قاعدۀ کوادراتوری باز فازی جهت حل عددی معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی فازی همراه با تقریب خطا

شکراله زیاری[۱]*، سعید عباس‌بندی[۲]
۱. دانشگاه آزاد اسلامی، واحد فیروزکوه، گروه ریاضی
۲. دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی کاربردی

دریافت: ۹۷/۰۳/۲۰ پذیرش: ۹۹/۰۱/۲۴

چکیده

در این مقاله یک روش تکراری بر مبنای قاعدۀ کوادراتوری باز فازی برای حل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم غیرخطی فازی ارائه شده است. همچنین تقریب خطای روش با توجه به شرط لیپشیتس ثابت گردیده است. مثال‌های عددی تشریحی ارائه شده دقت و همگرایی روش را نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: روش تکراری، قاعده کوادراتوری باز فازی، معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم غیرخطی فازی

۱. مقدمه

معادلات انتگرال فازی نقش اساسی در حل مسائل مربوط به کنترل فازی و مدلهای فازی در اقتصاد دارد. مطالعۀ معادلات انتگرال فازی با کارهای کالوا[1]، سیکالا[2] و مردسون[3] و نیومن[4] [۲۶] آغاز شد و سپس توسط محققین دیگر توسعه یافت. بررسی وجود و منحصربفردی جواب و نیز کراندار بودن جواب از موارد بسیار مهم در ارتباط با مطالعه معادلات انتگرال فازی بشمار می رود. اصل نقطه ثابت باناخ[5] ابزار قدرتمندی جهت بررسی وجود و یکتایی جواب معادلات انتگرال فازی است.

بررسی وجود و یکتایی جواب معادلات انتگرال فازی را می توان در مراجع [31،32]، [7،9] پیدا کرد. اما بررسی کراندار بودن جواب معادلات انتگرال فازی ولترا از نوع خطی و غیرخطی توسط نیتو[6] و رودریگز[7] [27] مورد مطالعه قرار گرفت. روش‌های عددی متعددی برای حل معادلات انتگرال فازی ارائه شده که از جمله می‌توان به روش‌های تقریبهای متوالی، روش‌های کوادراتوری نقطۀ میانی، ذوزنقه‌ای و سه نقطه‌ای اشاره کرد. برخی تکنیک‌های قابل توجه دیگر در

* نویسنده مسئول: shok_ziari@yahoo.com

[1] Kaleva
[2] Siekkala
[3] Mordeson
[4] Newman
[5] Banach
[6] Nieto
[7] Rodriguez

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-15]

ساخت روش‌های عددی برای حل معادلات انتگرال فازی عبارتند از: روش نیستروم[1] [1]، روش تجزیهٔ آدومین [2،4] استفاده از درونیابی لاگرانژ [19]، استفاده از چندجمله‌ای‌های برنشتاین [16]، روش تفاضلات تقسیم شده متناهی [29] استفاده از موجک هار [36] و استفاده از توابع بلاک-پالس [۳۹]،

فریدمن و همکاران [2۰] روشی عددی برای حل معادلات انتگرال فردهلم فازی بر اساس روش تقریب‌های متوالی ارائه دادند. همچنین آنها شرایط کافی برای اثبات وجود و یکتایی جواب را برای معادلات انتگرال فردهلم فازی بیان نموده و اثبات همگرایی روش تقریب‌های متوالی بر اساس قاعده کوادراتوری ذوزنقه‌ای را ارائه نمودند، اما هیچ تقریب خطایی برای روش خود مهیا نکردند. در حالی‌که بده و گال[2] [9] ضمن معرفی قواعد کوادراتوری برای محاسبه انتگرال توابع فازی روش نقطه میانی را برای حل معادلات انتگرال فردهلم فازی بکاربرده و تقریب خطایی برای روش خود ارائه نمودند. بیکا[3] [2۰] روش تقریب های متوالی را بر مبنای قاعده کوادراتوری ذوزنقه ای برای معادلات انتگرال فردهلم فازی در حالت غیرخطی به کار برده و با در نظر گرفتن شرط لیپ شیتس[4] تقریب خطا را برای روش مربوطه ارائه کرد. عزتی و زیاری [۱۷]، یک فرآیند تکراری بر مبنای قاعده کوادراتوری ذوزنقه‌ای جهت حل معادلات انتگرال فازی غیرخطی فردهلم نوع دوم را ارائه کرده و همچنین تقریب خطای روش ارائه شده را بر حسب مدول پیوستگی یکنواخت و جزئی ثابت کردند. در این راستا بیکا و پاپسکو [۱۱] همگرایی روش تقریب‌های متوالی را برای حل معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی فازی از نوع همرشتاین ثابت کرده و تقریب خطای روش را نیز به دست آوردند. عزتی و باغمیشه [۵] یک روش تکراری بر اساس توابع بلاک پالس هیبرید و سری تیلور برای حل معادلات انتگرال فازی ارائه دادند. همچنین آنها در [۶] با استفاده از توابع پایه‌ای مثلثی یک روش تکراری جهت حل معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی فازی پیشنهاد نمودند. زیاری و بیکا [۳۷] تقریب خطای روش تکراری بر اساس قاعده کوادراتوری ذوزنقه‌ای جهت حل معادلات انتگرال فازی غیر خطی همرشتاین را بر حسب مدول پیوستگی یکنواخت و جزئی ارائه کرده و مفهوم پایداری عددی جواب را نسبت به انتخاب تکرار اولیه بر حسب مدول پیوستگی توسعه دادند. اخیراً زیاری [۳۸] یک روش تکراری عددی برای حل معادلات انتگرال فازی غیرخطی فردهلم- همرشتاین بر اساس قاعده کوادراتوری سه نقطه‌ای ارائه نموده که نتایج به دست آمده از دقت بالایی برخوردار است.

ساختار مقاله حاضر به صورت زیر تنظیم شده است:

در بخش ۲ برخی از تعاریف و نتایج مرتبط با عدد فازی، توابع عدد فازی مقدار و انتگرال این‌گونه توابع در حالت یک بعدی ارائه می شود. در بخش ۳ قاعدهٔ کوادراتوری باز فازی بیان و تقریب خطای آن برای توابع از نوع لیپ شیتس به دست می‌آید. بخش ۴ به مطالعهٔ معادلهٔ انتگرال فرد هلم غیرخطی فازی و روش ارائه شده برای حل این‌گونه معادلات ارتباط دارد. اثبات همگرایی روش ارائه شده در بخش ۵ مورد بررسی قرار می‌گیرد. مثال‌های عددی جهت نشان دادن همگرایی و دقت روش ارائه شده در بخش ۶ لحاظ شده است. در نهایت، بخش ۷ شامل نتیجه‌گیری است.

[1] Nystrom
[2] Bede and Gal
[3] Bica
[4] Lipschitz

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-15]

۲) پیش زمینه

عدد فازی مفهوم اساسی برای تجزیه و تحلیل فازی و معادلات دیفرانسیل و انتگرال فازی بوده و ابزار بسیار مفیدی در اغلب کاربردهای مجموعه فازی و منطق فازی است.

تعریف ۱) (آناستاسیو[1] [۳]) زیرمجموعه فازی $u: \mathbb{R} \to [0,1]$ از خط حقیقی را در نظر بگیرید. در این‌صورت u عدد فازی است اگر در خواص زیر صدق نماید:

۱) u نرمال است یعنی : $(\exists x_{\cdot} \in \mathbb{R}\,;\, u(x_{\cdot}) = 1)$.

۲) u محدب فازی است یعنی:

$(u(tx + (1-t)y) \geq min\{u(x), u(y)\}, \forall t \in [0,1], x, y \in \mathbb{R})$

۳) u نیم پیوسته بالایی است یعنی: روی $\mathbb{R}$ $(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; |x - x_0| < \delta \Rightarrow u(x) - u(x_0) < \varepsilon)$

۴) u دارای تکیه گاه فشرده است یعنی: $(Cl\{x \in \mathbb{R} | u(x) > 0\})$ فشرده است که $Cl(A)$ نماد بستار مجموعهٔ A است.)

مجموعه تمام اعداد فازی را با نماد $\mathbb{R}_F$ نشان می‌دهند.

برای $0 < r \leq 1$ مجموعه های r-تراز بازه های بسته بصورت $[u]^r = \{x \in \mathbb{R} | u(x) \geq r\}$ و $[u]^r = [\underline{u}(r), \overline{u}(r)]$ هستند. برای هر $\lambda \in \mathbb{R}, u, v \in \mathbb{R}_F$ بر اساس اصل گسترش می‌توان جمع دو عدد فازی و ضرب یک عدد حقیقی در یک فازی را تعریف نمود. جمع دو عدد فازی $u, v \in \mathbb{R}_F$ را با نماد $u \oplus v$ و ضرب عدد حقیقی λ در مجموعه فازی $u \in \mathbb{R}_F$ را با نماد $\lambda \oplus u$ نشان می‌دهند. مجموعه‌های تراز $u \oplus v$ و $\lambda \oplus u$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[u \oplus v]^r = \{x + y | x \in [u]^r, y \in [v]^r\} = [u]^r + [v]^r,$$
$$[\lambda \odot u]^r = \{\lambda x | x \in [u]^r\} = \lambda [u]^r, \forall r \in [0,1]$$

در روابط بالا $[u]^r + [v]^r$ جمع دو بازه و $\lambda[u]^r$ ضرب عدد در بازه می‌باشد که این بازه‌ها زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ می‌باشند، بنابراین حساب فازی توسیع حساب بازه‌ای است.

اکنون فاصلهٔ بین دو عدد فازی را بررسی می‌کنیم:

تعریف ۲) (آناستاسیو[1] [۳]) فرض کنید $u, v \in \mathbb{R}_F$ آن‌گاه فاصلهٔ هاسدورف بین دو عدد فازی u و v را با نماد $D(u, v)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D: \mathbb{R}_F \times \mathbb{R}_F \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$
$$D(u, v) = \sup_{r \in [0,1]} max\{|\underline{u}(r) - \underline{v}(r)|, |\overline{u}(r) - \overline{v}(r)|\}.$$

قضیهٔ ۱) (وو-کونگ[2] [۳۴])

۱) $(\mathbb{R}_F, D)$ یک فضای متریک کامل است.

۲) برای هر $u, v, w \in \mathbb{R}_F$ داریم:

$$D(u \oplus w, v \oplus w) = D(u, v).$$

---

[1] Anastassiou
[2] Wu-Cong

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-15]

۳) برای هر $u,v\in\mathbb{R}_F$ و هر $k\in\mathbb{R}$ داریم:

$$D(k\oplus u,k\oplus v)=|k|D(u,v)$$

۴) برای هر $u,v,w,e\in\mathbb{R}_F$ داریم:

$$D(u\oplus v,w\oplus e)\le D(u,w)+D(v,e)$$

تابع $\|0\|_F:\mathbb{R}_F\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $\|u\|_F=D(u,\tilde{o})$ نرم عدد فازی u است. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که خواص نرم برای اعداد حقیقی در حالت فازی نیز برقرار است..

قضیه ۲) (آناستاسیو[1] [۳]) $\|0\|_F$ دارای خواص زیر است:

۱) $\|u\|_F=0$ اگر و فقط اگر $u=\tilde{o}$ باشد.

۲) $\|\lambda\oplus u\|_F=|\lambda|0\|u\|_F$ برای هر $u\in\mathbb{R}_F,\lambda\in\mathbb{R}$

۳) $\|u+v\|_F\le\|u\|_F+\|v\|_F$ برای هر $u,v\in\mathbb{R}_F$.

۴) $D(u,v)\le\|u\|_F+\|v\|_F,\|u\|_F-\|v\|_F\le D(u,v)$ برای هر $u,v\in\mathbb{R}_F$

۵) برای هر a,b که هم علامت باشند و هر $u\in\mathbb{R}_F$ داریم:

$$D(a\oplus u,b\oplus u)=|b-a|0\|u\|_F.$$

تعریف ۳) (وو-کونگ[1] [۳۴]) تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}_F$ در نقطه $t_0\in[a,b]$ پیوسته است هرگاه:

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\forall t\in[a,b]:|t-t_0|<\delta\Rightarrow D(f(t),f(t_0))<\varepsilon.$$

تذکر۱) فضای تمام توابع فازی پیوسته روی بازه $[a,b]$ را با نماد $C_F[a,b]$ نشان می‌دهند.

از تعریف فاصله‌ی فازی برای پیوستگی تابع نتیجه می‌شود که:

$$\sup_{r\in[0,1]} max\left\{\left|\underline{f}(t,r)-\underline{f}(t_0,r)\right|,\left|\overline{f}(t,r)-\overline{f}(t_0,r)\right|\right\}<\varepsilon.$$

از رابطهٔ فوق برای هر $r\in[0,1]$ نتیجه می‌شود که:

$$\left|\underline{f}(t,r)-\underline{f}(t_0,r)\right|<\varepsilon,\left|\overline{f}(t,r)-\overline{f}(t_0,r)\right|<\varepsilon$$

تعریف ۴) (بده-گال [۹]) تابع فازی $f:[a,b]\to\mathbb{R}_F$ که $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ انتگرال پذیر ریمان روی $[a,b]$ است اگر $I\in\mathbb{R}_F$ وجود داشته باشد با این خاصیت که برای هر $\varepsilon>0$، $\delta>0$ موجود باشد به طوری که برای هر افراز $P:a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ از $[a,b]$ با نرم $\Delta(P)<\delta$ و برای هر نقطه $\xi_i\in\left[x_{i-1},x_i\right]$ به ازای $i=1,2,\ldots,n$، داشته باشیم:

$$D\left(\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\oplus(x_i-x_{i-1}),I\right)<\varepsilon$$

در این صورت می‌نویسیم $I=(\mathrm{FR})\int_a^b f(x)dx$.

[1] Wu-Cong

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-15]

قضیهٔ ۳) (گاتشل- وکسمن [۲۳]) اگر تابع $f:[a,b]\to \mathbb{R}_F$ نسبت به متر D پیوسته باشد و اگر برای هر $x\in[a,b]$ تابع f دارای فرم پارامتری $\left\{\left(\underline{f}(x,r),\overline{f}(x,r)\right)|r\in[0,1]\right\}$ باشد آن‌گاه انتگرال $(FR)\int_a^b f(x)dx$ موجود بوده و متعلق به $\mathbb{R}_F$ است و

$$\left[(FR)\int_a^b f(x)dx\right]^r=\left[\int_a^b \underline{f}(x,r)dx,\int_a^b \overline{f}(x,r)dx\right].$$

قضیهٔ ۴) (گال [۲۲]) انتگرال فازی دارای خواص زیر است:

الف) اگر $f,g:[a,b]\to \mathbb{R}_F$ انتگرال پذیر و $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ آن‌گاه:

$$(FR)\int_a^b(\alpha f(x)\oplus\beta\, g(x))dx=\alpha\,(FR)\int_a^b f(x)dx\oplus\beta(FR)\int_a^b g(x)dx.$$

ب) اگر تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}_F$ انتگرال پذیر باشد و $c\in[a,b]$ در اینصورت داریم:

$$(FR)\int_a^c f(x)dx\oplus(FR)\int_c^b f(x)dx=(FR)\int_a^b f(x)dx.$$

ج) اگر $c\in\mathbb{R}_F$ و $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دارای علامت یکسان روی $[a,b]$ باشد آن‌گاه:

$$(FR)\int_a^b c\odot f(x)dx=c\odot(FR)\int_a^b f(x)dx.$$

قضیهٔ ۵) (گال [۲۲]) اگر $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}_F$ توابع فازی پیوسته باشند آنگاه تابع $F:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ با ضابطهٔ $F(x)=D(f(x),g(x))$ روی $[a,b]$ پیوسته است و

$$D\left((FR)\int_a^b f(x)dx,(FR)\int_a^b g(x)dx\right)\le\int_a^b D(f(x),g(x))dx.$$

۳) فرمول کوادراتوری فازی باز

در اینجا تابع عدد فازی مقدار از نوع لیپ شیتس $\boldsymbol{f}:[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\to\mathbb{R}_{\boldsymbol{F}}$ با با خاصیت زیر را درنظر می‌گیریم که در آن L ثابت مثبتی است:

$$\boldsymbol{D(f(x),f(y))\le L|x-y|,\forall x,y\in[a,b]}$$

به منظور به دست آوردن تقریب خطای فرمول کوادراتوری فازی باز، قاعده کوادراتوری فازی باز را به صورت در نظر می‌گیریم:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-15]

$$(\boldsymbol{FR})\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}\simeq\frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{2}}\odot\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{4}})\oplus\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{4}})\right]$$

در اینصورت لم زیر تقریب خطای فرمول کوادراتوری فازی باز را بیان می کند.

لم ۱) فرض کنید تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}_F$ تابعی L - لیپشیتس باشد آنگاه:

$$\boldsymbol{D}\left((\boldsymbol{FR})\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt},\frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{2}}\odot\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{4}})\oplus\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{4}})\right]\right)\leq\frac{\boldsymbol{L}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^{\boldsymbol{2}}}{\boldsymbol{4}}$$

اثبات:

$$\begin{aligned}
&D\left((FR)\int_a^b f\,(t)dt,\frac{b-a}{2}\odot\left[f(a+\frac{b-a}{4})\oplus f(b-\frac{b-a}{4})\right]\right)=\\
&D\left((FR)\int_a^{\frac{a+b}{2}} f\,(t)dt\oplus(FR)\int_{\frac{a+b}{2}}^b f\,(t)dt,\frac{b-a}{2}\odot\left[f(a+\frac{b-a}{4})\oplus f(b-\frac{b-a}{4})\right]\right)=\\
&D\left((FR)\int_a^{\frac{a+b}{2}} f\,(t)dt\oplus(FR)\int_{\frac{a+b}{2}}^b f\,(t)dt,(FR)\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(\frac{3a+b}{4})\,dt\right.\\
&\qquad\qquad\left.\oplus\,(FR)\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(\frac{a+3b}{4})dt\right)\leq\\
&D\left((FR)\int_a^{\frac{a+b}{2}} f\,(t)dt,(FR)\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(\frac{3a+b}{4})dt\right)\\
&\qquad\qquad+D\left((FR)\int_{\frac{a+b}{2}}^b f\,(t)dt,(FR)\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(\frac{a+3b}{4})dt\right)\leq\\
&\int_a^{\frac{a+b}{2}} D\left(f(t),f(\frac{3a+b}{4})\right)dt+\int_{\frac{a+b}{2}}^b D\left(f(t),f(\frac{a+3b}{4})\right)dt\leq\\
&\int_a^{\frac{a+b}{2}} L\left|t-\frac{3a+b}{4}\right|dt+\int_{\frac{a+b}{2}}^b L\left|t-\frac{a+3b}{4}\right|dt\\
&\qquad\qquad\leq L\left(\frac{b-a}{4}\right)\int_a^{\frac{a+b}{2}} dt+L\left(\frac{b-a}{4}\right)\int_{\frac{a+b}{2}}^b dt=\frac{L(b-a)^2}{4}.
\end{aligned}$$

نتیجهٔ ۱) تقریب خطای قاعدهٔ کوادراتوری فازی باز برای تابع f با در نظر گرفتن افراز یکنواخت بصورت زیر است:

$$D\left((FR)\int_a^b f\,(t)dt,\frac{b-a}{2n}\odot\sum_{i=1}^{n}\left[f(t_{i-1}+\frac{h}{4})\oplus f(t_i-\frac{h}{4})\right]\right)\leq\frac{L(b-a)^2}{4n},$$

که در آن $h=\dfrac{b-a}{n}$ است.

۴) معادلات انتگرال غیر خطی فازی

در این بخش معادله انتگرال فردهلم نوع دوم غیرخطی فازی را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-15]

(۱)

$$F(t) = f(t) \oplus (FR)\int_a^b K(s,t) \odot G(F(s))ds, \quad t \in [a,b],$$

که در معادلهٔ فوق $K(s,t)$ هستهٔ معادله انتگرال، تابعی غیرفازی و دارای علامت یکسان روی مربع $a \le s,t \le b$ می باشد، $F:[a,b] \to \mathbb{R}_F$ و $G: \mathbb{R}_F \to \mathbb{R}_F$ توابعی پیوسته‌اند.

فرض می‌کنیم که K تابعی پیوسته باشد و همچنین فرض می کنیم نسبت به t پیوسته یکنواخت باشد در این صورت $M_K > 0$ وجود دارد به طوری که $M_K = \max_{s,t\in[a,b]} |K(s,t)|$.

همچنین فرض کنید $X = \{f : [a,b] \to R_F \mid f$ پیوسته باشد$\}$ فضای توابع فازی با متر D^* باشد که $D^*(f,g) = \sup_{a\le t\le b} D(f(t),g(t))$ فاصله یکنواخت بین توابع فازی نامیده می‌شود.

در مرجع [۱۷] شرایط کافی برای وجود جواب منحصر بفرد معادله انتگرال (۱) به صورت قضیه زیر بیان شده است.

قضیه ۶) فرض کنید تابع $k(s,t)$ تابعی پیوسته و دارای علامت ثابت برای $a \le s,t \le b$ ، و تابع فازی $f(t)$ تابعی پیوسته از t ، $a \le t \le b$ ، و همچنین فرض کنید $\alpha > 0$ موجود باشد به طوری که:

$$D(G(u)), G(v)) \le \alpha . D(u,v) \quad \forall\, u,v \in \mathbb{R}_F$$

اگر $C = M\alpha(b-a) < 1$ آن‌گاه معادلهٔ انتگرال فازی (۱) دارای جواب منحصر به‌فرد $F^* \in X$ است و همچنین، دنباله تقریب های متوالی ، $(F_m)_{m\ge 1}$ ، در زیر:

(۲)

$$F_o(t) = f(t),$$
$$F_m(t) = f(t) \oplus (FR)\int_a^b k(s,t) \odot G(F_{m-1}(s))ds \quad \forall\, t \in [a,b], \;\; m \ge 1,$$

همگرا به جواب F^* بوده و کران خطای زیر نیز برقرار است:

(۳)

$$D(F^*(t), F_m(t)) \le \frac{C^{m+1}}{\alpha(1-C)} D^*(F_1, F_0) \quad \forall\, t \in [a,b], \;\; m \ge 1.$$

تذکر ۲) اگر $F_0 = f$ باشد تقریب خطای (۳) به صورت زیر ارائه می‌شود:

(۴)

$$D^*(F^*, F_m) \le \frac{C^{m+1}}{\alpha(1-C)} (L\|f\| + M), \;\; m \ge 1,$$

که در آن $M = \sup_{a\le t\le b} \|G(\tilde{0})\|_F$ است

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-15]

اکنون یک روش تکراری بر اساس فرمول کوادراتوری فازی باز جهت حل معادلهٔ (1) بیان می‌کنیم. افراز یکنواخت $\Delta: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ از فاصلهٔ [a,b] را در نظر می‌گیریم که $t_i = a + i\square$ برای $i = 0,1,2,\ldots,n$ نقاط افراز و $\square = \frac{b-a}{n}$ طول گام است.

در این‌صورت فرایند تکراری زیر جواب تقریبی معادلهٔ (1) را در نقطهٔ t_i نتیجه می‌دهد:

$$y_0(t_{i-1} + \frac{\square}{4}) = f(t_{i-1} + \frac{\square}{4}), i = 1,2,\ldots,n,$$
$$y_0(t_i - \frac{\square}{4}) = f(t_i - \frac{\square}{4}), i = 1,2,\ldots,n, \tag{۵}$$

$$y_m(t_i) = f(t_i) \oplus \frac{\square}{2} \odot \sum_{j=0}^{n-1} \Big[K(t_j + \frac{\square}{4}, t_i) \odot G\left(y_{m-1}(t_j + \frac{\square}{4})\right) \oplus,$$
$$k(t_{j+1} - \frac{\square}{4}, t_i) \odot G\left(y_{m-1}(t_{j+1} - \frac{\square}{4})\right)\Big], i = 0,1,\ldots,n.$$

۵) تقریب خطا

در این بخش به منظور بررسی تقریب خطای روش عددی ارائه شده جهت حل معادله انتگرال فازی (1) شرایط زیر را در نظر می گیریم:

A1) تابع $f: [a,b] \to \square_F$ یک تابع فازی پیوسته است،

A2) هسته $K: [a,b] \times [a,b] \to \square$ پیوسته است،

A3) $C = \alpha.M_K(b-a) < 1$ که $M_K \geq 0$ و $M_K = \max_{s,t\in[a,b]} |K(s,t)|$ برای هر $\forall s,t \in [a,b]$،

A4) وجود دارد $\mu > 0$ ب طوری که:

$$D(f(t'), f(t'')) \leq \mu|t' - t''|, \forall t', t'' \in [a,b].$$

A5) وجود دارد $\alpha > 0$ به طوری که:

$$D(G(u), G(v)) \leq \alpha. D(u,v), \forall u, v \in \square_F.$$

A6) وجود دارد $\beta, \delta > 0$ به طوری که:

$$|K(s',t') - K(s'',t'')| \leq \beta|s' - s''| + \delta|t' - t''|, \forall s', s'', t', t'' \in [a,b].$$

ابتدا لم زیر را ثابت می کنیم که در اثبات همگرایی روش ارائه شده مورد استفاده قرار می گیرد.

لم ۲) فرایند تکراری (2) را در نظر بگیرید. تحت شرایط $(A1-A6)$ دنبالهٔ $(F_m)_{m\geq 1}$ در شرط لیپ شیتس صدق می‌کند.

اثبات: با استفاده از شرط A4 داریم $D(f(t'), f(t'')) \leq \mu|t'-t''|$ برای هر $t', t'' \in [a,b]$ و برای $m \geq 1$ داریم:

$$D(F_m(t'), F_m(t'')) \leq D(f(t'), f(t'')) + D\left((FR)\int_a^b k(s,t') \odot G(F_{m-1}(s))ds,\right.$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-15]

$$(FR)\int_a^b k\,(s,t'')\odot G(F_{m-1}(s))ds\Big).$$

با استفاده از خواص فاصلهٔ بین دو عدد فازی رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$D(F_m(t'),F_m(t''))\le \mu|t'-t''|+\int_a^b |K(s,t')-K(s,t'')|\,D(G(F_{m-1}(s)),\tilde{0})ds.$$

با به کارگیری شرط های $A5$ و $A6$ داریم:

(۶)

$$D(F_m(t'),F_m(t''))\le= \mu|t'-t''|+\int_a^b \delta|t'-t''|\,\alpha.\,D(F_{m-1}(s),\tilde{0})ds.$$

اکنون $D(G(F_{m-1}(s)),\tilde{0})$ را با استفاده از خواص تابع نرم در قضیهٔ ۳ به دست می‌آوریم:

$$D(G(F_{m-1}(s)),\tilde{0})\le D(G(F_{m-1}(s)),G(\tilde{0}))+D(G(\tilde{0}),\tilde{0})\le \alpha.\,D(F_{m-1}(s),\tilde{0})+\|G(\tilde{0})\|_F.$$

با توجه به این که $M=\sup_{a\le t\le b}\|G(\tilde{0})\|_F$ با سوپریمم‌گیری برای $a\le s\le b$ از طرفین رابطهٔ فوق داریم:

از طرفی با استفاده از فرآیند تکراری (۲) داریم:

$$D(F_{m-1}(s),\tilde{0})=\|F_{m-1}(s)\|_F\le D(f(s),\tilde{0})+(FR)\int_a^b k\,(s,t)\odot G(F_{m-2}(s))ds.$$

به کمک خواص نرم فازی داریم:

$$\|F_{m-1}(s)\|_F\le \|f(s)\|_F+(FR)\int_a^b |K(s,t)|\big(D(G(F_{m-2}(s)),\tilde{0}\big)ds.$$

با سوپریمم‌گیری از طرفین رابطهٔ فوق برای $a\le s\le b$ و با استفاده از نامساوی (۷) داریم:

$$\|F_{m-1}\|_F\le \|f\|_F+M_K(b-a)(\alpha\|F_{m-2}\|_F+M)=\|f\|_F+C\|F_{m-2}\|_F+\frac{C}{\alpha}M.$$

با جایگذاری متوالی روی نامساوی فوق داریم:

$$\|F_{m-1}\|_F\le \|f\|_F\left(\frac{1-C^m}{1-C}\right)+\frac{CM}{\alpha}\left(\frac{1-C^m}{1-C}\right).$$

با توجه به این که $\frac{1-C^m}{1-C}\le\frac{1}{1-C}$ به ازای هر $m\ge 1$ رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

(۸)

$$\|F_{m-1}\|_F\le \frac{\|f\|_F}{1-C}+\frac{CM}{\alpha(1-C)}=\frac{\alpha\|f\|_F+CM}{\alpha(1-C)}.$$

با جایگذاری رابطهٔ فوق در رابطهٔ (۷) رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$D(G(F_{m-1}(s)),\tilde{0})\le \frac{\alpha\|f\|_F+M}{(1-C)}.$$

نهایتاً با جایگذاری رابطهٔ فوق در رابطهٔ (۶) رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

(۹)

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-15]

$$D(F_m(t'),F_m(t'')) \le \left(\mu+\frac{\delta\alpha C\|f\|_F+CM}{M_K(1-C)}\right)|t'-t''| = L_1|t'-t''|.$$

بنابراین دنباله $(F_m)_{m\ge1}$ در شرط لیپ شیتس با ثابت لیپ شیتس $L_1=\mu+\frac{\delta\alpha C\|f\|_F+CM}{M_K(1-C)}$ صدق می‌کند.

لم ۳) تحت شرایط $(A۱-A٦)$ دنباله توابع $(\varphi_m(s))_{m\ge1}$ که $\varphi_m(s)=K(s,t)\odot G(F_m(s))$ برای مقدار ثابت و دلخواه $t\in[a,b]$ در شرط لیپ شیتس صدق می‌کند.

اثبات: با استفاده از خواص فاصلهٔ فازی داریم:

$$\begin{aligned}
&D\big(\varphi_m(s'),\varphi_m(s'')\big)\\
&\le D\big(K(s',t)\odot G(F_m(s')),K(s',t)\odot G(F_m(s''))\big)\\
&+D\big(K(s',t)\odot G(F_m(s'')),K(s'',t)\odot G(F_m(s''))\big).
\end{aligned}$$

با استفاده دوباره از خواص فاصله فازی داریم:

$$D\big(\varphi_m(s'),\varphi_m(s'')\big)\le |K(s,t')|\alpha.D\big(F_m(s'),F_m(s'')\big)+|K(s',t)-K(s'',t)|\alpha.D(F_m(s''),\tilde{0}).$$

طبق فرض $A6$ و نامساوی‌های (۸) و (۹) داریم:

$$D\big(\varphi_m(s'),\varphi_m(s'')\big)\le L|s'-s''|,\forall s',s''\in[a,b],m\ge1,$$

که در آن $L=(M_K\alpha L_1+\beta\alpha L_2)$ و $L_1=\mu+\frac{\delta\alpha C\|f\|_F+CM}{M_K(1-C)}$ و $L_2=\frac{\alpha\|f\|_F+CM}{\alpha(1-C)}$ است.

قضیهٔ ۷) تحت شرایط $(A1-A6)$ جواب معادلهٔ انتگرال فازی (۱) در هر نقطه $a\le t\le b$ با کران خطای زیر تقریب زده می‌شود:

$$D^*(F,y_m)\le\frac{C^{m+1}}{\alpha(1-C)}(L\|f\|+M_0)+\frac{L(b-a)^2}{4n(1-C)}.$$

اثبات: با توجه به این که $F_1(t)=f(t)\oplus(FR)\int_a^b k(s,t)\odot G(F_0(s))ds$ داریم:

$$\begin{aligned}
&D\big(F_1(t),y_1(t)\big)\le D\big(f(t),f(t)\big)+D\Bigg((FR)\int_a^b K(s,t)\odot G\big(F_0(s)\big)ds,\\
&\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\square}{2}\odot\left[K\left(t_j+\frac{\square}{4},t\right)\odot G\left(y_0\left(t_j+\frac{\square}{4}\right)\right)\oplus K\left(t_{j+1}-\frac{\square}{4},t\right)\odot G\left(y_0\left(t_{j+1}-\frac{\square}{4}\right)\right)\right]\Bigg)
\end{aligned}$$

بنا بر نتیجهٔ ۱ داریم:

(۱۰)

$$D(F_1(t),y_1(t))\le\frac{L(b-a)^2}{4n},\forall t\in[a,b].$$

اکنون، چون $F_2(t)=f(t)\oplus(FR)\int_a^b k(s,t)\odot G(F_1(s))ds$ داریم:

$$\begin{aligned}
&D(F_2(t),y_2(t))\le D(f(t),f(t))+D\Bigg((FR)\int_a^b K(s,t)\odot G(F_1(s))ds,\\
&\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\square}{2}\odot\left[K(t_j+\frac{\square}{4},t)\odot G\left(y_1(t_j+\frac{\square}{4})\right)\oplus K(t_{j+1}-\frac{\square}{4},t)\odot G\left(y_1(t_{j+1}-\frac{\square}{4})\right)\right]\Bigg).
\end{aligned}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-15]

با در نظر گرفتن خواص فاصلهٔ فازی نامساوی زیر به دست می‌آید:

$$D(F_2(t),y_2(t)) \leq D\Bigg((FR)\int_a^b K\,(s,t)\odot G(F_1(s))ds,$$
$$\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\square}{2}\odot\left[K(t_j+\frac{\square}{4},t)\odot G\left(F_1(t_j+\frac{\square}{4})\right)\oplus K(t_{j+1}-\frac{\square}{4},t)\odot G\left(F_1(t_{j+1}-\frac{\square}{4})\right)\right]\Bigg)$$
$$+D\Bigg(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\square}{2}\odot\left[K(t_j+\frac{\square}{4},t)\odot G\left(F_1(t_j+\frac{\square}{4})\right)\oplus K(t_{j+1}-\frac{\square}{4},t)\odot G\left(F_1(t_{j+1}-\frac{\square}{4})\right)\right],$$
$$\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\square}{2}\odot\left[K(t_j+\frac{\square}{4},t)\odot G\left(y_1(t_j+\frac{\square}{4})\right)\oplus K(t_{j+1}-\frac{\square}{4},t)\odot G\left(y_1(t_{j+1}-\frac{\square}{4})\right)\right]\Bigg).$$

با استفاده مجدد از نتیجهٔ ۱، داریم:

$$D(F_2(t),y_2(t)) \leq \frac{L(b-a)^2}{4n}+\frac{\alpha\square M_K}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left[D\left(F_1(t_j+\frac{\square}{4}),y_1(t_j+\frac{\square}{4})\right)+D\left(F_1(t_{j+1}-\frac{\square}{4}),y_1(t_{j+1}-\frac{\square}{4})\right)\right].$$

با در نظر گرفتن نامساوی (۱۰)، داریم:

$$D(F_2(t),y_2(t)) \leq \frac{L(b-a)^2}{4n}+\frac{\alpha\square M_K}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{2L(b-a)^2}{4n}$$
$$=\frac{L(b-a)^2}{4n}+\alpha M_K(b-a)\frac{L(b-a)^2}{4n}.$$

به طور خلاصه داریم:

$$D(F_۲(t),y_۲(t)) \leq (۱+C)\frac{L(b-a)^۲}{٤n}.$$

به استقراء برای هر عدد طبیعی $m \geq ۳$، رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$D(F_m(t),y_m(t)) \leq (۱+C+C^۲+...+C^{m-۱})\frac{L(b-a)^۲}{٤n}=\frac{۱-C^m}{۱-C}.\frac{L(b-a)^۲}{٤n}.$$

چون $\frac{۱-C^m}{۱-C} \leq \frac{۱}{۱-C}$ به ازای هر $m \geq ۱$، داریم:

(۱۱)
$$D(F_m(t),y_m(t)) \leq \frac{L(b-a)^2}{4n(1-C)}.$$

با در نظر گرفتن رابطه $D^*(F,y_m) \leq D^*(F,F_m)+D^*(F_m,y_m)$ و روابط (٤) و (۱۱) کران بالای خطای بین جواب واقعی و جواب تقریبی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$D^*(F,y_m) \leq \frac{C^{m+۱}}{\alpha(۱-C)}(L\|f\|+M_{.})+\frac{L(b-a)^۲}{٤n(۱-C)}.$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-15]

تذکر ۳) با توجه به این که $C<1$ ، نتیجه می‌شود که $\lim_{m\to\infty} C^{m+1}=0$ بنابراین $\lim_{m\to\infty,n\to\infty} D^*(F,y_m)=0$ و این همگرایی روش را تضمین می‌کند.

۶) مثال های عددی

در این بخش جهت نشان دادن دقت و همگرایی روش ارائه شده به بررسی دو مثال می‌پردازیم:

مثال ۱) معادلهٔ انتگرال فردهلم غیرخطی فازی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$F(t)=f(t)\oplus(FR)\int_0^1 K(s,t)\odot(F(s))^2 ds,\qquad t\in[0,1],$$

که در آن هسته معادلهٔ انتگرال ، k و فرم پارامتری تابع معلوم f به صورت زیر می‌باشند:

$$k(s,t)=\frac{ts}{3},\qquad s,t\in[0,1],$$

$$\underline{f}(t,r)=\frac{11}{12}t-\frac{1}{6}(1-r)+\frac{1}{27}t(1-r)-\frac{1}{216}t(1-r)^2,\qquad t,r\in[0,1],$$

$$\bar{f}(t,r)=\frac{11}{12}t+\frac{1}{6}(1-r)-\frac{1}{27}t(1-r)-\frac{1}{216}t(1-r)^2,\qquad t,r\in[0,1],$$

جواب دقیق معادلهٔ انتگرال فازی فوق به صورت زیر است:

$$(\underline{F}(t,r),\bar{F}(t,r))=(t-\frac{1}{6}(1-r),t+\frac{1}{6}(1-r)).$$

جدول زیر میزان خطای بین جواب دقیق و جواب تقریبی را به ازای مقادیر مختلف m و n سطوح مختلف برش r ، نشان می‌دهد.

جدول ۱: دقت روش مقالهٔ [۱۷] بر اساس مجموعه‌های برش برای مثال ۱ در نقطهٔ $t=0/5$

	$n=۱۰,\ m=٦$		$n=۱۰۰,\ m=۱۰$	
r	$\lvert\underline{F}-\underline{y}_m\rvert$	$\lvert\bar{F}-\bar{y}_m\rvert$	$\lvert\underline{F}-\underline{y}_m\rvert$	$\lvert\bar{F}-\bar{y}_m\rvert$
۰	۳/۷۳×۱۰^-٤	٦/۳۷×۱۰^-٤	۳/۷۲×۱۰^-٦	٦/۳۹×۱۰^-٦
۰/۲۵	٤/۰٤×۱۰^-٤	٦/۰۲×۱۰^-٤	٤/۰۳×۱۰^-٦	٦/۰۳×۱۰^-٦
۰/٥۰	٤/۳٥×۱۰^-٤	٥/٦۷×۱۰^-٤	٤/۳٥×۱۰^-٦	٥/٦۸×۱۰^-٦
۰/۷٥	٤/٦۷×۱۰^-٤	٥/۳۳×۱۰^-٤	٤/٦۷×۱۰^-٦	٥/۳٤×۱۰^-٦
۱	٥/۰۰×۱۰^-٤	٥/۰۰×۱۰^-٤	٥/۰۰×۱۰^-٦	٥/۰۰×۱۰^-٦

جدول ۲: دقت روش ارائه شده بر اساس مجموعه های برش برای مثال ۱ در نقطه $t=0/5$

	$n=۱۰,\ m=٦$		$n=۱۰۰,\ m=۱۰$	
r	$\lvert\underline{F}-\underline{y}_m\rvert$	$\lvert\bar{F}-\bar{y}_m\rvert$	$\lvert\underline{F}-\underline{y}_m\rvert$	$\lvert\bar{F}-\bar{y}_m\rvert$
۰	٤/٦٦×۱۰^-٥	۸/٤۱×۱۰^-٥	٤/٦٥×۱۰^-۷	۸/۰۷×۱۰^-۷
۰/۲٥	٥/۰٦×۱۰^-٥	۷/۸۳×۱۰^-٥	٥/۰٤×۱۰^-۷	۷/٥۸×۱۰^-۷
۰/٥۰	٥/٤۷×۱۰^-٥	۷/۲۹×۱۰^-٥	٥/٤٤×۱۰^-۷	۷/۱۳×۱۰^-۷
۰/۷٥	٥/۸۹×۱۰^-٥	٦/۸۰×۱۰^-٥	٥/۸٤×۱۰^-۷	٦/٦۸×۱۰^-۷
۱	٦/۳۳×۱۰^-٥	٦/۳۳×۱۰^-٥	٦/۲٦×۱۰^-۷	٦/۲٦×۱۰^-۷

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-15]

مثال ۲) معادله انتگرال فردهلم خطی فازی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$F(t) = f(t) \oplus (FR)\int_0^{\pi} k\,(s,t) \odot F(s)ds, \qquad t \in [0,\pi],$$

که در آن هسته معادله انتگرال ، k و فرم پارامتری تابع معلوم f به صورت زیر می‌باشند:

$$k(s,t) = 0/2\, sin(s)\, sin(t)\,, \qquad s,t \in [0,\pi],$$

$$\underline{f}(t,r) = \ (r^2+r)\left(sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{4}{15} sin(t)\right)\,, \quad t \in [0,\pi],\ \ r \in [0,1],$$

$$\bar{f}(t,r) = \ \ (4-r-r^3)\left(sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{4}{15} sin(t)\right), \quad t \in [0,\pi],\ \ r \in [0,1],$$

جواب دقیق معادلهٔ انتگرال فازی فوق به صورت زیر است:

$$(\underline{F}(t,r), \bar{F}(t,r)) = \left((r^2+r)\, sin\left(\frac{t}{2}\right), (4-r-r^3)\, sin\left(\frac{t}{2}\right)\right).$$

جدول۳: دقت روش مقالهٔ [۱۷] بر اساس مجموعه‌های برش برای مثال ۲ در نقطهٔ $t = \frac{\pi}{۲}$

	$n=۱۰,\ m=۶$		$n=۱۰۰,\ m=۱۰$	
r	$\lvert \underline{F} - \underline{y}_m \rvert$	$\lvert \bar{F} - \bar{y}_m \rvert$	$\lvert \underline{F} - \underline{y}_m \rvert$	$\lvert \bar{F} - \bar{y}_m \rvert$
۰	۰	۰	۰	۰
۰/۲۵	۸/۳۱×۱۰$^{-۴}$	۹/۹۳×۱۰$^{-۳}$	۸/۲۸×۱۰$^{-۶}$	۹/۸۹×۱۰$^{-۵}$
۰/۵۰	۱/۹۹×۱۰$^{-۳}$	۸/۹۸×۱۰$^{-۳}$	۱/۹۹×۱۰$^{-۵}$	۸/۹۴×۱۰$^{-۵}$
۰/۷۵	۳/۴۹×۱۰$^{-۳}$	۷/۵۲×۱۰$^{-۳}$	۳/۴۸×۱۰$^{-۵}$	۷/۴۹×۱۰$^{-۵}$
۱	۵/۳۲×۱۰$^{-۳}$	۵/۳۲×۱۰$^{-۳}$	۵/۳۰×۱۰$^{-۵}$	۵/۳۰×۱۰$^{-۵}$

جدول ۴ : دقت روش ارائه شده بر اساس مجموعه‌های برش برای مثال ۲ در نقطه $t = \frac{\pi}{۲}$

	$n=۱۰,\ m=۶$		$n=۱۰۰,\ m=۱۰$	
r	$\lvert \underline{F} - \underline{y}_m \rvert$	$\lvert \bar{F} - \bar{y}_m \rvert$	$\lvert \underline{F} - \underline{y}_m \rvert$	$\lvert \bar{F} - \bar{y}_m \rvert$
۰	۰	۰	۰	۰
۰/۲۵	۱/۳۶×۱۰$^{-۵}$	۱/۶۳×۱۰$^{-۴}$	۱/۵۶×۱۰$^{-۷}$	۱/۸۷×۱۰$^{-۶}$
۰/۵۰	۳/۲۶×۱۰$^{-۵}$	۱/۴۹×۱۰$^{-۴}$	۳/۷۶×۱۰$^{-۷}$	۱/۶۹×۱۰$^{-۶}$
۰/۷۵	۵/۷۱×۱۰$^{-۵}$	۱/۲۳×۱۰$^{-۴}$	۶/۵۷×۱۰$^{-۷}$	۱/۴۲×۱۰$^{-۶}$
۱	۸/۷۰×۱۰$^{-۵}$	۸/۷۰×۱۰$^{-۵}$	۱/۰۰×۱۰$^{-۶}$	۱/۰۰×۱۰$^{-۶}$

۷) نتیجه گیری

در این مقاله فرمول کوادراتوری فازی باز برای توابع عدد فازی مقدار ارائه شده است و تقریب خطای آن بر حسب ثابت لیپشیتس بیان شده است. با ترکیب تکنیک تقریب های متوالی و قاعده کوادراتوری فازی باز یک روش عددی تکراری برای حل معادلات انتگرال فازی غیرخطی ارائه شده است. همگرایی روش ارائه شده در قضیه ثابت شده است.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-15]

الگوریتم روش روی دو مثال اجرا شده و نتایج عددی هگرایی روش را برای هر دو نوع معادلات انتگرال فازی خطی و غیر خطی تایید می نماید. مقایسه نتایج عددی بدست آمده با بکار گیری روش ارائه شده در این مقاله روی مثالها با روش ارائه شده در مقاله [۱۷]، نشان می دهد که دقت روش پیشنهادی در این مقاله نسبت به روش ارائه شده در مقاله اشاره شده بالاتر است.

References

1. S. Abbasbandy, E. Babolian, M. Alavi, Numerical method for solving linear Fredholm fuzzy integral equations of the second kind, Chaos Solutions and Fractals 31 (2007) 138-146.

2. S. Abbasbandy, T. Allahviranloo, The Adomian decomposition method applied to the fuzzy system of Fredholm integral equations of the second kind, Internat. J. Uncertain. Fuzziness Knowledge-Based Systems, 14 (1) (2006) 101-110.

3. G.A. Anastassiou, S.G. Gal, On a fuzzy trigonometric approximation theorem of Weirstrass-type, Journal of Fuzzy Mathematics, Vol. 9, No. 3, Los Angeles, (2001) 701-708.

4. E. Babolian, H. Sadeghi Goghary, S. Abbasbandy, Numerical solution of linear Fredholm fuzzy integral equations of the second kind by Adomian method, Appl. Math. Comput. 161 (2006) 733-744.

5. M. Baghmisheh, R. Ezzati, Numerical solution of nonlinear fuzzy Fredholm integral equations of the second kind using hybrid of block-pulse functions and Taylor series, Advances in Difference Equations (2015), 2015:51 DOI 10.1186/s13662-015-0389-7.

6. M. Baghmisheh, R. Ezzati, Error estimation and numerical solution of nonlinear fuzzy Fredholm integral equations of the second kind using triangular functions Journal of Intelligent & Fuzzy Systems 30(2), 639-649 (2016).

7. K. Balachandran, K. Kanagarajan, Existence of solutions of general nonlinear fuzzy Volterra-Fredholm integral equations, J. Appl. Math. Stochastic Anal. 3 (2005) 333-343.

8. K. Balachandran, P. Prakash, Existence of solutions of nonlinear fuzzy Volterra- Fredholm integral equations, Indian J. Pure Appl. Math. 33 (2002) 329-343.

9. B. Bede, S.G. Gal, Quadrature rules for integrals of fuzzy-number-valued functions, Fuzzy Sets and Systems 145 (2004) 359-380.

10. A.M. Bica, Error estimation in the approximation of the solution of nonlinear fuzzy Fredholm integral equations, Information Sciences 178 (2008) 1279-1292.

11. A.M. Bica, C. Popescu, Approximating the solution of nonlinear Hammerstein fuzzy integral equations, Fuzzy Sets and Systems 245 (2014) 1-17.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-15]

12. J.J. Buckley, E. Eslami, T. Feuring, Fuzzy integral equations, in: Fuzzy Mathematics in Economics and Engineering, Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 91, pp. 229-241, Springer Physica-Verlag Heidelberg, 2002.

13. C. Wu, Z. Gong, On Henstock integral of fuzzy-number-valued functions (I), Fuzzy Sets Syst. 120 (2001) 523-532.

14. P. Diamond, Theory and applications of fuzzy Volterra integral equations, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 10 (529) (2002), 97-102.

15. D. Dubois, H. Prade, Towards fuzzy differential caculus, Fuzzy Sets and Systems 8 (1982) 1-7.

16. R. Ezzati, S. Ziari, Numerical solution and error estimation of fuzzy Fredholm integral equation using fuzzy Bernstein polynomials, Aust. J. Basic Appl. Sci. 5 (9) (2011) 2072-2082.

17. R. Ezzati, S. Ziari, Numerical solution of nonlinear fuzzy Fredholm integral equations using iterative method, Appl. Math. Comput. 225 (2013) 33-42.

18. O.S. Fard, M. Sanchooli, Two successive schemes for numerical solution of linear fuzzy Fredholm integral equations of the second kind, Australian J. Basic Applied Sciences 4 (2010) 817-825.

19. M.A. Fariborzi Araghi, N. Parandin, Numerical solution of fuzzy Fredholm integral equations by the Lagrange interpolation based on the extension principle, Soft Computing 15 (2011) 2449-2456.

20. M. Friedman, M. Ma, A. Kandel, Solutions to fuzzy integral equations with arbitrary kernels, International Journal of Approximate Reasoning 20 (1999) 249-262.

21. M. Friedman, M. Ma, A. Kandel, Numerical solutions of fuzzy differential and integral equations, Fuzzy Sets and Systems 106 (1999) 35-48.

22. S.G. Gal, Approximation theory in fuzzy setting, in: G.A. Anastassiou (Ed.), Handbook of Analytic-Computational Methods in Applied Mathematics, Chapman & Hall, CRC Press, Boca Raton, London, New York,Washington DC, 2000 (Chapter 13).

23. R. Goetschel, W. Voxman, Elementary fuzzy calculus, Fuzzy Sets and Systems 18 (1986) 31-43.

24. O. Kaleva, Fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems 24 (1987) 301-317.

25. T. Lotfi, K. Mahdiani, Fuzzy Galerkin method for solving Fredholm integral equations with error analysis, Int. J. Industrial Math. 3 (4) (2011) 237-249.

26. J. Mordeson, W. Newman, Fuzzy integral equations, Inform. Sci. 87 (1995) 215-229.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-15]

27. S. Nanda, On integration of fuzzy mappings, Fuzzy Sets and Systems 32 (1989) 95-101.

28. J.J. Nieto, R. Rodriguez-L‌pez, Bounded solutions for fuzzy differential and integral equations, Chaos Solitons Fractals 27 (2006) 1376–1386.

29. N. Parandin, M.A. Fariborzi Araghi, The numerical solution of linear fuzzy Fredholm integral equations of the second kind by using finite and divided differences methods, Soft Computing 15 (2010) 729-741.

30. J.Y. Park, S.Y. Lee, J.U. Jeong, The approximate solution of fuzzy functional integral equations, Fuzzy Sets and Systems 110 (2000) 79-90.

31. J.Y. Park, J.U. Jeong, On the existence and uniqueness of solutions of fuzzy Volttera-Fredholm integral equations, Fuzzy Sets and Systems 115 (2000) 425-431.

32. J.Y. Park, H.K. Han, Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy Volterra integral equations, Fuzzy Sets Systems 105 (1999) 481-488.

33. H. Sadeghi Goghary, M. Sadeghi Goghary, Two computational methods for solving linear Fredholm fuzzy integral equations of the second kind by Adomian method, Appl. Math. Comput. 161 (2005) 733-744.

34. C.Wu, Z. Gong, On Henstock integral of fuzzy-number-valued functions (I), Fuzzy Sets and Systems 120 (2001) 523-532.

35. H.C. Wu, The fuzzy Riemann integral and its numerical integration, Fuzzy Sets and Systems 110 (2000) 1-25.

36. S. Ziari, R. Ezzati, S. Abbasbandy, Numerical solution of linear fuzzy Fredholm integral equations of the second kind using fuzzy Haar wavelet, Commun. Comput. Inf. Sci. 299 CCIS (Part 3) (2012) 79-89.

37. S. Ziari, A.M. Bica, New error estimate in the iterative numerical method for nonlinear fuzzy Hammerstein-Fredholm integral equations, Fuzzy Sets and Systems 295 (2016) 136-152.

38. S. Ziari, Towards the accuracy of iterative numerical methods for fuzzy Hammerstein–Fredholm integral equations, Fuzzy Sets Systems 375 (2019) 161–178.

39. S. Ziari, I. Perfilieva, S. Abbasbandy, Block-Pulse functions in the method of successive approximations for nonlinear fuzzy Fredholm integral equations, Differential Equations and Dynamical Systems, https://doi.org/10.1007/s12591-019-00482-y.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-07-15]