

یادداشتی روی مدول‌های هیلبرت

عباس سهله*، لیلا نجارپیشه
دانشگاه گیلان، دانشکده علوم ریاضی
دریافت ۹۷/۰۲/۲۱ پذیرش ۹۷/۰۶/۲۶

چکیده

فرض کنید A یک C^* -جبر باشد. در این مقاله به بررسی ارتباط بین d -اشتقاق‌ها و اشتقاق‌ها روی یک A -مدول هیلبرت X به‌عنوان یک جبر باناخ خاص می‌پردازیم. به‌علاوه برای یک A -مدول هیلبرت دو طرفه X ، تحت شرایط خاص، یک ساختار C^* تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که C^* -جبر ساخته شده را می‌توان با C^* -جبر عملگرهای الحاق پذیر روی X یکی گرفت.

واژه‌های کلیدی: C^* -مدول هیلبرت، جبر باناخ، C^* -جبر، d -اشتقاق.

مقدمات و پیش‌نیازها

در سال ۱۹۵۳ کاپلانسکی فضای جدیدی به‌نام C^* -مدول هیلبرت را با ایده گرفتن از تعریف فضاهای هیلبرت معرفی کرد [۳]. در واقع یک C^* -مدول هیلبرت گسترش طبیعی فضای هیلبرت از میدان اعداد مختلط به یک C^* -جبر است.

فرض کنید A یک C^* -جبر باشد. فرض کنید X یک A -مدول χ باشد (هم‌زمان یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط نیز هست) که به یک ضرب داخلی A -مقدار مانند $A: X \times X \rightarrow A: (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle_X$ مجهز شده است. در این صورت X را یک A -مدول پیش هیلبرت χ می‌نامیم هرگاه برای هر

$$1. \quad \langle \alpha x + \beta y, z \rangle_X = \alpha \langle x, z \rangle_X + \beta \langle y, z \rangle_X$$

$$2. \quad \langle a \cdot x, y \rangle_X = a \langle x, y \rangle_X$$

$$3. \quad \langle y, x \rangle_X = \langle x, y \rangle_X^*$$

$$4. \quad \langle x, x \rangle_X = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{و} \quad \langle x, x \rangle_X \geq 0$$

اگر X یک A -مدول پیش هیلبرت χ باشد برای هر $x \in X$ ، $\|x\|_X = \|\langle x, x \rangle_X\|_A^{\frac{1}{2}}$ یک نرم روی X تعریف می‌کند. اگر X نسبت به این نرم کامل باشد X را یک A -مدول هیلبرت χ می‌نامیم. A -مدول هیلبرت χ X انباشته نامیده می‌شود هرگاه فضای خطی تولید شده به‌وسیله مجموعه $\{\langle x, y \rangle_X : x, y \in X\}$ در A چگال باشد. به‌عنوان مثال هر C^* -جبر A با ضرب داخلی $(a, b) \mapsto ab^*$ ($a, b \in A$) یک A -مدول هیلبرت χ انباشته است. یک A -مدول هیلبرت راست انباشته به‌روش مشابه تعریف می‌شود.

فرض کنید X یک A -مدول دو طرفه باشد. X را یک A -مدول هیلبرت دو طرفه می‌نامیم اگر X به‌طور هم‌زمان یک A -مدول هیلبرت χ و راست باشد، به‌علاوه برای هر $x, y, z \in X$ در رابطه $\langle x, y \rangle_X \cdot z = \langle x, yz \rangle_X$ صدق کند. توجه می‌کنیم که در این حالت برای هر $x \in X$ داریم $\|x\|_X = \|\langle x, x \rangle_X\|_A$. برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد A -مدول‌های هیلبرت دو طرفه به [۲] مراجعه کنید.

فرض X کنید یک A -مدول هیلبرت χ باشد. نگاشت $T: X \rightarrow X$ را الحاق پذیر می‌نامیم هرگاه نگاشتی مانند $T^*: X \rightarrow X$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $\langle Tx, y \rangle_X = \langle x, T^*y \rangle_X$. به

آسانی می‌توان بررسی کرد که هر نگاشت الحاق پذیر خطی و کراندار است. به‌علاوه، برای هر $x \in X$ و $a \in A$ ، نگاشت الحاق پذیر T در رابطه $T(xa) = T(x) \cdot a$ صدق می‌کند. مجموعه همه نگاشتهای الحاق پذیر روی X را با نماد $\mathcal{L}(X)$ نمایش می‌دهیم $\mathcal{L}(X)$. یک C^* -جبر است [۴]. برای $x, y \in X$ ، نگاشت $\theta_{x,y} : X \rightarrow X$ بدین صورت تعریف می‌شود:

$$\theta_{x,y}(z) = {}_X \langle z, y \rangle \cdot x \quad (z \in X).$$

زیر فضای خطی بسته تولید شده به‌وسیله $\{\theta_{x,y} : x, y \in X\}$ را با $\mathcal{K}(X)$ نمایش می‌دهیم. می‌توان بررسی کرد که $\mathcal{K}(X)$ یک ایده‌آل دو طرفه بسته در $\mathcal{L}(X)$ است [۴]. عناصر $\mathcal{K}(X)$ را معمولاً عملگرهای فشرده می‌نامیم. در این مقاله، نگاشت خطی $d : A \rightarrow A$ را یک اشتقاق روی جبر باناخ A می‌نامیم اگر برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $d_a x = ax - xa$ به صورت $d_a : A \rightarrow A$ تعریف شده به صورت $d_a x = ax - xa$ فرض کنید $a \in A$ ، نگاشت $d : A \rightarrow A$ را d_a تعریف شده به صورت $d_a x = ax - xa$ یک اشتقاق است. این اشتقاق را اشتقاق درونی القا شده به‌وسیله a می‌نامیم. در سرتاسر این مقاله A یک C^* -جبر است

d-اشتقاق‌ها روی مدول‌های هیلبرت

فرض کنید X یک A -مدول هیلبرت چپ و e یک عضو دلخواه در X با $\|e\| = 1$ باشد. نگاشت $\pi_e : X \times X \rightarrow X$ تعریف شده به‌وسیله $\pi_e(x, y) = {}_X \langle x, e \rangle \cdot y$ یک ضرب روی X است که آن را به یک جبر باناخ تبدیل می‌کند. این جبر باناخ را با نماد (X, π_e) نمایش می‌دهیم [۶].
لم ۱. [۵، ۲، ۱] فرض کنید X یک A -مدول هیلبرت چپ انباشته باشد و $a \in A$. آن‌گاه $a = 0$ اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم $a \cdot x = 0$.

تعریف ۲. فرض کنید X یک A -مدول هیلبرت چپ انباشته باشد. نگاشت خطی $\delta : X \rightarrow X$ یک اشتقاق تعمیم یافته نامیده می‌شود اگر نگاشت $d : A \rightarrow A$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in X$ و هر $a \in A$ داشته باشیم

$$\delta(ax) = a \cdot \delta(x) + d(a) \cdot x.$$

برای سادگی در ارجاع، این اشتقاق تعمیم یافته δ را d -اشتقاق می‌خوانیم.

ملاحظه ۳. فرض کنید X یک A -مدول هیلبرت چپ انباشته باشد و δ یک d -اشتقاق روی X باشد. در [۱]، ثابت شده است که d یک اشتقاق روی A است. حال چون (X, π_e) یک جبر باناخ است، این سوال مطرح می‌شود که آیا δ نیز یک اشتقاق روی (X, π_e) است؟

در مثال زیر، ما از این واقعیت استفاده می‌کنیم که هر اشتقاق d روی یک جبر باناخ یک d -اشتقاق است و به سوال مطرح شده پاسخ منفی می‌دهیم.

مثال ۴. فرض کنید d یک اشتقاق روی A و e یک عضو دلخواه از A باشد به طوری که $\|e\| = 1$. در حالت کلی، d یک اشتقاق روی جبر باناخ (A, π_e) نیست. برای مثال فرض کنید $A = M_2(\mathbb{C})$ ، آن‌گاه A یک A -مدول هیلبرت دو

طرفه انباشته است. اکنون فرض کنید $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ، توجه می‌کنیم که $\|e\| = 1$ و e یک عضو یکانی از A نیست.

حال فرض کنید d یک اشتقاق درونی القا شده به‌وسیله $c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ روی A باشد. برای $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ داریم:

$$= d(e^*) = d\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} d(\pi_e(x, x)) = d({}_A \langle x, e \rangle \cdot x) = d(xe^*x)$$

در حالی که $\pi_e(d(x), x) + \pi_e(x, d(x)) = 0$ بنابراین d یک اشتقاق روی (A, π_e) نیست.

با توجه به مثال ۴، در حالت کلی، اگر δ یک d -اشتقاق روی A -مدول هیلبرت چپ انباشته X باشد، δ یک اشتقاق روی (X, π_e) نیست. در قضیه ۵ یک شرط لازم و کافی، برای این که δ یک اشتقاق روی (X, π_e) باشد را بیان می کنیم.

قضیه ۵. فرض کنید X یک A -مدول هیلبرت چپ انباشته و δ یک d -اشتقاق روی X باشد. آنگاه δ یک اشتقاق

روی (X, π_e) است اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم $d_X(x, e) = \langle \delta(x), e \rangle$.

اثبات. ابتدا توجه می کنیم که δ چون یک d -اشتقاق روی X است داریم

$$\delta_X(x, e \cdot y) = \langle x, e \rangle \delta(y) + d_X(x, e) \cdot y.$$

اکنون فرض کنید δ یک اشتقاق روی (X, π_e) باشد، در این صورت برای هر $x, y \in X$ داریم:

$$\delta(\pi_e(x, y)) = \pi_e(\delta(x), y) + \pi_e(x, \delta(y)).$$

در نتیجه

$$\delta_X(x, e \cdot y) = \langle \delta(x), e \rangle y + \langle x, e \rangle \delta(y).$$

بنابراین

$$\langle x, e \rangle \delta(y) + d_X(x, e) \cdot y = \langle \delta(x), e \rangle y + \langle x, e \rangle \delta(y)$$

و در نتیجه

$$\langle \delta(x), e \rangle y = d_X(x, e) \cdot y.$$

اکنون چون X انباشته است، لم ۱ ایجاب می کند که $\langle \delta(x), e \rangle = d_X(x, e)$.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنید $x, y \in X$. در نتیجه $\langle \delta(x), e \rangle = d_X(x, e)$ داریم

$$\delta(\pi_e(x, y)) = \delta_X(x, e \cdot y) = \langle x, e \rangle \delta(y) + d_X(x, e) \cdot y = \pi_e(x, \delta(y)) + \langle \delta(x), e \rangle y = \pi_e(x, \delta(y)) + \pi_e(\delta(x), y).$$

این تساوی ایجاب می کند که یک δ اشتقاق روی (X, π_e) است.

نتیجه ۶. فرض کنید e یک عضو دلخواه از A باشد به طوری که $\|e\| = 1$ و فرض کنید d یک اشتقاق روی A باشد.

آنگاه d یک اشتقاق روی (A, π_e) است اگر و تنها اگر $d(e^*) = 0$

اثبات. فرض کنید $d(e^*) = 0$ ، در این صورت برای هر $y \in A$ داریم

$$d_A(y, e) = d(ye^*) = d(y)e^* + yd(e^*) = d(y)e^* = \langle d(y), e \rangle.$$

در نتیجه $d_A(y, e) = \langle d(y), e \rangle$. اکنون قضیه ۵ ایجاب می کند که d یک اشتقاق روی (A, π_e) است.

برعکس، فرض کنید d یک اشتقاق روی (A, π_e) باشد. بنابراین با توجه به قضیه ۵ برای هر $y \in A$ داریم

$$d(ye^*) = d_A(y, e) = \langle d(y), e \rangle = d(y)e^*.$$

اکنون چون d یک اشتقاق است، نتیجه می گیریم که $yd(e^*) = 0$ در نهایت انباشته بودن A ایجاب می کند که

$$d(e^*) = 0$$

مثال ۷. فرض کنید e یک عضو دلخواه از A باشد به طوری که $\|e\| = 1$ و فرض کنید d یک اشتقاق درونی القا شده

به وسیله e^* روی A باشد. در این صورت $d(e^*) = 0$ و نتیجه ۶ ایجاب می کند که d یک اشتقاق روی (A, π_e) است.

قضیه ۸. [۶، قضیه ۳.۲] فرض کنید X یک A -مدول هیلبرت چپ باشد. به علاوه فرض کنید $D : A \rightarrow A$ و

$\delta : (X, \pi_e) \rightarrow (X, \pi_e)$ اشتقاقی روی جبرهای باناخ باشند به طوری که $\delta(ax) = D(a)x + a\delta(x)$ و فرض کنید

δ اشتقاق درونی القا شده به وسیله y باشد، آنگاه

۱. اگر X انباشته باشد آنگاه D درونی است.

۲. اگر A یکدار باشد و $z \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $z, \langle z, y \rangle \in \text{Inv}(A)$ ، آنگاه D درونی است.

در قضیه ۸ دیدیم که، تحت شرایط خاص، اگر d -اشتقاق δ درونی باشد آن‌گاه d نیز درونی است. در این مرحله ممکن است این سوال مطرح شود که آیا عکس این قضیه نیز درست است؟ یعنی آیا درونی بودن d درونی بودن δ را ایجاب می‌کند؟ با ارائه مثال ۹ به این سوال پاسخ منفی می‌دهیم.

مثال ۹. فرض کنید H یک فضای هیلبرت تفکیک پذیر با پایه متعامد یکه شماره‌ای $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ باشد. در این صورت می‌توان H را با عمل $T \cdot x = T(x)$ به‌عنوان یک $\mathcal{K}(H)$ -مدول در نظر گرفت، که در آن $T \in \mathcal{K}(H)$ و $x \in H$. اگر روی H ضرب داخلی $\mathcal{K}(H)$ -مقدار را به‌وسیله $\langle x, y \rangle_{\mathcal{K}(H)} = \theta_{x,y}$ تعریف کنیم، H به یک C^* -مدول چپ روی $\mathcal{K}(H)$ تبدیل می‌شود. اکنون قرار دهید $e = e_1$ و فرض کنید d یک اشتقاق درونی روی A القا شده به‌وسیله $K = \theta_{e_3, e_2}$ باشد، در نتیجه برای هر $T \in \mathcal{K}(H)$ داریم $d(T) = K \circ T - T \circ K$. نگاهت $\delta : H \rightarrow H$ تعریف

شده به‌وسیله $\delta(x) = K(x)$ یک d -اشتقاق است زیرا برای هر $T \in \mathcal{K}(H)$ و $x \in H$ داریم

$$\delta(T \cdot x) = \delta(T(x)) = K(T(x)) = T(K(x)) + K(T(x)) - T(K(x)) = T \cdot (K(x)) + (K \circ T - T \circ K)(x) = T \cdot \delta(x) + d(T) \cdot x.$$

به‌علاوه چون $K^*(e) = \theta_{e_2, e_3}(e_1) = {}_H \langle e_1, e_3 \rangle e_2 = 0$ داریم

$${}_H \langle \delta(x), e \rangle = {}_{\mathcal{K}(H)} \langle K(x), e \rangle = \theta_{K(x), e} = \theta_{Kx, e} - \theta_{x, K^*e} = K \circ \theta_{x, e} - \theta_{x, e} \circ K = d(\theta_{x, e}) = d({}_{\mathcal{K}(H)} \langle x, e \rangle).$$

بنابراین قضیه ۵ ایجاب می‌کند که δ یک اشتقاق روی (H, π_e) است. اکنون اگر δ درونی باشد، $z \in H$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $x \in H$ داریم

$$\delta(x) = \pi_e(z, x) - \pi_e(x, z) = {}_H \langle z, e \rangle x - {}_H \langle x, e \rangle z.$$

اما برای $x = e_2$ داریم

$$e_3 = {}_H \langle e_2, e_2 \rangle e_3 = \theta_{e_3, e_2}(e_2) = \delta(e_2) = {}_H \langle z, e_1 \rangle e_2 - {}_H \langle e_2, e_1 \rangle z = {}_H \langle z, e_1 \rangle e_2.$$

بنابراین $e_3 = {}_H \langle z, e_1 \rangle e_2$ در حالی‌که $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ یک پایه متعامد یکه است. در نتیجه δ نمی‌تواند درونی روی (H, π_e) درونی باشد.

قضیه ۱۰ برخی شرایط مناسب برای برقراری عکس قضیه ۸ را فراهم می‌کند.

قضیه ۱۰. فرض کنید A یک‌دار و X یک A -مدول هیلبرت دو طرفه انباشته باشد. به‌علاوه فرض کنید

$${}_X \langle e, e \rangle = \langle e, e \rangle_X = 1_A \quad \text{و} \quad \delta \text{ یک } d\text{-اشتقاق روی } X \text{ باشد. اگر } \delta \text{ یک اشتقاق روی } (X, \pi_e) \text{ و } d \text{ درونی باشد آن‌گاه } \delta \text{ درونی است.}$$

اثبات. فرض کنید d یک اشتقاق درونی روی A ، القا شده به‌وسیله c ، باشد. چون X انباشته است، قضیه ۵ ایجاب می‌کند که

$${}_X \langle \delta(x), e \rangle = d({}_X \langle x, e \rangle) = c_X \langle x, e \rangle - {}_X \langle x, e \rangle c.$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} {}_X \langle \delta(x), e \rangle &= c_X \langle x, e \rangle - {}_X \langle x, e \rangle c_X \langle e, e \rangle = {}_X \langle c \cdot x, e \rangle - {}_X \langle {}_X \langle x, e \rangle c \cdot e, e \rangle \\ &= {}_X \langle c_X \langle e, e \rangle x, e \rangle - {}_X \langle {}_X \langle x, e \rangle \cdot (c \cdot e), e \rangle \\ &= {}_X \langle {}_X \langle c \cdot e, e \rangle x, e \rangle - {}_X \langle \pi_e(x, c \cdot e), e \rangle \\ &= {}_X \langle \pi_e(c \cdot e, x), e \rangle - {}_X \langle \pi_e(x, c \cdot e), e \rangle. \end{aligned}$$

اکنون چون X یک A -مدول هیلبرت دو طرفه انباشته است و $\langle e, e \rangle_X = 1_A$ ، نتیجه می‌گیریم که

$$\delta(x) = {}_X \langle \delta(x), e \rangle \cdot e = ({}_X \langle \pi_e(c \cdot e, x), e \rangle - {}_X \langle \pi_e(x, c \cdot e), e \rangle) \cdot e = \pi_e(c \cdot e, x) - \pi_e(x, c \cdot e).$$

بنابراین δ یک اشتقاق درونی القا شده به‌وسیله $c \cdot e$ روی (X, π_e) است و این برهان را کامل می‌کند.

نتیجه ۱۱. فرض کنید e یک عضو یکنانی از C^* -جبر یک‌دار A باشد. اگر d یک اشتقاق درونی القا شده به‌وسیله e^* روی A باشد، آن‌گاه d یک اشتقاق درونی روی (A, π_e) است.

اثبات. فرض کنید d یک اشتقاق درونی القا شده به وسیله e^* روی A باشد، در این صورت $d(e^*) = 0$. بنابراین نتیجه ۶ ایجاب می کند که d یک اشتقاق روی (A, π_e) است. حال با به کار بردن قضیه ۱۰، نتیجه می گیریم که اشتقاق d روی (A, π_e) درونی است.

C^* -ساختار روی مدول های هیلبرت دو طرفه

فرض کنید X یک A -مدول هیلبرت چپ باشد و فرض کنید e یک عضو دلخواه از X با $\|e\| = 1$ باشد. دیدیم که نگاشت $\pi_e : X \times X \rightarrow X$ تعریف شده به وسیله $\pi_e(x, y) = {}_X \langle x, e \rangle y$ یک ضرب روی X است که X را به یک جبر باناخ تبدیل می کند. این جبر باناخ را به وسیله (X, π_e) نشان دادیم. در این بخش، ما یک برگشت روی X قرار می دهیم که به وسیله آن (X, π_e) به یک C^* -جبر تبدیل می شود و نشان می دهیم این C^* -جبر را می توان با C^* -جبر عملگرهای الحاق پذیر روی X یکی گرفت.

در تمام این بخش X یک A -مدول هیلبرت دو طرفه است.

قضیه ۱۲. فرض کنید A یکدار باشد و e عضوی از X باشد که $\langle e, e \rangle_X = 1_A$ و نگاشت $\star : X \rightarrow X$ به وسیله $\langle e, x \rangle_X e := x^*$ را تعریف می کنیم. در این صورت X با ضرب π_e و برگشت \star یک C^* -جبر است.

اثبات. ابتدا نشان می دهیم که \star یک برگشت روی X است. برای این منظور، فرض کنید $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$. در این صورت داریم

$$(1) (\alpha x + y)^* = {}_X \langle e, \alpha x + y \rangle e = ({}_X \langle e, \alpha x \rangle + {}_X \langle e, y \rangle) \cdot e = \alpha {}_X \langle e, x \rangle_X \cdot e + \langle e, y \rangle \cdot e = \alpha x^* + y^* .$$

$$(2) (x^*)^* = ({}_X \langle e, x \rangle e)^* = {}_X \langle e, {}_X \langle e, x \rangle e \rangle e = {}_X \langle e, e \rangle_X \langle x, e \rangle e = {}_X \langle x, e \rangle e = x .$$

$$(3) (\pi_e(x, y))^* = {}_X \langle e, \pi_e(x, y) \rangle e = {}_X \langle e, {}_X \langle x, e \rangle y \rangle e = {}_X \langle e, y \rangle_X \langle e, x \rangle e = {}_X \langle e, y \rangle_X \langle e, e \rangle_X x^* = {}_X \langle {}_X \langle e, y \rangle e, e \rangle_X x^* \\ = {}_X \langle y^*, e \rangle_X x^* \\ = \pi_e(y^*, x^*)$$

بنابراین \star یک برگشت روی X است. اکنون نشان می دهیم که نرم X در خاصیت C^* صدق می کند.

$$\begin{aligned} \|\pi_e(x, x^*)\| &= \|{}_X \langle x, e \rangle x^*\| = \|{}_X \langle x, e \rangle_X \langle e, x \rangle e\| = \|{}_X \langle x, e \rangle_X \langle x, e \rangle e\| = \|{}_X \langle x, e \rangle_X \langle x, e \rangle e\| \\ &= \|{}_X \langle x, x \rangle e\| \\ &= \|{}_X \langle {}_X \langle x, x \rangle e, {}_X \langle x, x \rangle e \rangle\|^{1/2} \\ &= \|{}_X \langle x, x \rangle_X \langle e, e \rangle_X \langle x, x \rangle\|^{1/2} \\ &= \|{}_X \langle x, x \rangle_X \langle x, x \rangle\|^{1/2} \\ &= (\|{}_X \langle x, x \rangle\|^2)^{1/2} \\ &= \|{}_X \langle x, x \rangle\| \\ &= \|x\|^2 . \end{aligned}$$

به این ترتیب با این ساختار به یک C^* -جبر تبدیل می شود و این برهان را کامل می کند.

این C^* -جبر را با نماد (A, π_e, \star) نمایش می دهیم.

مثال ۱۳. فرض کنید e یک عضو یکانی از C^* -جبر یکدار A باشد. در این صورت با استفاده از قضیه ۱۲، A به عنوان یک A -مدول هیلبرت دو طرفه، به یک C^* -جبر با ساختار جدید (A, π_e, \star) تبدیل می شود.

قضیه ۱۴. فرض کنید A یکدار و e عضوی از X باشد که $\langle e, e \rangle_X = 1_A$. در این صورت $\Theta := \{\theta_{e, x} : x \in X\}$ یک C^* -زیر جبر $\mathcal{K}(X)$ است که با (X, π_e, \star) با Θ یکرخت طولیا است.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که $\Theta := \{\theta_{e,x} : x \in X\}$ یک C^* -زیر جبر $\mathcal{K}(X)$ است. به آسانی دیده می‌شود که Θ یک زیرفضای $\mathcal{K}(X)$ است. به علاوه $\theta_{e,x}\theta_{e,y} = \theta_{e,X\langle x,e \rangle y}$. بنابراین Θ یک زیر جبر $\mathcal{K}(X)$ است. حال نشان می‌دهیم که Θ تحت برگشت $\mathcal{K}(X)$ نیز بسته است. برای این منظور فرض می‌کنیم $x, y \in X$. در این صورت $\theta_{e,x}^*(y) = \theta_{x,e}(y) =_X \langle y, e \rangle x = y \langle e, x \rangle_X \langle e, e \rangle_X = y \langle e, X \langle x, e \rangle e \rangle_X =_X \langle y, e \rangle_X \langle x, e \rangle e =_X \langle y, X \langle e, x \rangle e \rangle e = \theta_{e,X\langle e,x \rangle e}(y)$. در نتیجه $\theta_{e,x}^* = \theta_{e,X\langle e,x \rangle e} \in \Theta$. سرانجام نشان می‌دهیم که Θ بسته است. فرض کنیم $T \in \bar{\Theta}$ و دنباله $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ به گونه‌ای باشد که دنباله $(\theta_{e,x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ به T همگرا است. با توجه به این که

$$\|x\| = \|_X \langle e, e \rangle x\| = \|\theta_{x,e}(e)\| \leq \|\theta_{x,e}\| \|\theta_{e,x}\| \leq \|x\| \|\theta_{e,x}\|,$$

نتیجه می‌گیریم که $\|\theta_{e,x}\| = \|x\|$. بنابراین $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ یک دنباله کشی در فضای باناخ X است و در نتیجه به عضوی مانند $x \in X$ همگرا است. حال چون $\|\theta_{e,x_n} - \theta_{e,x}\| = \|x_n - x\|$ نتیجه می‌گیریم که $T = \theta_{e,x}$ و Θ بسته است. حال نگاشت $\varphi : (X, \pi_e, \star) \rightarrow \Theta$ را به صورت $\varphi(x) = \theta_{e,x}$ برای هر $x \in X$ تعریف می‌کنیم. به سادگی می‌توان بررسی کرد که φ خطی و برو است. به علاوه

$$\varphi(\pi_e(x, y)) = \theta_{e, \pi_e(x, y)} = \theta_{e, X\langle x, e \rangle y} = \theta_{e,x} \theta_{e,y} = \varphi(x) \varphi(y).$$

به این ترتیب φ یک نگاشت حافظ ضرب است. در نهایت φ برگشت را نیز حفظ می‌کند، زیرا

$$\begin{aligned} \varphi(x^*)(y) &= \theta_{e,x^*}(y) = \theta_{e, X\langle e, x \rangle e}(y) =_X \langle y, e \rangle_X \langle x, e \rangle e =_X \langle y, e \rangle_X \langle x, e \rangle e =_X \langle y, e \rangle x \langle e, e \rangle_X \\ &=_X \langle y, e \rangle x \\ &= \theta_{x,e}(y) \\ &= \varphi(x)^*(y). \end{aligned}$$

در نتیجه برای هر $x \in X$ ، $\varphi(x^*) = \varphi(x)^*$ و این برهان را کامل می‌کند.

نتیجه ۱۵. با شرایط قضیه ۱۴، (X, π_e, \star) با $\mathcal{L}(X)$ یکریخت طولی است.

اثبات. فرض کنید $T \in \mathcal{L}(X)$ و $x \in X$. در این صورت

$$\begin{aligned} T(x) &= T(x \langle e, e \rangle_X) = T(X \langle x, e \rangle e) =_X \langle x, e \rangle T(e) \\ &= \theta_{T(e),e}(x). \end{aligned}$$

در نتیجه $T \in \Theta$ و این مطلب نشان می‌دهد که $\mathcal{L}(X) = \Theta$.

ملاحظه ۱۶. در [۴] نشان داده شده است که اگر A یکدار باشد آن‌گاه $\mathcal{K}(X) = \mathcal{L}(X)$. به علاوه زمانی که $X = A$

داریم $\mathcal{K}(X) \cong A$ از این‌رو، در مثال ۱۳، چون e یک عضو یکانی است، نتیجه ۱۵ ایجاب می‌کند که $A \cong (A, \pi_e, \star)$

منابع

1. Abbaspour Gh., Moslehian M. S., Niknam A., "Dynamical systems on Hilbert C^* -modules", Bull. Iranian Math. Soc., Vol. 31, No. 1, (2005) 25-35.
2. Brown L. G., Mingo J. A., Shen N.-T., "Quasi-multipliers and embeddings of Hilbert C^* -bimodules", Canad. J. Math., Vol. 46, No. 6 (1994) 1150-1174.
3. Kaplansky I., "Modules over operator algebras", Amer. J. Math., Vol. 75, (1953) 839-858.
4. Lance E. C., "Hilbert C^* -modules, LMS Lecture Note Series 210", Cambridge Univ. Press (1995).
5. Moslehian M. S., "On full Hilbert C^* -modules", Bull. Malays. Math. Soc., Vol. 24, No. 1, (2001) 45-47.
6. Sahleh A., Najarpisheh L., "Arens regularity and derivations of Hilbert modules with the certain product, University of Guilan Press", Journal of Algebra and Related Topics., Vol. 1, No. 1, (2013) 31-39.