

## رابطه‌ی الحاقی بین خود-تابعگونی‌های Hom و تانسور رسته (دو-) مدول‌های جبرهای هم-مدولی روی یک جبر شبه-هاپف

سعید باقری

دانشگاه ملایر، دانشکده علوم ریاضی

دریافت ۹۷/۰۳/۲۵ پذیرش ۹۷/۱۱/۰۸

### چکیده

فرض کنید  $H$  یک جبر شبه-هوپف روی حلقه جابه‌جایی  $k$  و  $A$  یک جبر هم-مدولی روی  $H$  باشد. در این مقاله نشان می‌دهیم که گرچه رسته دو-مدول‌ها،  ${}_A\mathbb{M}_A$ ، لزوماً یک رسته تکوارها  $\mathcal{A}$  نیست، با این وجود هم-عمل  $\mathcal{A}$  عمل رسته  ${}_{H}\mathbb{M}_A$  را باعث شده و از این رهگذر نسخه‌های مناسبی از خود-تابعگونی‌های تانسور و  $\text{Hom}$  از رسته  ${}_{A}\mathbb{M}_A$  را معرفی کرده و الحاقی بین این خود-تابعگونی‌ها را توصیف می‌کنیم. هم‌چنین یک‌ها و هم-یک‌های وابسته به آنها را صریحاً محاسبه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: جبر (شبه-) هویف، جبر هم-مدولی، رسته تکوارهای، عمل یک رسته تکوارهای.

### مقدمه

روی حلقه جابه‌جایی  $k$ ، ضرب تانسوری هر دو  $k$ -مدول خود یک  $k$ -مدول بوده است و برای هر سه  $k$ -مدول  $V$ ،  $M$  و  $N$  نگاشت طبیعی

$$a_{V,M,N} : (V \otimes M) \otimes N \rightarrow V \otimes (M \otimes N), \quad (v \otimes m) \otimes n \mapsto v \otimes (m \otimes n),$$

یکریختی  $k$ -مدول‌هاست. بنابراین رسته  $\mathbb{M}_k$  شامل همه  $k$ -مدول‌ها یک رسته تکوارهای است. هم‌چنین از نظریه مقدماتی مدول‌ها می‌دانیم که زوج  $(\text{Hom}_k(V, -), - \otimes_k V)$  از خود-تابعگونی‌های  $\mathbb{M}_k$  یک زوج الحاقی بوده است و یک‌ها و هم-یک‌ها متناظر با آن بدین صورت طبیعی هستند:

$$\eta_M : M \rightarrow \text{Hom}_k(V, V \otimes_k M), \quad m \mapsto [v \mapsto v \otimes m],$$

$$\varepsilon_M : V \otimes \text{Hom}_k(V, M) \rightarrow M, \quad v \otimes f \mapsto f(v).$$

برای دو-جبر  $(H, \mu, \iota, \Delta, \varepsilon)$  روی حلقه جابه‌جایی  $k$ ، بازای هر دو  $H$ -مدول  $M, N \in {}_H\mathbb{M}$  حاصل ضرب تانسوری  $M \otimes_k N$  نیز یک  $H$ -مدول چپ است. عمل حلقه  $H$  روی این ضرب تانسوری برای هر  $h \in H$ ،  $m \in M$  و  $n \in N$  به صورت  $h.(m \otimes n) = \Delta(h).(m \otimes n)$  تعریف می‌شود. از این طریق رسته  ${}_H\mathbb{M}$  شامل همه  $H$ -مدول‌های چپ به یک رسته تکوارهای تبدیل می‌شود.

\*نویسنده مسئول s.bagheri@malayeru.ac.ir

1. Quasi- Hopf algebra
2. Comodule algebra
3. Monoidal category
4. Coaction
5. Endofunctor
6. Unit
7. Counit
8. Bialgebra

شرط شرکت‌پذیری<sup>۱</sup> این رسته تکوارهای مستقیماً از هم-شرکت‌پذیری<sup>۲</sup> هم-ضرب<sup>۳</sup>  $\Delta$  نتیجه می‌شود. در واقع برای  $H$ -مدول‌های چپ  $V, M$  و نگاشت  $k$ -یکریختی طبیعی

$$a - \{V, M, N\} \{ (V \otimes_k M) \otimes_k N \rightarrow V \otimes_k (M \otimes_k N) \}$$

$H$ -خطی نیز هست. با توجه به نمادگذاری منسوب به سویدلر<sup>۴</sup>، این بدان معنا است که برای هر  $v \in V, h \in H$ ،  $m \in M$  و  $n \in N$  داریم:

$$h.((v \otimes m) \otimes n) = (h_1 v \otimes h_2 m) \otimes h_3 n = h_1 v \otimes (h_2 m \otimes h_3 n) = h.(v \otimes (m \otimes n)).$$

برابری میانی مذکور همان خاصیت هم-شرکت‌پذیری هم-ضرب  $\Delta$  است.

علاوه بر این، برای یک دو-جبر  $H$  روی  $k$ ، حلقه درون‌ریختی‌های  $\text{End}_k(H)$  دارای ساختار  $k$ -جبری دومی است که عمل ضرب آن همان ضرب پیچشی<sup>۵</sup> \* است. عضو  $S \in \text{End}_k(H)$  را یک **آنتی‌پود**<sup>۶</sup> می‌نامند، اگر وارون ضربی نگاشت همانی نسبت به عمل ضرب پیچشی \* باشد. یعنی  $\text{id} * S = \tau \circ \varepsilon = S * \text{id}$  دو-جبر  $H$  را یک **جبر هوف** می‌نامند اگر دارای یک آنتی‌پود باشد.

موضوع اصلی این مقاله درباره جبرهای شبه-هوف است که به‌عنوان تعمیمی از جبرهای هوف به‌وسیله وی.جی.درینفلد [۱۰] معرفی شده است. درواقع یک جبر شبه-هوف همه ویژگی‌های یک جبر هوف به جز هم-شرکت‌پذیری هم-ضرب را دارا بوده است و در آن عدم هم-شرکت‌پذیری شبه-دو-جبر  $H$  با یک هم-دو-جبر  $V$   $\phi \in H \otimes H \otimes H$  به گونه‌ای کنترل می‌شود که رسته (دو-) مدول‌ها روی  $H$  هم‌چنان یک رسته تکوارهای باقی بماند. بنابراین در این حالت نگاشت  $a_{V,M,N}$  تعریف شده در بالا دیگر لزوماً  $H$ -خطی نیست و بسیاری از نتایج درباره جبرهای هوف را لزوماً نمی‌توان مستقیماً به وضعیت جدید تعمیم داد. مثلاً در این حالت جبر پیچشی  $(\text{End}_K(H), *)$  لزوماً شرکت‌پذیر نیست. یک راه برای کنترل منطقی این مشکلات آن است که شرط شرکت‌پذیری بدیهی  $a_{V,M,N}$  در رسته  $H$ -مدول‌ها با یک شرط شرکت‌پذیری نابديهی جای‌گزین شود. هم‌چنین در [۱۰] به‌عنوان تعمیم مفهوم آنتی‌پود، مفهوم شبه-آنتی‌پود<sup>۸</sup> معرفی شد. از آن‌جاکه رسته (دو-) مدول‌ها روی یک جبر شبه-هوف یک رسته تکوارهای است، تابعگونی‌های تانسور را می‌توان به‌عنوان خود-تابعگونی‌هایی روی این رسته‌ها در نظر گرفت. در [۴] انواعی از تابعگونی‌های تانسوری  $V \otimes_k -$  و  $- \otimes_k V$  را به‌عنوان خود-تابعگونی‌های رسته‌های  $\text{Ml}_H$  یا  $\text{Ml}_H$  بررسی کرده‌ایم.

جبرهای هم-مدولی چپ و راست روی یک شبه-دو-جبر  $H$ ، به‌عنوان تعمیمی از شبه-دو-جبرها به‌وسیله اف.هاوسر و اف. نیل [۱۱]، معرفی شدند. برخلاف رسته (دو-) مدول‌ها روی یک جبر شبه-هوف  $H$  که تکوارهای دوگانه-بسته<sup>۹</sup> است [۳]، [۵]، [۱۳]، حتی با افزودن برخی شرایط متناهی بودن تکوارهای صلب<sup>۱۰</sup> است [۲]، [۵]، [۲۹]. رسته (دو-) مدول‌ها روی یک جبر هم-مدولی لزوماً تکوارهای نیست. با اینحال هم-عمل  $H$  روی این جبرها امکان وجود یک عمل از یک رسته تکوارهای روی این رسته‌ها را فراهم کرده و از این طریق خود-تابعگونی‌های تانسور روی این رسته‌ها

1. Associativity constraint
2. Coassociativity
3. Comultiplication
4. M.E. Sweedler
5. Convolution product
6. Antipode
7. 3-cocycle
8. Quasi-antipode
9. Biclosed monoidal
10. Rigid monoidal

تعریف می‌شوند. در این مقاله انواعی از تابعگونی‌های تانسوری مانند  $V \otimes_k -$  و  $- \otimes_k V$  را به‌عنوان خود-تابعگونی‌های رسته‌های (دو-) مدول‌های یک جبر هم-مدولی چپ یا راست روی یک جبر شبه-هوپف  $H$  را بررسی می‌کنیم.

در بخش ۲ برخی مفاهیم مقدماتی از نظریه رسته‌ها و درباره جبرهای (شبه-) هویف و نیز برخی نتایج اخیر در خصوص ارتباط بین تابعگونی‌های Hom و تانسور روی رسته (دو-) مدول‌های یک جبر شبه-هویف را بررسی می‌کنیم. نتایج اصلی‌تر این مقاله در بخش ۳ آورده شده‌اند. در این بخش برای یک جبر هم-مدولی چپ یا راست با توصیف عمل یک رسته تکواری خاص روی رسته (دو-) مدول‌های جبر هم-مدولی، تابعگونی‌های تانسور روی این رسته‌ها تعریف نموده و الحاقی راست هر یک از این تابعگونی‌های تانسوری را بر حسب نوع مشخصی از تابعگونی Hom بیان می‌کنیم و یک‌ها و هم-یکه‌های وابسته به هر زوج الحاقی را صریحاً مشخص می‌کنیم.

### مفاهیم مقدماتی‌تر درباره رسته‌ها و جبرهای (شبه-) هویف

در این بخش برخی نتایج و تعاریف مورد نیاز در این مقاله را یادآوری می‌کنیم. برای اطلاعات تکمیلی، در باره نظریه مدول‌ها به [۲] و [۲۱]، در باره جبرهای هویف به [۱]، [۹]، [۱۴]، [۱۶] و [۲۰] و در باره نظریه رسته‌ها به [۶]، [۷]، [۸]، [۱۵]، [۱۷] و [۱۹] مراجعه شود.

در سراسر این مقاله همواره فرض می‌کنیم که  $k$  حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار است و همه (دو-) جبرها و جبرهای هایف روی حلقه زمینه  $k$  تعریف می‌شوند. هم‌چنین همه علائم  $\otimes$  و  $\text{Hom}$  بدون اندیس به ترتیب  $\otimes_k$  و  $\text{Hom}_k$  خواهند بود. بازای هر دو  $k$ -مدول  $M$  و  $N$ ، مجموعه همه هم-ریختی‌ها از  $M$  به  $N$  را با علامت  $\text{Hom}_k(M, N)$  نشان می‌دهیم و قرار می‌دهیم:  $\text{End}_k(M) := \text{Hom}_k(M, M)$ .

۱. زوج الحاقی از تابعگونی‌ها: زوج  $(L, R)$  شامل تابعگونی‌های  $L: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$  و  $R: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$  بین رسته‌های  $\mathbb{A}$  و  $\mathbb{B}$  را یک زوج الحاقی گوئیم هرگاه یک یکرختی طبیعی مانند:

$$\Omega: \text{Mor}_{\mathbb{B}}(L(-), -) \rightarrow \text{Mor}_{\mathbb{A}}(-, R(-)),$$

وجود داشته باشد. به عبارت معادل، تبدیلات طبیعی یکه و هم-یکه

$$\varepsilon: LR \rightarrow \text{id}_{\mathbb{B}}, \quad \eta: \text{id}_{\mathbb{A}} \rightarrow RL,$$

وجود داشته باشند به طوری که در برابری‌های مثلثی زیر صدق کنند

$$\varepsilon L \circ L \eta = 1_L, \quad R \varepsilon \circ \eta R = 1_R$$

۲. رسته‌های تکواری: رسته  $\mathbb{A}$  را یک رسته تکواری می‌نامیم هرگاه یک تابعگونی دو متغیره مانند

$$a: \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A} \quad \text{و یک شیء همانی مانند } E \text{ و یکرختی‌های طبیعی}$$

$$a: (- \otimes -) \otimes - \rightarrow - \otimes (- \otimes -) \quad (\text{شرط شرکت پذیری})$$

$$\rho: - \otimes E \rightarrow \text{id} \quad \text{و} \quad \lambda: E \otimes - \rightarrow \text{id} \quad (\text{یکه‌های چپ و راست})$$

وجود داشته باشند به طوری که برای هر چهار شیء  $X, Y, Z, W$  در رسته  $\mathbb{A}$ :

$$(\text{id}_W \otimes a_{\{X, E, Y\}}) \circ a_{W(X \otimes Y), Z} \circ (a_{\{W, X, Y\}} \otimes \text{id}_Z) = a_{W, X, Y} \otimes Z \circ a_{W \otimes X, Y, Z},$$

$$(\text{id}_X \otimes \lambda_Y) \circ a_{\{X, E, Y\}} = \rho_X \otimes \text{id}_Y.$$

به عبارت دیگر نمودارهای زیر جابه‌جایی باشند:

$$\begin{array}{ccc}
 [(W \otimes X) \otimes Y] \otimes Z & \xrightarrow{a_{W,X,Y} \otimes id_Z} & [W \otimes (X \otimes Y)] \otimes Z \\
 \downarrow a_{W \otimes X, Y, Z} & & \searrow a_{W, (X \otimes Y), Z} \\
 (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{a_{W,X,Y \otimes Z}} & W \otimes [(X \otimes Y) \otimes Z] \\
 & & \swarrow id_W \otimes a_{X,Y,Z} \\
 & & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) \\
 & & \downarrow a_{X,E,Y} \\
 & & (X \otimes E) \otimes Y \xrightarrow{a_{X,E,Y}} X \otimes (E \otimes Y) \\
 & & \swarrow \rho_X \otimes id_Y \quad \downarrow id_X \otimes \lambda_Y \\
 & & X \otimes Y
 \end{array}$$

رسته تکوارهای  $(\mathbb{A}, \otimes, E, a, \lambda, \rho)$  یک رسته تکوارهای دوگانه-بسته نامیده می‌شود، هرگاه برای هر شیء  $X$  در رسته  $\mathbb{A}$  هر دو تابعگون  $\otimes X: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  و  $X \otimes -: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  دارای تابعگون الحاقی راست باشند (برای اطلاعات بیشتر تر به [۱۴] و [۱۵] مراجعه کنید).

در صورتی که بیم ابهام نباشد رسته تکوارهای  $(\mathbb{A}, \otimes, E, a, \lambda, \rho)$  را گاهی با علامت  $(\mathbb{A}, \otimes, E)$  و یا فقط با  $\mathbb{A}$  نشان می‌دهیم.

حال مفهوم عمل یک رسته تکوارهای روی یک رسته دلخواه را تعریف می‌کنیم (برای جزئیات بیشتر تر به [۱۷]، [۱۸] و [۱۹] مراجعه کنید).

۳. عمل یک رسته تکوارهای بر یک رسته دلخواه: فرض کنید  $(\mathbb{A}, \otimes, E, a, \lambda, \rho)$  یک رسته تکوارهای باشد. یک  $\mathbb{A}$ -رسته راست عبارت است از یک چهارتایی مانند  $(D, \diamond, \Psi, r)$  که در آن  $D$  یک رسته،  $\diamond: D \times \mathbb{A} \rightarrow D$  یک تابعگون و

$$r: - \diamond E \rightarrow id \quad \text{و} \quad \Psi: (- \diamond -) \diamond - \rightarrow - \diamond (- \otimes -)$$

یکریختی‌های طبیعی به‌گونه‌ای باشند که بازای هر شیء  $M \in D$  و اشیاء  $X, Y, Z \in \mathbb{A}$  داشته باشیم:

$$(id_M \diamond a_{X,Y,Z}) \circ \Psi_{M, X \otimes Y, Z} \circ (\Psi_{M, X, Y} \diamond id) = \Psi_{M, X, Y \otimes Z} \circ \Psi_{M \diamond X, Y, Z}, \quad (1)$$

$$(id_M \diamond \lambda_X) \circ \Psi_{M, E, X} = r_M \diamond id \quad (2)$$

برقراری برابری‌های فوق با جابه‌جایی بودن این نمودارهای هم‌ارزند:

$$\begin{array}{ccc}
 [(M \diamond X) \otimes Y] \diamond Z & \xrightarrow{\Psi_{M \diamond X, Y, Z}} & (M \diamond X) \diamond (Y \otimes Z) \\
 \downarrow \Psi_{M, X, Y} \diamond id & & \searrow \Psi_{M, X, Y \otimes Z} \\
 [M \diamond (X \otimes Y)] \diamond Z & \xrightarrow{\Psi_{M, (X \otimes Y), Z}} & M \diamond [(X \otimes Y) \otimes Z] \\
 & & \swarrow id \diamond a_{X, Y, Z} \\
 & & M \diamond [X \otimes (Y \otimes Z)] \\
 & & \downarrow id \diamond \lambda_X \\
 & & (M \diamond E) \diamond X \xrightarrow{\Psi_{M, E, X}} M \diamond (E \otimes X) \\
 & & \swarrow r_M \diamond id \quad \downarrow id \diamond \lambda_X \\
 & & M \diamond X \xrightarrow{id_{M \diamond X}} M \diamond X
 \end{array}$$

برای هر  $\mathbb{A}$ -رسته راست  $(D, \diamond, \Psi, r)$  و هر شیء  $X \in \mathbb{A}$  یک خود-تابعگون مانند  $\diamond X: D \rightarrow D$ ،  $M \mapsto M \diamond X$  به دست می‌آید.

به‌طور مشابه یک  $\mathbb{A}$ -رسته  $(D, \diamond', \Psi', I)$  شامل یک رسته مانند  $D$ ، یک تابعگون دو متغیره  $\diamond'$   $\mathbb{A} \times D \rightarrow D$  به‌همراه یکرختی‌های طبیعی

$$I: E \diamond' \rightarrow \text{id} \quad \text{و} \quad \Psi': (- \otimes -) \diamond' \rightarrow - \diamond' (-)$$

است به‌گونه‌ای که برای هر شیء  $M$  در  $D$  و اشیاء  $X, Y, Z$  در  $\mathbb{A}$  داشته باشیم:

$$\Psi' X, Y, (Z \diamond' M) \circ \Psi' (X \otimes Y), Z, M = (\text{id}_X \diamond' \Psi' Y, Z, M) \circ \Psi' X, (Y \otimes Z), M \circ (a_{X, Y, Z} \diamond' \text{id}_M)$$

$$(\text{id}_X \diamond' M) \circ (\rho_X \diamond' \text{id}) = (\text{id} \diamond' I_M) \circ \Psi' X, E, M.$$

برای هر  $\mathbb{A}$ -رسته  $(D, \diamond', \Psi', I)$  و هر شیء  $X \in \mathbb{A}$  به‌راحتی می‌توان خود-تابعگون

$$X \diamond' -: D \rightarrow D, \quad M \mapsto X \diamond' M$$

را به‌دست آورد.

۴. شبه دو-جبرها: چهارتایی  $(H, \Delta, \varepsilon, \phi)$  را یک شبه دو-جبر می‌نامیم اگر  $H$  یک  $k$ -جبر شرکت‌پذیر و یک‌دار و  $\phi$  یک عضو وارون‌پذیر در  $H \otimes H \otimes H$ ، به‌گونه‌ای باشد که هم-ضرب  $\Delta: H \rightarrow H \otimes H$  و هم-یکه  $\varepsilon: H \rightarrow k$  هم‌ریختی جبرها بوده است و برای هر عضو  $h \in H$  داشته باشیم:

$$(\text{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta(h) = h \otimes 1, \quad (\varepsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta(h) = 1 \otimes h, \quad (۳)$$

$$(\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta(h) = \phi. (\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta(h). \phi^{-1}, \quad (۴)$$

$$(\text{id} \otimes \text{id} \otimes \Delta)(\phi)(\Delta \otimes \text{id})(\phi) = (1 \otimes \phi)(\text{id} \otimes \Delta \otimes \text{id})(\phi)(\phi \otimes 1), \quad (۵)$$

$$(\text{id} \otimes \varepsilon \otimes \text{id})(\phi) = 1 \otimes 1. \quad (۶)$$

عضو  $\phi$  را شرکت‌پذیر ساز درینفلد<sup>۱</sup> می‌نامیم. برابری (۳) همان شرط هم-یکه برای جبرهای هوفی است. تساوی (۴) در واقع تعمیمی از شرط هم-شرکت‌پذیری  $H$  است که به‌کمک مزدوج‌گیری با عضو  $\phi \in H \otimes H \otimes H$  بیان شده است. هم‌چنین برابری (۵) در واقع شرط ۳-هم دور روی  $\phi$  است.

مؤلفه‌های تانسوری  $\phi$  را با حروف بزرگ و مؤلفه‌های تانسوری  $\phi^{-1}$  را با حروف کوچک نشان می‌دهیم:

$$\phi = \sum X^1 \otimes X^2 \otimes X^3 \quad \text{و} \quad \phi^{-1} = \sum x^1 \otimes x^2 \otimes x^3$$

چنان‌که از نظریه جبرهای هوفی می‌دانیم رسته (هم-) مدول‌ها روی یک دو-جبر یک رسته تکواره‌ای است. شرط شرکت‌پذیری در این رسته مشابه حالت کلاسیک تعریف می‌شود. برای رسته مدول‌ها روی یک شبه-دو-جبر نیز با کمی تفاوت خاصیت مشابهی وجود دارد:

برای هر شبه-دو جبر  $(H, \Delta, \varepsilon, \phi)$  رسته‌های  $M_{H \otimes H} M$  و  $M_{H \otimes H} M$  به‌همراه ضرب تانسوری  $k \otimes -$  رسته‌های تکواره‌ای هستند. با این وجود شرط شرکت‌پذیری برای  $H$ -مدول‌های  $M, N, L \in M_H M$  بدین صورت است:

$$a_{M, N, L}: (M \otimes_k N) \otimes_k L \rightarrow M \otimes_k (N \otimes_k L),$$

$$a_{M, N, L}((m \otimes n) \otimes \iota) = \phi.(m \otimes (n \otimes \iota)).$$

در رسته  $M_H M$  شرط شرکت‌پذیری برای مدول‌های راست  $M, N, L \in M_H M$  عبارت است از:

$$a'_{M, N, L}: (M \otimes_k N) \otimes_k L \rightarrow M \otimes_k (N \otimes_k L),$$

$$a'_{M, N, L}((m \otimes n) \otimes \iota) = (m \otimes (n \otimes \iota)). \phi^{-1},$$

با ترکیب دو شرط شرکت پذیری در رسته های  $H$ -مدول های چپ و راست شرط شرکت پذیری برای  $(H, H)$ -دو-مدول ها به صورت زیر بدست می آید:

$$a''_{M,N,L} : (M \otimes_k N) \otimes_k L \rightarrow M \otimes_k (N \otimes_k L),$$

$$a''_{M,N,L}((m \otimes n) \otimes l) = \phi.(m \otimes (n \otimes l)).\phi^{-1}$$

۵. جبرهای شبه هوفف [۱۰] و [۱۴]: یک شبه-آنتی پود  $(S, \alpha, \beta)$  برای یک شبه-دو-جبر  $H$  یک پاد-درون ریختی مانند  $S: H \rightarrow H$  و اعضای  $\alpha, \beta \in H$  را شامل می شود به گونه ای که برای هر عضو دلخواه  $h \in H$  در این برابری ها صدق کنند:

$$(\gamma) \quad \sum_h h_1 \beta S(h_2) = \varepsilon(h) \beta, \quad \sum_h S(h_1) \alpha h_2 = \varepsilon(h) \alpha,$$

$$\sum X^1 \beta S(X^2) \alpha X_3 = 1, \quad (\delta) \quad \sum S(X^1) \alpha X^2 \beta X^3 = 1,$$

یک جبر شبه-هوفف عبارت است از یک شبه-دو-جبر  $H$  به همراه یک شبه-آنتی پود  $(S, \alpha, \beta)$  از تعریف شبه-آنتی پود و ویژگی های هم-یکه  $\varepsilon$  به سادگی می توان نتیجه گرفت:

$$\varepsilon(\alpha) \varepsilon(\beta) = 1, \quad \varepsilon \circ S = \varepsilon.$$

هنگامی که بخواهیم بر همه مشخصات یک جبر شبه-هوفف مانند  $H$  تاکید کنیم آن را به صورت  $(H, \Delta, \varepsilon, \phi, S, \alpha, \beta)$  نشان می دهیم.

برای هر جبر هوفف مانند  $H$ ، آنتی پود  $S$  یک پاد-درون ریختی هم-جبرهاست، یعنی

$$(S \otimes S) \circ \Delta^{\text{cop}} = \Delta \circ S.$$

که در آن برای هر  $h \in H$   $\Delta(h) = \sum_h h_1 \otimes h_2$  همان نمادگذاری سویدلر است و  $\Delta^{\text{cop}}(h) = \sum_h h_2 \otimes h_1$ .

$$h_2 \otimes (h) = h_1, \quad \Delta^{\text{cop}}(h) = \sum_h h_2 \otimes h_1.$$

هم چنین در این حالت ارتباط بین آنتی پود و هم-ضرب  $\Delta$  برای هر  $h \in H$  از برابری (۹) پیروی می کند:

$$\sum_h h_1 \otimes h_2 S(h_3) = h \otimes 1, \quad (9)$$

(برای مثال می توان [۲۰، صفحه ۷۹] را مشاهده کرد).

اگر  $(H, \Delta, \varepsilon, \phi, S, \alpha, \beta)$  یک جبر شبه-هوفف باشد، هم-ضرب  $\Delta$  هم-شرکت پذیر نیست و  $(H, \Delta, \varepsilon)$  دارای ساختار هم-جبر نیست. با این حال برابری هایی شبیه برابری (۹) را می توان برای جبرهای شبه-هوفف نیز اثبات کرد. برای این کار اف. هاوسر و اف. نیل در [۱۱] اعضای زیر از  $H \otimes H$  را تعریف کردند.

$$p_L = \sum p_L^1 \otimes p_L^2 = \sum X^2 S^{-1}(X^1 \beta) \otimes X^3, \quad (10)$$

$$q_L = \sum q_L^1 \otimes q_L^2 = \sum S(X^1) \alpha X^2 \otimes X^3, \quad (11)$$

$$p_R = \sum p_R^1 \otimes p_R^2 = \sum X^1 \otimes X^2 \beta S(X^3), \quad (12)$$

$$q_R = \sum q_R^1 \otimes q_R^2 = \sum X^1 \otimes S^{-1}(\alpha X^3) X^2, \quad (13)$$

آنها با به کار بردن این اعضا و ویژگی های شبه-آنتی پود در [۱۱] شکل های تعمیم یافته ای از برابری (۹) برای جبرهای شبه-هوفف را ارائه کردند [۴].

در [۹]، [۱۵] نشان داده شده است که رابطه‌ای مشابه رابطه الحاقی کلاسیک بین تابعگونی‌های Hom و تانسور در رسته  $H \mathbb{M}$  را نیز می‌توان برای رسته تکوارهای  $H \mathbb{M}$  شامل همه مدول‌های چپ روی جبر هوف  $H$  نیز بیان کرد. یک‌ها و هم-یکه‌های این الحاقی‌ها به‌طور صوری همان یک‌ها و هم-یکه‌ها در حالت کلاسیک هستند. در [۴] تعمیمی از این روابط الحاقی برای رسته مدول‌ها روی یک جبر شبه-هوف ارائه شده است. در این حالت تعمیم یافته اخیر، به دلیل نبود هم-شرکت‌پذیری هم-ضرب، یک‌ها و هم-یکه‌ها با حالت کلاسیک تفاوت داشته و به ناوردهای جبر شبه-هوف  $H$  وابسته هستند.

چنان‌که در ۴ ذکر شد، رسته دو-مدول‌های  $H \mathbb{M} H$  روی یک شبه-دو جبر  $(H, \Delta, \varepsilon, \emptyset)$  یک رسته تکوارهای بوده است و برای هر  $M, N \in H \mathbb{M} H$  داریم  $M \otimes_k N \in H \mathbb{M} H$  که ساختار دو-مدولی حاصل ضرب تانسوری به‌طور قطری از طریق هم-ضرب  $\Delta$  تعریف می‌شود.

به‌علاوه اگر  $H$  یک جبر شبه-هوف با شبه-آنتی پود  $(S, \alpha, \beta)$  باشد، آن‌گاه برای هر دو شیء  $M, N \in H \mathbb{M} H$  یک ساختار  $(H, H)$ -دو مدولی روی  $Hom_k(M, N)$  داریم که به‌صورت (۱۴) تعریف می‌شود:

$$(h.f.h')(m) = \sum h_1 \left[ f \left( S(h_2).m.S^{-1}(h_2') \right) \right].h_1' \quad (14)$$

با پیروی از نمادگذاری [۳، ۴، ۱۰]،  $Hom_k(M, N)$  با این ساختار دو-مدولی را با علامت  ${}^s Hom_k^t(M, N)$  نشان می‌دهیم. بدین ترتیب رابطه الحاقی زیر بین تابعگونی‌های Hom و تانسور به‌دست می‌آید:

**قضیه ۶.** [۳، ۴، ۱۱]. فرض کنید  $H$  یک جبر شبه-هوف با شبه-آنتی پود  $(S, \alpha, \beta)$  باشد و  $M, N, V \in H \mathbb{M} H$  در این صورت یک یک‌ریختی طبیعی مانند

$$\varphi: {}_H Hom_H(M \otimes_k^b V, N) \rightarrow {}_H Hom_H(M, {}^s Hom_k^t(V, N)),$$

$$f \mapsto \{m \mapsto [v \mapsto f(p_R.(m \otimes v).q_R)]\},$$

وجود دارد. وارون این یک‌ریختی نگاشت  $\varphi'$  با این ضابطه است:

$$g \mapsto \{m \otimes v \mapsto \sum q_R^1 \left[ g(m) \left( S(q_R^2).v.S^{-1}(p_R^2) \right) \right].p_R^1\}$$

که در آن  $q_R = \sum q_R^1 \otimes q_R^2$  و  $p_R = \sum p_R^1 \otimes p_R^2$  در (۱۲) و (۱۳) تعریف شده‌اند. این بدان معناست که زوج زیر از تابعگونی‌ها

$$- \otimes_k^b V: {}_H \mathbb{M}_H \rightarrow {}_H \mathbb{M}_H, \quad {}^s Hom_k^t(V, -): {}_H \mathbb{M}_H \rightarrow {}_H \mathbb{M}_H,$$

یک زوج الحاقی تشکیل داده و یک‌ها و هم-یکه این زوج الحاقی در رسته  $H \mathbb{M}_H$  بدین صورت داده می‌شوند:

$$\eta_M: M \rightarrow {}^s Hom_k^t(V, M \otimes_k V), \quad m \mapsto [v \mapsto p_R.(m \otimes v).q_R],$$

$$\varepsilon_M: {}^s Hom_k^t(V, M) \otimes V \rightarrow M, \quad f \otimes v \mapsto \sum q_R^1 \left[ f \left( S(q_R^2).v.S^{-1}(p_R^2) \right) \right].p_R^1.$$

چنان‌که در [۴، ۱۰، ۳ و ۱۱، ۳] می‌توان دید، برای هر زوج  $M, N \in {}_H \mathbb{M}_H$  به دو روش می‌توان  $k$ -مدول  $Hom_k(M, N)$  را به یک ساختار  $H$ -مدولی چپ یا راست مجهز کرد. بنابراین علاوه بر ساختار داده شده در قضیه ۶. برای هر دو  $(H, H)$ -دو-مدول  $M$  و  $N$  می‌توان روی  $Hom_k(M, N)$  ساختار  $(H, H)$ -دو-مدولی دیگری به‌صورت (۱۵) تعریف کرد:

$$(h.f.h')(m) := \sum h_2 \left[ f \left( S^{-1}(h_1).m.S(h_1') \right) \right].h_2', \quad (15)$$

که در آن  $h, h' \in H$  و  $m \in M$  و  $f \in Hom_k(M, N)$  در این حالت  $k$ -مدول  $Hom_k(M, N)$  با این ساختار را با علامت  ${}^t Hom_k^s(M, N)$  نشان داده و در این حالت داریم:

قضیه ۷. [۴، ۳.۱۲]. فرض کنید  $H$  یک جبر شبه-هوفیف با شبه-آنتی پود  $(S, \alpha, \beta)$  باشد و  $M, N, V \in {}_H M_H$  در این صورت یک یکریختی طبیعی

$${}_H Hom_H(V \otimes_k^b M, N) \xrightarrow{\psi} {}_H Hom_H(M, {}^t Hom_k^s(V, N)),$$

$$f \mapsto \{m \mapsto [v \mapsto f(p_L \cdot (v \otimes m) q_L)]\},$$

وجود داشته و وارون آن  $\psi^{-1}$  با این ضابطه است:

$$g \mapsto \{v \otimes m \mapsto \sum q_L^2 \cdot [g(m)(S^{-1}(q_L^1) \cdot v \cdot S(p_L^1))] \cdot p_L^2\},$$

که در آن  $p_L = \sum p_L^1 \otimes p_L^2$  و  $q_L = \sum q_L^1 \otimes q_L^2$  در (۱۰) و (۱۱) تعریف شده‌اند. این بدان معنا است که زوج

$$V \otimes^b - : {}_H M_H \rightarrow {}_H M_H, \quad {}^t Hom^s(V, -) : {}_H M_H \rightarrow {}_H M_H,$$

از تابعگون‌ها یک زوج الحاقی است و یکه و هم-یکه این الحاقی در رسته  ${}_H M_H$  بدین صورت تعریف می‌شوند:

$$\eta_M : M \rightarrow {}^t Hom_k^s(V, V \otimes_k M), \quad m \mapsto [v \mapsto p_L \cdot (v \otimes m) \cdot q_L],$$

$$\varepsilon_M : V \otimes {}^t Hom_k^s(V, M) \rightarrow M, \quad v \otimes g \mapsto \sum q_L^2 \cdot [g(S^{-1}(q_L^1) \cdot v \cdot S(p_L^1))] \cdot p_L^2$$

روی یک-شبه-دو-جبر  $H$ ، یک جبر  $H$ -مدولی چپ (راست) به صورت یک جبر در رسته تکوارهای  $H$ -مدول‌های چپ (راست) تعریف می‌شود. با توجه به وجود نداشتن خاصیت هم-شرکت پذیری هم-ضرب در شبه-دو-جبر  $H$ ، مشابه این تعریف (به زبان رسته‌ای) برای معرفی جبرهای هم-مدولی امکان‌پذیر نیست. اف. هاوسر و اف. نیل در [۱۱] تعریفی صوری از مفهوم جبر هم-مدولی روی شبه-دو-جبر  $H$  ارائه دادند که آن را می‌توان تعمیمی از مفهوم شبه-دو-جبر تلقی کرد:

۸. جبرهای هم-مدولی: فرض کنید  $(H, \Delta, \varepsilon, \phi)$  یک شبه-دو-جبر باشد. جبر شرکت‌پذیر و یکدار  $B$  را یک جبر هم-مدولی چپ روی  $H$  می‌نامند اگر یک هم‌ریختی  $k$ -جبرها مانند  $\lambda : B \rightarrow H \otimes B$  و عضو وارون‌پذیر مانند  $\phi_\lambda \in H \otimes H \otimes B$  وجود داشته باشند به گونه‌ای که:

$$(id \otimes \lambda)(\lambda(b)) \cdot \phi_\lambda = \phi_\lambda \cdot (\Delta \otimes id)(\lambda(b)) \quad \forall b \in B, \quad (L1)$$

$$(1_H \otimes \phi_\lambda) \cdot (id \otimes \Delta \otimes id)(\phi_\lambda) \cdot (\phi \otimes 1_B) = (id \otimes id \otimes \lambda)(\phi_\lambda) \cdot (\Delta \otimes id \otimes id)(\phi_\lambda), \quad (L2)$$

$$(\varepsilon \otimes id) \circ \lambda = id_B, \quad (L3)$$

$$(id \otimes \varepsilon \otimes id)(\phi_\lambda) = 1_H \otimes 1_B. \quad (L4)$$

برای هر جبر هم-مدولی چپ مانند  $(B, \lambda, \phi_\lambda)$  روی یک شبه-دو-جبر  $H$  داریم:

$$(\varepsilon \otimes id \otimes id)(\phi_\lambda) = 1_H \otimes 1_B$$

به‌طور مشابه یک جبر هم-مدولی راست روی  $H$  عبارت است از یک جبر شرکت‌پذیر و یک‌دار مانند  $A$ ، به‌همراه یک هم‌ریختی  $k$ -جبرها مانند  $\rho: A \rightarrow A \otimes H$  و عضوی وارون‌پذیر مانند  $\phi_\rho \in A \otimes H \otimes H$  به‌گونه‌ای که در این شرایط صدق کنند:

$$\phi_\rho \cdot (\rho \otimes id_H) \circ \rho(a) = (id_H \otimes \Delta) \circ \rho(a) \cdot \phi_\rho \quad \forall a \in A. \quad (R1)$$

$$(1_A \otimes \phi) \cdot (id \otimes \Delta \otimes id)(\phi_\rho) \cdot (\phi_\rho \otimes 1_H) = (id \otimes id \otimes \Delta)(\phi_\rho) \cdot (\rho \otimes id \otimes id)(\phi_\rho) \quad (R2)$$

$$(id_A \otimes \varepsilon) \circ \rho = id_A \quad (R3)$$

$$(id_A \otimes \varepsilon \otimes id_H)(\phi_\rho) = 1_A \otimes 1_H. \quad (R4)$$

اگر  $(A, \rho, \phi_\rho)$  یک جبر هم-مدولی راست روی شبه-دو-جبر  $H$  باشد، آن‌گاه با استفاده از ویژگی‌های مذکور داریم:

$$(id \otimes id \otimes \varepsilon)(\phi_\rho) = 1_A \otimes 1_H$$

به‌طور مشابه با نمادهای به‌کار رفته برای شرکت‌پذیرساز  $\emptyset$  از یک شبه-دو-جبر  $H$ ، برای نمایش مؤلفه‌های  $\phi_\rho$  از حروف بزرگ و برای نمایش مؤلفه‌های  $\phi_\rho^{-1}$  از حروف کوچک استفاده می‌کنیم. به‌عبارت دیگر داریم:

$$\phi_\rho = \sum X_\rho^1 \otimes X_\rho^2 \otimes X_\rho^3, \quad \phi_\rho^{-1} = \sum x_\rho^1 \otimes x_\rho^2 \otimes x_\rho^3,$$

$$\phi_\lambda = \sum X_\lambda^1 \otimes X_\lambda^2 \otimes X_\lambda^3, \quad \phi_\lambda^{-1} = \sum x_\lambda^1 \otimes x_\lambda^2 \otimes x_\lambda^3,$$

برای هر جبر هم-مدولی راست روی شبه-دو-جبر  $H$ ، اف. هاوسر و اف. نیل در [۱۱] اعضای  $p_\rho, q_\rho \in A \otimes H$  را بدین‌صورت تعریف کردند:

$$p_\rho = \sum p_\rho^1 \otimes p_\rho^2 = \sum x_\rho^1 \otimes x_\rho^2 \beta S(x_\rho^3) \quad (۱۶)$$

$$q_\rho = \sum q_\rho^1 \otimes q_\rho^2 = \sum X_\rho^1 \otimes S^{-1}(\alpha X_\rho^3) X_\rho^2 \quad (۱۷)$$

با توجه به لم ۱،۹ از [۱۱]، برای هر عضو  $a \in A$  داریم:

$$\sum \rho(a(0)) \cdot p_\rho \cdot [1_A \otimes S(a(1))] = p_\rho \cdot [a \otimes 1_H], \quad (۱۸)$$

$$\sum [1_A \otimes S^{-1}(a(1))] \cdot q_\rho \cdot \rho(a(0)) = [a \otimes 1_H] \cdot q_\rho \quad (۱۹)$$

هم‌چنین

$$\sum \rho(q_\rho^1) \cdot p_\rho \cdot [1_A \otimes S(q_\rho^2)] = 1_A \otimes 1_H, \quad (۲۰)$$

$$\sum [1_A \otimes S^{-1}(p_\rho^2)] \cdot q_\rho \cdot \rho(p_\rho^1) = 1_A \otimes 1_H \quad (۲۱)$$

به‌علاوه برای هر جبر هم-مدولی چپ روی شبه-دو-جبر  $H$  مانند  $B$ ، اعضای  $p_\lambda, q_\lambda \in H \otimes B$  به‌صورت (۲۲) و

(۲۳) تعریف می‌شوند:

$$p_\lambda = \sum p_\lambda^1 \otimes p_\lambda^2 = \sum X_\lambda^2 S^{-1}(X_\lambda^2 \beta) \otimes X_\lambda^3, \quad (۲۲)$$

$$q_\lambda = \sum q_\lambda^1 \otimes q_\lambda^2 = \sum S(x_\lambda^1) \alpha x_\lambda^2 \otimes x_\lambda^3 \quad (۲۳)$$

برای هر عضو  $b \in B$  این برابری‌های برقرارند:

$$\sum \lambda(b(0)) \cdot p_\lambda \cdot [S^{-1}(b(-1)) \otimes 1B] = p_\lambda \cdot [1H \otimes b], \quad (24)$$

$$\sum [S(b(-1)) \otimes 1B] \cdot q_\lambda \cdot \lambda(b(0)) = [1H \otimes b] \cdot q_\lambda. \quad (25)$$

هم‌چنین

$$\sum [S(b(-1)) \otimes 1B] \cdot q_\lambda \cdot \lambda(b(0)) = [1H \otimes b] \cdot q_\lambda. \quad (26)$$

و نیز

$$\sum [S(p_\lambda^1) \otimes 1B] \cdot q_\lambda \cdot \lambda(p_\lambda^2) = 1H \otimes 1B. \quad (27)$$

### رابطه بین تابعگونی‌های $Hom$ و تانسور برای جبرهای هم-مدولی

فرض کنید  $H$  یک جبر شبه-هوپف و  $(B, \lambda, \emptyset_\lambda)$  یک جبر هم-مدولی چپ روی  $H$  باشد. در  $[8]$  ذکر شد که هم‌عمل چپ  $\lambda: B \rightarrow H \otimes B$  (با ضابطه  $\lambda(b) = \sum b(-1) \otimes b(0)$ ) یک عمل چپ از رسته تکوارهای  ${}_H M$  روی رسته  ${}_B M$  شامل  $B$ -مدول‌های چپ بدین‌صورت معرفی می‌کند:

$$-\diamond -: {}_H M \times {}_B M \rightarrow {}_B M, \quad (V, N) \rightarrow V \diamond N := V \otimes N$$

که در آن  $V$  یک  $H$ -مدول چپ،  $N$  یک  $B$ -مدول چپ و ساختار  $B$ -مدولی  $V \otimes N$  به‌ازای هر  $b \in B$ ،  $v \in V$  و  $n \in N$  بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$b \cdot (v \otimes n) = \sum b(-1) \cdot v \otimes b(0) \cdot n = \lambda(b) \cdot (v \otimes n),$$

حاصل ضرب تانسوری  $V \otimes_k N$  به‌همراه ساختار  $B$ -مدولی مذکور را با علامت  $V \otimes_k^{b'} N$  نشان می‌دهیم. با این روش برای هر  $H$ -مدول چپ  $V$ ، خود تابعگونی

$$V \otimes -: {}_B M \rightarrow {}_B M, \quad N \mapsto V \otimes_k^{b'} N$$

به‌دست می‌آید.

هم‌چنین یک ساختار  $B$ -مدولی چپ روی  $Hom_k(V, N)$  بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$(b \cdot f)(v) = \sum b(0) \cdot f(S^{-1}(b(-1)) \cdot v),$$

که در آن  $b \in B$ ،  $v \in V$  و  $f \in Hom_k(V, N)$ .

در این صورت  $k$ -مدول  $Hom_k(V, N)$  با ساختار  $B$ -مدولی چپ مذکور را با علامت  ${}^i Hom_k(V, N)$  نشان می‌دهیم.

**قضیه ۹.** [۵. قضیه ۲.۳]. فرض کنید  $H$  یک جبر شبه-هوپف با شبه‌آنتی-بود  $(S, \alpha, \beta)$  و  $(B, \lambda, \emptyset_\lambda)$  یک جبر هم-مدولی چپ باشد،  $M, N \in {}_B M$ ،  $V \in {}_H M$  در این صورت یک یک‌ریختی طبیعی

$$\theta: {}_B Hom(V \otimes_k^{b'} M, N) \rightarrow {}_B Hom(M, {}^i Hom_k(V, N)),$$

$$f \mapsto \{ m \mapsto \{ v \mapsto f(p_\lambda \cdot (v \otimes m)) \} \},$$

وجود دارد که ضابطه تابع وارون  $\theta'$  از آن بدین‌صورت است:

$$g \mapsto \{ v \otimes m \mapsto \sum q_\lambda^2 \cdot [g(m)(S^{-1}(q_\lambda^1) \cdot v)] \}$$

که  $q_\lambda = \sum q_\lambda^1 \otimes q_\lambda^2$  و  $p_\lambda = \sum p_\lambda^1 \otimes p_\lambda^2$  از  $H \otimes B$  هستند که در (۲۲) و (۲۳) تعریف شده‌اند.

به عبارت دیگر زوج

$$V \otimes_k^b - : {}_B\mathbb{M} \rightarrow {}_B\mathbb{M}, \quad {}^t Hom_k(V, -) : {}_B\mathbb{M} \rightarrow {}_B\mathbb{M}$$

یک زوج الحاقی از تابعگونی ها است و یکه و هم-یکه این زوج بدین صورت به دست می آید:

$$\eta'_M : M \rightarrow {}^t Hom_k(V, V \otimes_k M), \quad m \mapsto [v \mapsto p_\lambda.(v \otimes m)],$$

$$\varepsilon'_M : V \otimes {}^t Hom_k(V, M) \rightarrow M, \quad v \otimes f \mapsto \sum q_\lambda^2 [f(S^{-1}(q_\lambda^1).v)].$$

**برهان.** اثبات این حکم در حالت کلی تر (برای دو-مدول ها) در قضیه ۱۰ می آید.

برای یک جبر هم-مدولی چپ  $(B, \lambda, \phi_\lambda)$  روی شبه-دو-جبر  $H$  هم-عمل چپ  $\lambda: B \rightarrow H \otimes B$  یک عمل چپ از رسته تکواری  ${}_H\mathbb{M}_B$  روی رسته  ${}_B\mathbb{M}_B$  شامل همه  $(B, B)$ -دو-مدول ها بدین صورت معرفی می کند:

$$\diamond -: {}_H\mathbb{M}_B \times {}_B\mathbb{M}_B \rightarrow {}_B\mathbb{M}_B, \quad (V, N) \mapsto V \diamond N := V \otimes^{b'} N,$$

که  $V \in {}_H\mathbb{M}_B$ ,  $N \in {}_B\mathbb{M}_B$  و ساختار  $(B, B)$ -دو-مدولی  $V \otimes^{b'} N$  را برای هر  $b, a \in B$  و  $n \in N$  بدین صورت تعریف می کنیم:

$$b.(v \otimes n).a := \sum b_{(-1)}.v.a_{(-1)} \otimes b_{(0)}.n.a_{(0)} = \lambda(b).(v \otimes n).\lambda(a),$$

$k$ -مدول  $V \otimes_k^{b'} N$  را با ساختار  $(B, B)$ -دو مدولی مذکور را با علامت  $V \otimes_k^{b'} N$  نشان می دهیم. از این طریق وجود هر  $(H, H)$ -دو مدول مانند  $V$  به وجود یک خود-تابعگونی

$$V \otimes_k^{b'} -: {}_B\mathbb{M}_B \rightarrow {}_B\mathbb{M}_B, \quad N \mapsto V \otimes_k^{b'} N$$

منجر می شود. همچنین اگر  $H$  یک شبه-دو جبر با شبه آنتی پود  $(S, \alpha, \beta)$  باشد، یک ساختار  $(B, B)$ -دو-مدولی روی  $Hom_k(V, N)$  بدین صورت تعریف می کنیم:

$$(b.f.a)(v) = \sum b_{(0)}.[f(S^{-1}(b_{(-1)}).v.S(a_{(-1)}))]a_{(0)}$$

که  $b, a \in B$ ,  $v \in V$  و  $f \in Hom(V, N)$ . در این صورت  $k$ -مدول  $Hom_k(V, N)$  به همراه ساختار  $(B, B)$ -دو-مدولی مذکور را با علامت  ${}^t Hom_k(V, N)$  نشان می دهیم.

**قضیه ۱۰.** فرض کنید  $H$  یک جبر شبه-هوف با شبه-آنتی پود  $(S, \alpha, \beta)$  و  $(B, \lambda, \phi_\lambda)$  یک جبر هم-مدولی چپ باشد،  $M, N \in {}_B\mathbb{M}_B$  و  $V \in {}_H\mathbb{M}_B$  در این صورت نگاشت

$$\theta: {}_B Hom_B(V \otimes_k^{b'} M, N) \rightarrow {}_B Hom_B(M, {}^t Hom_k^S(V, N)),$$

$$f \mapsto \{m \mapsto [v \mapsto f(p_\lambda.(v \otimes m).q_\lambda)]\}$$

یک یکرختی است که ضابطه تابع وارون  $\theta'$  از آن بدین صورت است:

$$g \mapsto \{v \otimes m \mapsto \sum q_\lambda^2 [g(m)(S^{-1}(q_\lambda^1).v.S(p_\lambda^1))]p_\lambda^2\}$$

که  $p_\lambda = \sum p_\lambda^1 \otimes p_\lambda^2$  و  $q_\lambda = \sum q_\lambda^1 \otimes q_\lambda^2$  در (۲۲) و (۲۳) تعریف شده اند.

به عبارت دیگر زوج

$$V \otimes_k^{b'} -: {}_B\mathbb{M}_B \rightarrow {}_B\mathbb{M}_B, \quad {}^t Hom_k^S(V, -) : {}_B\mathbb{M}_B \rightarrow {}_B\mathbb{M}_B$$

یک زوج الحاقی از تابعگونی ها است که یکه آن به صورت

$$\eta'_M : M \rightarrow {}^t Hom_k^S(V, V \otimes_k M), \quad m \mapsto [v \mapsto p_\lambda.(v \otimes m).q_\lambda]$$

و هم-یکه آن بدین صورت به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \varepsilon'_M : V \otimes {}^t \text{Hom}_k(V, M) &\rightarrow M, \quad v \otimes f \mapsto \sum q_\lambda^2 \cdot [f(S^{-1}(p_\lambda^1) \cdot v \cdot S(p_\lambda^1))] \cdot p_\lambda^2 \\ \text{برهان.} &\text{ برای هر } f \in {}_B \text{Hom}_B(V \otimes_k^b M, N) \text{ نشان می‌دهیم که } \theta(f) \text{ یک نگاشت } (B, B)\text{-دو خطی} \\ &\text{است. برای هر } v \in V \text{ و } m \in M, b, a \in B: \\ [\theta(f)(b \cdot m \cdot a)](v) &= f(p_\lambda \cdot (v \otimes b \cdot m \cdot a) \cdot q_\lambda) \\ &= f\left(\sum p_\lambda^1 \cdot v \cdot q_\lambda^1 \otimes p_\lambda^2 \cdot b \cdot m \cdot a \cdot q_\lambda^2\right) \\ &= f(p_\lambda \cdot (1_H \otimes b) \cdot (v \otimes m) \cdot (1_H \otimes a) \cdot q_\lambda) \end{aligned}$$

بنا به (۲۴) و (۲۵)،

$$\begin{aligned} &= f\left(\sum \lambda(b_{(0)}) \cdot p_\lambda \cdot (S^{-1}(b_{(-1)} \otimes 1_B) \cdot (v \otimes m) \cdot (S(a_{(-1)}) \otimes 1_B) \cdot q_\lambda \cdot \lambda(a_{(0)}))\right) \\ &\text{چون } f \text{ دو خطی است،} \\ &= \sum b_{(0)} \cdot [f(p_\lambda^1 S^{-1}(b_{(-1)}) \cdot v \cdot S(a_{(-1)}) q_\lambda^1 \otimes p_\lambda^2 \cdot m \cdot q_\lambda^2)] \cdot a_{(0)} \end{aligned}$$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} [b \cdot (\theta(f)(m)) \cdot a](v) &= \sum b_{(0)} \cdot [(\theta(f)(m))(S^{-1}(b_{(-1)}) \cdot v \cdot S(a_{(-1)}))] \cdot a_{(0)} \\ &= \sum b_{(0)} \cdot f(p_\lambda^1 S^{-1}(b_{(-1)}) \cdot v \cdot S(a_{(-1)}) q_\lambda^1 \otimes p_\lambda^2 \cdot m \cdot q_\lambda^2) \cdot a_{(0)} \\ &\text{بدین ترتیب } (B, B)\text{-دو خطی بودن } \theta(f) \text{ ثابت می‌شود.} \end{aligned}$$

بالعکس برای هر  $v \in V, m \in M, b, a \in B$  و هر  $g \in {}_B \text{Hom}_B(M, {}^t \text{Hom}_k(V, N))$  داریم:

$$\begin{aligned} [\theta'(g)](b \cdot (v \otimes m) \cdot a) &= [\theta'(g)]\left(\sum b_{(-1)} \cdot v \cdot a_{(-1)} \otimes b_{(0)} \cdot m \cdot a_{(0)}\right) \\ &= \sum q_\lambda^2 \cdot [g(b_{(0)} \cdot m \cdot a_{(0)})(S^{-1}(q_\lambda^1) b_{(-1)} \cdot v \cdot a_{(-1)} S(p_\lambda^1))] \cdot p_\lambda^2 \\ &= \sum q_\lambda^2 \cdot \{[b_{(0)} \cdot g(m)] \cdot a_{(0)}\} (S^{-1}(q_\lambda^1) b_{(-1)} \cdot v \cdot a_{(-1)} S(p_\lambda^1)) \cdot p_\lambda^2 \\ &= \sum q_\lambda^2 \cdot \{b_{(0,0)} \cdot [g(m)(S^{-1}(q_\lambda^1) b_{(0,-1)}) b_{(-1)} \cdot v \cdot a_{(-1)} S(a_{(0,-1)} p_\lambda^1)]\} \cdot a_{(0,0)} p_\lambda^2 \\ &= \sum b \cdot \{q_\lambda^2 \cdot [g(m)(S^{-1}(q_\lambda^1) \cdot v \cdot S(p_\lambda^1))]\} \cdot p_\lambda^2 \cdot a \\ &= b \cdot \{[\theta'(g)](v \otimes m)\} \cdot a. \end{aligned}$$

بنابراین  $\theta'(g)$  نیز  $(B, B)$ -دو خطی است.

حال نشان می‌دهیم که  $\theta$  و  $\theta'$  وارون یکدیگرند: برای هر  $v \in V, m \in M$  و هر  $f \in {}_B \text{Hom}_B(M \otimes V, N)$  داریم:

$$\begin{aligned} [(\theta' \circ \theta)(f)](v \otimes m) &= \sum q_\lambda^2 \cdot [(\theta(f)(m))(S^{-1}(q_\lambda^1) \cdot v \cdot S(p_\lambda^1))] \cdot p_\lambda^2 \\ &= \sum q_\lambda^2 \cdot [f(p_\lambda^1 S^{-1}(q_\lambda^1) \cdot v \cdot S(p_\lambda^1) q_\lambda^1 \otimes p_\lambda^2 \cdot m \cdot q_\lambda^2)] \cdot p_\lambda^2 \\ \text{دو خطی است } f &\sum f(\lambda(q_\lambda^2) \cdot p_\lambda \cdot (S^{-1}(q_\lambda^1) \otimes 1_B) \cdot (v \otimes m) \cdot (S(p_\lambda^1) \otimes 1_B) \cdot q_\lambda \cdot \lambda(p_\lambda^2)) \\ &= \sum f((1_H \otimes 1_B) \cdot (v \otimes m) \cdot (1_H \otimes 1_B)) = f(v \otimes m). \\ \text{از طرف دیگر برای هر } v \in V, m \in M &\text{ و هر } g \in {}_B \text{Hom}_B(M, {}^t \text{Hom}_k(V, N)) \text{ داریم:} \\ [(\theta \circ \theta')(g)](m)(v) &= \theta'(g)(p_\lambda \cdot (v \otimes m) \cdot q_\lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \theta'(g)(\sum p_\lambda^1 \cdot v \cdot q_\lambda^1 \otimes p_\lambda^2 \cdot m \cdot q_\lambda^2) \\
&= \sum q_\lambda^2 \cdot [g(p_\lambda^2 \cdot m \cdot q_\lambda^2)(S^{-1}(q_\lambda^1) p_\lambda^1 \cdot v \cdot q_\lambda^1 S(p_\lambda^1))] \cdot p_\lambda^2 \\
&= \sum q_\lambda^2 \cdot \{ [p_\lambda^2 \cdot g(m) \cdot q_\lambda^2] (S^{-1}(q_\lambda^1) p_\lambda^1 \cdot v \cdot q_\lambda^1 S(p_\lambda^1)) \} \cdot p_\lambda^2 \\
&= \sum q_\lambda^2 (p_\lambda^2)_{(0)} \cdot \{ g(m) (S^{-1}(q_\lambda^1 (p_\lambda^2)_{(-1)}) p_\lambda^1 \cdot v \cdot q_\lambda^1 S((q_\lambda^2)_{(-1)} p_\lambda^1)) \} \cdot (q_\lambda^2)_{(0)} p_\lambda^2 \\
(2.26), (2.27) &= g(m)(v)
\end{aligned}$$

بنابراین  $\theta$  یک ریختی است و نگاشت وارون آن  $\theta'$  است.

حال فرض کنید  $A$  یک جبر هم-مدولی راست روی شبه-دو-جبر  $H$  باشد. رسته  $\mathbb{M}_A$  شامل همه  $A$ -مدول های راست یک رسته تکواره ای نیست. با این حال هم-عمل راست

$$\rho: A \rightarrow A \otimes H, \quad a \mapsto \sum a_{(0)} \otimes a_{(1)}$$

یک عمل راست از رسته تکواره ای  $\mathbb{M}_H$  روی رسته  $\mathbb{M}_A$  به شکل زیر معرفی می کند:

که ساختار  $A$ -مدولی راست  $N \otimes_k V$  برای اعضای دلخواه  $v \in V$ ،  $a \in A$  و  $n \in N$  بدین صورت است:

$$(n \otimes v) \cdot a = \sum n \cdot a_{(0)} \otimes v \cdot a_{(1)} = (n \otimes v) \cdot \rho(a).$$

در این صورت  $A$ -مدول  $N \otimes_k V$  با ساختار  $A$ -مدولی مذکور را با علامت  $N \otimes_k^b V$  نشان می دهیم. یک ریختی طبیعی

$$(- \diamond -) \diamond - \xrightarrow{\psi} - \diamond (- \otimes -)$$

برای  $H$ -مدول های راست  $V, W \in \mathbb{M}_H$  و  $A$ -مدول راست  $N$  و بازای اعضای  $v \in V$ ،  $w \in W$  و  $n \in N$  بدین صورت تعریف می شود:

$$\Psi_{N, V, W}: (N \diamond V) \diamond W \rightarrow N \diamond (V \otimes W), \quad (n \otimes v) \otimes w \mapsto [n \otimes (v \otimes w)] \cdot \phi_\rho^{-1},$$

برابری

$$(\text{id}_N \diamond a_{V, W, Z}) \circ \Psi_{N, V \otimes W, Z} \circ (\Psi_{N, V, W} \diamond \text{id}_Z) = \Psi_{N, V, W \otimes Z} \circ \Psi_{N \diamond V, W, Z},$$

نتیجه مستقیم برابری (R2) در تعریف جبر هم-مدولی راست است.

از این طریق برای هر  $H$ -مدول راست مانند  $V$  یک خود-تابعگونی

$$- \otimes_k^b V: \mathbb{M}_A \rightarrow \mathbb{M}_A, \quad N \mapsto N \otimes_k^b V$$

به دست می آید.

حال فرض کنید  $H$  یک جبر شبه-هوپف با شبه آنتی پود  $(S, \alpha, \beta)$  باشد. یک ساختار  $A$ -مدولی راست برای  $\text{Hom}_k(V, N)$  بدین صورت تعریف می کنیم:

$$(f \cdot a)(v) = \sum f(v \cdot S^{-1}(a_{(1)})) \cdot a_{(0)},$$

که  $a \in A$  و  $v \in V$  و  $f \in \text{Hom}_k(V, N)$  در این صورت  $\text{Hom}_k(V, N)$  با ساختار  $A$ -مدولی راست مذکور را

با علامت  $\text{Hom}_k^t(V, N)$  نشان می دهیم.

با روندی مشابه با برهان قضیه ۱۰ می توان ثابت کرد که:

قضیه ۱۱. فرض کنید  $H$  یک جبر شبه-هوپف با شبه آنتی پود  $(S, \alpha, \beta)$  و  $(A, \rho, \phi_\rho)$  یک جبر هم-مدولی راست

روی  $H$  باشد. به ازای هر  $M, N \in \mathbb{M}_A$  و  $V \in \mathbb{M}_H$  یک ریختی طبیعی

$$Hom_A(M \otimes_k^b V, N) \xrightarrow{\psi} Hom_A(M, Hom_k^t(V, N)),$$

$$f \mapsto \left\{ m \mapsto \left[ v \mapsto f((m \otimes v).q_\rho) \right] \right\}$$

وجود دارد و ضابطه نگاشت وارون  $\psi'$  از آن بدین صورت است:

$$g \mapsto \left\{ (m \otimes v) \mapsto g(m) \left[ v.S^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ p_\rho \end{pmatrix} \right] \right\} \cdot p_\rho^1$$

که  $q_\rho = \sum q_\rho^1 \otimes q_\rho^2$  و  $p_\rho = \sum p_\rho^1 \otimes p_\rho^2$  از اعضای  $A \otimes H$  هستند که در (۱۶) و (۱۷) تعریف شده‌اند. به عبارت دیگر زوج

$$- \otimes_k^b V : \mathbb{M}_A \rightarrow \mathbb{M}_A, \quad Hom_k^t(V, -) : \mathbb{M}_A \rightarrow \mathbb{M}_A$$

یک زوج الحاقی از خود-تابعگون‌ها است. یک‌ه و هم-یکه این زوج الحاقی در رسته  $\mathbb{M}_A$  بدین صورت داده می‌شوند:

$$\eta_M : M \rightarrow Hom_k^t(V, M \otimes_k V), \quad m \mapsto [v \mapsto (m \otimes v).q_\rho]$$

$$\varepsilon_M : Hom_k^t(V, M) \otimes V \rightarrow M, \quad (f \otimes v) \mapsto \sum f(v.S^{-1}(p_\rho^2)) \cdot p_\rho^1$$

برای هر شبه-دو-جبر  $H$ ، می‌دانیم که  ${}_H M_H$  رسته‌ای تکوارهای است. فرض کنید  $(A, \rho, \phi_\rho)$  یک جبر هم-مدولی راست روی  $H$  باشد. در این صورت برای هر  $(A, A)$ -دو-مدول  $N \in {}_A M_A$  و هر  $(H, H)$ -دو-مدول  ${}_H M_H$  ضرب تانسوری  $N \otimes_k V$  دوباره یک  $(A, A)$ -دو-مدول بوده است و ساختار دو-مدولی آن بدین صورت تعریف می‌شود:

$$b.(n \otimes v).a = \sum b_{(v)}.n.a_{(v)} \otimes b_{(v)}.v.a_{(v)}$$

هم‌چنین رسته تکوارهای  ${}_H M_H$  از راست روی رسته  ${}_A M_A$  بدین صورت عمل می‌کند:

$$-\diamond -: {}_A M_A \times {}_H M_H \rightarrow {}_A M_A, \quad (N, V) \mapsto N \otimes_k V.$$

از این طریق برای هر  $(H, H)$ -دو-مدول  $V$ ، خود-تابعگون

$$- \otimes_k V : {}_A M_A \rightarrow {}_A M_A, \quad N \mapsto N \otimes_k V$$

به دست می‌آید.

هم‌چنین می‌توان ساختاری  $(A, A)$ -دو-مدولی روی  $Hom_k(V, N)$  بدین صورت تعریف کرد:

$$(b.f.a)(v) = \sum b_{(v)}. \left[ f(S(b_{(v)}).v.S^{-1}(a_{(v)})) \right] \cdot a_{(v)}$$

که  $f \in Hom_k(V, N)$  و  $v \in V, a, b \in A$

حاصل ضرب تانسوری  $N \otimes_k V$  به همراه ساختار  $(A, A)$ -دو-مدولی داده شده در بالا را با علامت  $N \otimes_k^b V$  نشان می‌دهیم. هم‌چنین  $k$ -مدول  $Hom_k(V, N)$  به انضمام ساختار  $(A, A)$ -دو-مدولی داده شده در بالا را با علامت  $Hom_k(V, N)$  نشان می‌دهیم.

با روندی مشابه با آنچه در برهان قضیه ۱۰ مشاهده کردیم، می‌توان ثابت کرد که:

قضیه ۱۲. فرض کنید  $H$  یک جبر شبه-هوپف با شبه-آنتی‌پود  $(S, \alpha, \beta)$  و  $(A, \rho, \phi_\rho)$  یک جبر هم-مدولی راست روی  $H$  باشد. برای هر  $V \in {}_H M_H$  و هر  $M, N \in {}_A M_A$  یک ریختی طبیعی

$${}_A \text{Hom}_A (M \otimes_k^{\mathfrak{b}'} V, N) \xrightarrow{\Psi} {}_A \text{Hom}_A (M, \text{Hom}_k^{\mathfrak{s}', \mathfrak{t}'} (V, N)),$$

$$f \mapsto \left\{ m \mapsto \left[ v \mapsto \sum f(p_\rho \cdot (m \otimes v) \cdot q_\rho) \right] \right\},$$

وجود دارد و ضابطه نگاشت وارون  $\Psi^{-1}$  از آن بدین صورت است:

$$g \mapsto \left\{ m \otimes v \mapsto \sum q_\rho^1 \cdot \left[ g(m)(S(q_\rho^2) \cdot v \cdot S^{-1}(p_\rho^2)) \right] \cdot p_\rho^1 \right\},$$

که  $q_\rho = \sum q_\rho^1 \otimes q_\rho^2$  و  $p_\rho = \sum p_\rho^1 \otimes p_\rho^2$  از  $A \otimes H$  اعضای هستند که در (۱۶) و (۱۷) تعریف شده‌اند. این بدان معنا است که زوج

$$- \otimes_k^{\mathfrak{b}'} V : {}_A \mathbb{M}_A \rightarrow {}_A \mathbb{M}_A, \quad \text{Hom}_k^{\mathfrak{s}', \mathfrak{t}'} (V, -) : {}_A \mathbb{M}_A \rightarrow {}_A \mathbb{M}_A,$$

یک زوج الحاقی از خود-تابعگون‌های رسته  ${}_A \mathbb{M}_A$  است. یک و هم-یکه این زوج به ترتیب عبارتند از:

$$\eta_M : M \rightarrow \text{Hom}_k^{\mathfrak{s}', \mathfrak{t}'} (V, M \otimes V), \quad m \mapsto [v \mapsto [p_\rho \cdot (m \otimes v) \cdot q_\rho],$$

$$\varepsilon_M : \text{Hom}_k^{\mathfrak{s}', \mathfrak{t}'} (V, M) \otimes V \rightarrow M, \quad f \otimes v \mapsto \sum q_\rho^1 \cdot \left[ f(S(q_\rho^2) \cdot v \cdot S^{-1}(p_\rho^2)) \right] \cdot p_\rho^1.$$

**سؤال باز:** فرض کنید  $H$  یک جبر شبه-هوپف،  $(\beta, \lambda, \phi_\lambda)$  یک جبر هم-مدولی چپ و  $(A, \rho, \phi_\rho)$  یک جبر هم-مدولی راست روی  $H$  باشند:

۱. آیا یک عمل از رسته تکوارهای  ${}_H \mathbb{M}_H$  روی رسته  ${}_B \mathbb{M}_A$  یا رسته  ${}_A \mathbb{M}_B$  می‌توان تعریف کرد؟
۲. آیا خود-تابعگون‌های تانسور و Hom روی رسته  ${}_B \mathbb{M}_A$  یا رسته  ${}_A \mathbb{M}_B$  می‌توان تعریف کرد؟ در این صورت آیا روابط الحاقی بین چنین تابعگون‌هایی قابل تعریف است؟

## سیاس‌گزاری

برخود لازم می‌دانم که مراتب سیاس صمیمانه خود را از داوران محترم که با ارزیابی و بررسی دقیق و پیشنهادات ارزنده خود موجب بهبود کیفیت این مقاله شدند، ابراز نمایم.

## منابع

1. Abe E., "Hopf Algebras", Cambridge Univ. Press, Cambridge (1977).
2. Anderson F., Fuller K., "Rings and Categories of Modules", Springer, Berlin (1974).
3. Bagheri S., Wisbauer R., "Hom-Tensor relations for two-sided Hopf modules over quasi-Hopf algebras", Comm. Algebra 40 (2012) 3257-3287.
4. Bagheri S., "Adjunctions of Hom and Tensors as endofunctors of (Bi-) module categories over quasi-Hopf algebras", Comm. Algebra 42 (2014) 488-510.
5. Bagheri S., "Hom-Tensor relations for (quasi-) comodule algebras", J. Math. Sci. 186 (5) (2012) 701-705/https://doi.org/10.1007/S10958-012-1017-7.
6. Barr M., Wells C., "Toposes, Triples and Theories", Springer (1985).

7. Borceux F., "Handbook of categorical Algebra 1, Categories and Structures", Encyclopedia of Mathematics and its Applications 51, Cambridge Univ. Press. (1994).
8. Borceux F., "Handbook of categorical Algebra 2, Categories and Structures", Encyclopedia of Mathematics and its Applications 51, Cambridge Univ. Press. (1994).
9. Brzeziński T., Wisbauer R., "Corings and Comodules", London Math. Soc. LNS 309, Cambridge University Press (2003).
10. Drinfeld V. G., "Quasi-Hopf algebras", Leningrad Math. J. 1, (1990) 1419-1457.
11. Hausser F., Nill F., "Diagonal crossed products by duals of quasi-quantum groups", Rev. Math. Phys. 11, (1999) 533-629.
12. Hausser, F., Nill, F., "Doubles of quasi-quantum groups", Comm. Math. Phys. 199 547-589 (1999).
13. Hausser F., Nill F., "Integral theory for quasi-Hopf Algebras", arXiv:Math., QA/9904164 (1999).
14. Kassel K., "Quantum Groups", Springer, Berlin (1995).
15. Mac Lane S., "Category for the working mathematician", Springer (1971).
16. Majid S., "Foundations of Quantum Group Theory", Cambridge Univ. Press, Cambridge (1995).
17. Pareigis B., "Non-additive ring and module theory II, C-categories, C-functors and C-morphisms", Publ. Math. Debrecen 24 (1977) 351-361.
18. Pareigis B., "Reconstruction of hidden symmetries", J. Alg. 183(1996) 90-154.
19. Schauenburg P., "Actions of monoidal categories and generalized Hopf smash products", J. Alg. 270 (2003) 521-563.
20. Sweedler M. E., "Hopf Algebras", Benjamin, New York (1969).
21. Wisbauer R., "Foundations of Module and Ring Theory", Gordon and Breach Reading (1991).