k)$  را به‌عنوان یک  $Der(\mathcal{L})$ -مدول در نظر می‌گیریم. در این صورت یک زیرمجتمع از آن که شامل ریکتارهای  $-Z(\mathcal{L})$  چندخطی باشد، را یک  $\alpha^k$ -حساب دیفرانسیل از  $\mathcal{L}$  بر پایه  $-\alpha^k$  مشتق از  $\mathcal{L}$  می‌نامیم.

در این جا برای محقق‌سازی و بهتر فهمیدن تعریف ۳۲، به مفهوم حساب دیفرانسیل روی یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی جردن ضربی بدون مرکز می‌پردازیم. اگر همه مشتقات  $\mathcal{L}$  مشتقات داخلی باشند، یعنی  $Der(\mathcal{L}) = Inn(\mathcal{L})$  در این صورت، می‌توان  $\mathcal{L}$  را به‌عنوان زیر جبر پایا از  $Der(\mathcal{L})$  در نظر گرفت. توجه می‌کنیم که عمل  $Der(\mathcal{L})$  روی  $\mathcal{L}$  بدین صورت تعریف می‌شود

$$\cdot: Der(\mathcal{L}) \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}; \quad D \cdot x = [D, x].$$

حال مجموعه همه نگاشت‌های  $k$ -چند خطی شبه متقارن

$$f: \wedge^k Der(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{L},$$

یک  $k$ -هوم-هم‌زنجیر با مقادیر در  $\mathcal{L}$  روی  $(Der(\mathcal{L}), [\cdot, \cdot], \tilde{\alpha})$  را با نماد  $C_{\tilde{\alpha}, ad}^k(Der(\mathcal{L}), \mathcal{L})$  نشان می‌دهیم. دقت می‌کنیم که  $C_{\tilde{\alpha}, ad}^k(Der(\mathcal{L}), \mathcal{L})$  به‌عنوان یک  $Der(\mathcal{L})$ -مدول تحت عمل براکت متناظر با هم‌ریختی  $\tilde{\alpha}$  است. در این صورت با قرار دادن  $C_{\tilde{\alpha}, ad}^0(Der(\mathcal{L}), \mathcal{L}) = \mathcal{L}$ ، هوم-هم‌زنجیر (۲۰) را به‌دست می‌آوریم

$$0 \rightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{d^0} C_{\tilde{\alpha}, ad}^1(Der(\mathcal{L}); \mathcal{L}) \xrightarrow{d^1} \dots \xrightarrow{d^{k-1}} C_{\tilde{\alpha}, ad}^k(Der(\mathcal{L}); \mathcal{L}) \xrightarrow{d^k} \dots, \quad (20)$$

جایی که عملگر هوم-هم‌مرز

$$d^k: C_{\tilde{\alpha}, ad}^k(Der(\mathcal{L}); \mathcal{L}) \rightarrow C_{\tilde{\alpha}, ad}^{k+1}(Der(\mathcal{L}); \mathcal{L}),$$

با این ضابطه تعریف می‌شود:

$$d^k f(D_0, \dots, D_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^{i+|D_i|(|f|+|D_0|+\dots+|D_{i-1}|)} \delta^i [\tilde{\alpha}^{k-1}(D_i), f(D_0, \dots, \widehat{D}_i, \dots, D_k)] + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{j+|D_j|(|D_{i+1}|+\dots+|D_{j-1}|)} f(\tilde{\alpha}(D_0), \dots, \tilde{\alpha}(D_{i-1}), [D_i, D_j], \tilde{\alpha}(D_{i+1}), \dots, \widehat{D}_j, \dots, \tilde{\alpha}(D_k)).$$

در حالت خاص داریم

$$d^0 x(D) = (-1)^{|x||D|} [D, x] = D(x), \quad \forall x \in C_{\tilde{\alpha}, ad}^0(Der(\mathcal{L}), \mathcal{L}) = \mathcal{L}. \quad (21)$$

توجه می‌کنیم که،  $D(x) \in Der_{\tilde{\alpha}^k}(\mathcal{L})$ . هم‌چنین داریم

$$d^1 f(D_1, D_2) = (-1)^{|f||D_1|} [D_1, f(D_2)] - (-1)^{|D_2|(|f|+|D_1|)} [D_2, f(D_1)] - f([D_1, D_2]). \quad (22)$$

رابطه (۲۲) نشان می‌دهد که، یک ۱-هوم-هم مرز  $f$  روی  $(Der(\mathcal{L}), [\cdot, \cdot], \tilde{\alpha})$  در رابطه (۲۳) صدق می‌کند

$$f([D_1, D_2]) = (-1)^{|f||D_1|} [D_1, f(D_2)] - (-1)^{|D_2|(|f|+|D_1|)} [D_2, f(D_1)]. \quad (23)$$

به عبارت دقیق‌تر،  $f \in C_{\tilde{\alpha}, ad}^1(Der(\mathcal{L}), \mathcal{L})$  یک- $\tilde{\alpha}^k$ -مشتق از  $\mathcal{L}$  با مقادیر در  $\mathcal{L}$  است. هم‌چنین رابطه (۲۱)

بیان می‌کند که هر ۰-هوم-هم مرز روی  $(Der(\mathcal{L}), [\cdot, \cdot], \tilde{\alpha})$  یک  $\tilde{\alpha}^k$ -مشتق داخلی به صورت  $D(x)$  است.

**مثال:** برای یک ابرجبر لی مفروض  $\mathcal{L}$ ، اغلب در نظر گرفتن یک نگاشت خطی زوج روی  $\mathcal{L}$ ، آن را به یک هوم-ابرجبر لی تبدیل می‌کند. چنین روندی را ساختار هوم-ابرجبر لی گوئیم. به‌ویژه اگر این نگاشت یک هم‌ریختی ابرجبر لی باشد، آنرا ساختار هوم-ابرجبر لی ضربی نامیم. در سال ۲۰۱۳، کایو<sup>۱</sup> و لیو<sup>۲</sup> ثابت کردند که ساختار هوم-ابرجبر لی ضربی، روی خانواده ابرجبر لی ساده با بعد متناهی روی میدان اعداد مختلط، لزوماً یا یک خودریختی بدیهی یا یک خودریختی همانی است [۴]. سپس، در سال ۲۰۱۵ ساختار هوم-ابرجبرهای لی ضربی به‌وسیله یوان<sup>۳</sup> و لیو<sup>۴</sup> [۲۲]، با جزئیات بیشتر روی همه ابرجبرهای لی کلاسیک با بعد متناهی روی میدان اعداد مختلط انجام شد. آنها ثابت کردند که نگاشت‌هایی که چنین ساختار را به‌دست می‌دهند لزوماً مضرب اسکالری از خودریختی همانی است.

در این مثال قصد داریم که حساب دیفرانسیل بر پایه مشتق روی یک  $\delta$ -هوم-ابرجبر لی ضربی را محاسبه کنیم. برای این منظور ابتدا به ساختن هوم-ابرجبر لی  $osp(1,2)$  می‌پردازیم و سپس حساب دیفرانسیل روی آن را شرح می‌دهیم.

فرض کنید  $osp(1,2) = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{V}_1$ ، ابر فضای بردای باشد که  $\mathcal{V}_0$  توسط ماتریس‌های

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

و  $\mathcal{V}_1$  به‌وسیله ماتریس‌های

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

تولید شود. ابتدا برای  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  ضرب براکت ابرجبر لی را روی عناصر پایه بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$[H, X]_\lambda = 2\lambda^2 X, \quad [H, Y]_\lambda = \frac{-2}{\lambda^2} Y, \quad [Y, G]_\lambda = \frac{1}{\lambda} F, \quad [X, F]_\lambda = \lambda G = [H, G]_\lambda$$

1. Cao  
2. Luo  
3. Yuan  
4. Liu

$$[H, F]_\lambda = \frac{-1}{\lambda} F, \quad [G, F]_\lambda = H, \quad [G, X]_\lambda = 0 = [Y, F]_\lambda, \quad [G, G]_\lambda = -2\lambda^2 X,$$

$$[F, F]_\lambda = \frac{2}{\lambda^2} Y.$$

در این صورت زوج  $(osp(1,2), [\cdot, \cdot]_\lambda)$  یک ابرجبر لی بدون مرکز است. بنابراین همه مشتقات روی این ابرجبر لی داخلی هستند و داریم  $Der(osp(1,2)) = osp(1,2)$ . اکنون نگاشت خطی

$$\alpha_\lambda: osp(1,2) \rightarrow osp(1,2)$$

را با ضابطه (۲۶) در نظر می‌گیریم.

$$\alpha_\lambda(x) = \lambda^2 X, \quad \alpha_\lambda(Y) = \frac{1}{\lambda^2} Y, \quad \alpha_\lambda(H) = H, \quad \alpha_\lambda(F) = \frac{1}{\lambda} F, \quad \alpha_\lambda(G) = \lambda G. \quad (۲۶)$$

در این صورت سه‌تایی  $(osp(1,2), [\cdot, \cdot]_\lambda, \alpha_\lambda)$  یک هوم-ابرجبر لی است که اگر  $\lambda \neq 1$  یک ابرجبر لی نمی‌تواند باشد [۳].

اکنون، فرض می‌کنیم  $\mathcal{V} = \mathbb{C}$ . به عبارت دیگر با تعریف نگاشت

$$\rho: osp(1,2) \rightarrow End(\mathcal{V}) = \mathbb{C}$$

یک نمایش بدیهی روی هوم-ابرجبر لی  $osp(1,2)$  متناظر با  $id_{\mathbb{C}}$  داریم. بنابراین سه‌تایی  $(\mathbb{C}, 0, id_{\mathbb{C}})$  یک هوم-

مدول برای  $osp(1,2)$  است. مجموعه همه  $-k$  هم‌زنجر روی  $osp(1,2)$  با مقادیر در  $\mathbb{C}$  را با نماد  $C^k(osp(1,2), \mathbb{C})$

نشان می‌دهیم. پس مجموعه همه  $-k$  هوم-هم‌زنجرهای روی  $osp(1,2)$  با مقادیر مختلط عبارت است از:

$$C_{\alpha_\lambda, id_{\mathbb{C}}}^k(osp(1,2); \mathbb{C}) = \{f \in C^k(osp(1,2), \mathbb{C}) : f \circ \alpha = f\}.$$

قرار می‌دهیم  $C_{\alpha_\lambda, id_{\mathbb{C}}}^0(osp(1,2); \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ . برای هر عدد صحیح مثبت  $k \geq 1$  عملگر هم‌مرز

$$d^k: C_{\alpha_\lambda, id_{\mathbb{C}}}^k(osp(1,2); \mathbb{C}) \rightarrow C_{\alpha_\lambda, id_{\mathbb{C}}}^{k+1}(osp(1,2); \mathbb{C})$$

با ضابطه (۲۷) تعریف می‌شود

$$d^k(f)(x_0, \dots, x_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^{i+|x_i|(|f|+|x_0|+\dots+|x_{i-1}|)} [\alpha_\lambda^{k-1}(x_i), f(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k)]_\lambda$$

$$+ \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{j+|x_j|(|x_{i+1}|+\dots+|x_{j-1}|)} f(\alpha_\lambda(x_0), \dots, \alpha_\lambda(x_{i-1}), [x_i, x_j]_\lambda,$$

$$\alpha_\lambda(x_{i+1}), \dots, \hat{x}_j, \dots, \alpha_\lambda(x_k)). \quad (۲۷)$$

جایی که  $f \in C_{\alpha_\lambda, id_{\mathbb{C}}}^k(osp(1,2); \mathbb{C})$ ،  $|f|$  درجه  $f$ ،  $x_0, x_1, \dots, x_k \in osp(1,2)$  و نماد  $\hat{x}$  به معنای حذف  $x$  است. بنابراین زوج  $(\bigoplus_{k>0} C_{\alpha_\lambda, id_{\mathbb{C}}}^k(osp(1,2); \mathbb{C}), \{d^k\}_{k>0})$  یک مجتمع کوهمولوژی روی هوم-ابرجبر

لی  $(osp(1,2), [\cdot, \cdot]_\lambda, \alpha_\lambda)$  است. به عبارت دیگر

$$d^k \circ d^{k-1}(f) = 0, \quad \forall f \in C_{\alpha_\lambda, id_{\mathbb{C}}}^k(osp(1,2); \mathbb{C}).$$

بنا بر تعریف ۳۲، حساب دیفرانسیل روی هوم-ابرجبر لی  $(osp(1,2), [\cdot, \cdot]_\lambda, \alpha_\lambda)$  عبارت است از زیر هوم-

مجتمع

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{d^0} C_{\alpha_\lambda, id_{\mathbb{C}}}^1(osp(1,2); \mathbb{C}) \xrightarrow{d^1} \dots \xrightarrow{d^4} C_{\alpha_\lambda, id_{\mathbb{C}}}^5(osp(1,2); \mathbb{C}). \quad (۲۸)$$

بنا بر رابطه (۲۱) فضای  $-۰$  هوم-هم‌دورها همان مشتقات داخلی روی هوم-ابرجبر لی  $(osp(1,2), [\cdot, \cdot]_\lambda, \alpha_\lambda)$  است. به عبارت دیگر

$$Z^0(osp(1,2); \mathbb{C}) = InnDer(osp(1,2); \mathbb{C}).$$

هم‌چنین، بنا بر رابطه (۲۳) فضای  $-۱$  هوم-هم‌دورها نیز عبارت است از فضای همه  $-\alpha_\lambda^k$  مشتقات روی هوم-

ابرجبر لی  $(osp(1,2), [\cdot, \cdot]_\lambda, \alpha_\lambda)$ ، به عبارت دیگر

$$Z^1(\mathfrak{osp}(1,2); \mathbb{C}) = \text{Der}(\mathfrak{osp}(1,2); \mathbb{C}) = \mathfrak{osp}(1,2).$$

اکنون فرض کنید  $f \in C^2_{\alpha_\lambda, id_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{osp}(1,2); \mathbb{C})$ . بنابر ضابطه عملگر ۲-هوم هم-مرز اسکالری، به صورت (۲۹) است

$$d^2(f)(D_0, D_1, D_2) = -f([D_1, f(D_2)]_\lambda, \alpha_\lambda(D_2)) + (-1)^{|D_2||D_1|} f([D_0, D_2]_\lambda, \alpha_\lambda(D_1)) + f(\alpha_\lambda(D_0), [D_1, D_2]_\lambda). \quad (29)$$

حال فرض می‌کنیم  $f$  یک ۲-هوم دور از  $(\mathfrak{osp}(1,2), [\cdot, \cdot]_\lambda, \alpha_\lambda)$  باشد. در این صورت داریم:

$$f(\alpha_\lambda(D_0), [D_1, D_2]_\lambda) = f([D_1, D_2]_\lambda, \alpha_\lambda(D_2)) - (-1)^{|D_2||D_1|} f([D_0, D_2]_\lambda, \alpha_\lambda(D_1)) \quad (30)$$

با جای‌گزینی سه‌تایی  $(H, X, F)$  به جای  $(D_0, D_1, D_2)$  در رابطه (۳۰) داریم:

$$f(\alpha_\lambda(H), [X, F]_\lambda) = f([H, X]_\lambda, \alpha_\lambda(F)) + f([H, F]_\lambda, \alpha_\lambda(X)).$$

بنابر تعریف براکت و رابطه (۲۶) داریم:

$$f(H, \lambda G) = f(2\lambda^2 X, \frac{1}{\lambda} F) + f(\frac{-1}{\lambda} F, \lambda^2 X),$$

در نتیجه

$$\lambda f(H, G) = 2\lambda f(X, F) - \lambda f(F, X) = \lambda f(X, F).$$

بنابراین به دست می‌آوریم  $f(H, G) = f(X, F)$ . به‌طور مشابه اگر سه‌تایی‌های زیر را

$$(H, X, Y), (H, X, G), (H, Y, G), (X, Y, F), (X, F, G), (Y, F, G), (H, Y, F), (X, Y, G), (H, F, G), (H, F, F), (H, G, G), (X, G, G),$$

همانند بالا اگر به جای  $(D_0, D_1, D_2)$  در رابطه (۳۰) جای‌گزین کنیم به دست می‌آوریم:

$$f(G, X) = 0 = f(F, Y), \quad f(H, F) = f(G, Y), \quad f(X, Y) = f(G, F), \\ f(G, G) = f(X, H), \quad f(F, F) = f(Y, H).$$

حال اگر نگاشت خطی  $g: \mathfrak{osp}(1,2) \rightarrow \mathbb{C}$  را با این ضابطه تعریف کنیم:

$$g(X) = \frac{1}{2\lambda^2} f(H, X), \quad g(Y) = \frac{-\lambda^2}{2} f(H, Y), \\ g(F) = \frac{1}{\lambda} f(H, G), \quad g(H) = f(X, Y),$$

در این صورت داریم  $g \in C^1(\mathfrak{osp}(1,2); \mathbb{C})$  و هم چنین

$$d^1(g)(D_0, D_1) = (-1)^{|f||D_1|} [D_1, g(D_2)] - (-1)^{|D_2|(|f|+|D_1|)} [D_2, g(D_1)] - g([D_1, D_2]). \quad (31)$$

با جای‌گزینی زوج‌های

$$(H, X), (H, Y), (Y, G), (X, F), (H, G), (H, F), (G, F), (G, X), (Y, F), (G, G), (F, F)$$

به جای زوج  $(D_0, D_1)$  در رابطه (۳۱) با محاسبات ساده نتیجه می‌گیریم  $d^1(g) = f$ . به عبارت دیگر

$$Z^2(\mathfrak{osp}(1,2); \mathbb{C}) = \text{Der}\mathfrak{osp}(1,2) = B^2(\mathfrak{osp}(1,2); \mathbb{C}).$$

به‌طور مشابه می‌توان فضای  $-k$  هوم هم-مرزها و  $-k$  هوم هم-دورها را برای  $k = 3, 4, 5$  نیز محاسبه کرد.

### منابع

1. Ammar F., Ejbehi Z., Makhlouf A., "Cohomology and deformations of hom-algebras", J. Lie Theory, 24 (4) (2011) 813-836.
2. Ammar F., Makhlouf A., "Hom-Lie superalgebras and Hom-Lie admissible superalgebras",

- J. Algebra 324 (7) (2010) 1513-1528.
3. Ammar F., Makhlof A., Saadoui M., "Cohomology of Hom-Lie superalgebras and  $q$ -deformed Witt superalgebra", Czechoslovak Math. J 63 (138) (3) (2013) 721-761.
  4. Cao B., Luo L., "Hom-Lie superalebra structures on finite-dimensional simple Lie superalebras", J. Lie theory, 23 (2013) 1115-1128.
  5. Connes A., "Non-commutative geometry", Academic Press (1994).
  6. Connes A., "Non-commutative diff geometry", publi, I.H.E.S. 62 (1986) 257.
  7. Dubois-Violette M., "Derivations et calcul différentiel non commutatif", C. R. Acad. Sci. Paris, seris I 307 (1988) 403-408.
  8. Dubois-Violette M., "Lectures on graded differential algebras and non-commutative geometry", eds, Y. Maeda and H. Moriyoshi, in Noncommutative Differential-Geometry and its Applications to physics (Klower Academic publishers, 2001).
  9. Gao W., Chen L., "Algebra of quotients of Jordan Lie algebras", Comm. Algebra 44 (9) (2016) 3788-3795.
  10. Hartwing J. T., Larsoon D., Silvestrov S., "Quassi-hom-Lie algebras and central extensions and 2-cocycle-like identities", J. Algebra 288(2) (2005) 321-344.
  11. Larsoson D., Silvestrov S., "Deformations of Lie algebras using  $\sigma$  -derivations", J. Algebra 295 (2006) 314-361
  12. Jin Q., Li X., "Hom-Lie algebra structures on semi-simple Lie algebras", J. Algebra 319 (2008) 1398-1408.
  13. Khalili V., "Defferential calculus on Lie algebras", Ser. Math. Inforum, 31(2) (2015) 299-313.
  14. Khalili V., "Defferential operators and defferential calculus on Hom-Lie algebras", To appear in ADM.
  15. Ma L., Chen L., Zhao J., " $\delta$  -Hom-Jordan Lie superalgebr", Comm. Algebra 46, No. 4 (2017).
  16. Makhlof M., Silvestrov S., "Hom-algebras and Hom-coalgebras structure", J. Algebra. Appl., 9 (4) (2010) 553-589.
  17. Makhlof M., Silvestrov S., "Hom-algebra structure", J. Gen. Lie Theory Appl. 2 (2) (2008) 51-64.
  18. Okubo S., Kamiya N., "Jordan Lie superalgebra and Jordan-Lie triple system", J. Algebra 198 (2) (1997) 388-411.
  19. Sardanashvily G., "Differential operators on Lie and graded Lie algebras", arXiv:1004.0058VI [Math-Ph] Apr 2010.
  20. Sheng Y., "Representations of Hom-Lie algebras", Algebra Represent. Theory 16 (6)

(2012) 1081-1098.

21. Sheng Y., Xiong Z., "On Hom-Lie algebras, Linear and multilinear Algebra", 63, (2015) 2379-2395.
22. Yuau J., Liu W., "Hom-structures on finite-dimensional simple Lie superalgebras", J. Math. Phys., 56 (6) (2015) 061702.