روش تفاضلات متناهی برای حل معادله انتگرال-دیفرانسیل با مشتقات جزئی

مجید عرفانیان*
دانشگاه زابل، دانشکده علوم، گروه ریاضی
حامد زیدآبادی
دانشگاه فناوری‌های نوین سبزوار، گروه ریاضی

دریافت ۹۷/۰۴/۱۸ پذیرش ۹۸/۰۲/۲۰

چکیده

در این مقاله یک روش عددی بر مبنای تفاضلات متناهی برای حل مسئله انتگرال-دیفرانسیل با مشتقات جزئی با هستهٔ منفرد ارائه شده است. ابتدا یک الگورتیم عددی برای حل مسئله براساس طرح کرانک-نیکلسون با شرایط داده شده ارائه و سپس گسسته‌سازی انتگرال منفرد را برای حل این مسئله به‌کار می‌بریم. در ادامه برای نشان دادن کارایی روش بیان شده با مقایسهٔ جواب تقریبی و دقیق، با روش بی‌اسپلاین مکعبی نتیجه می‌گیریم که روش ارائه شده از دقت و کارائی لازم برخوردار است. در ادامه شکل تقریبی نیز رسم شده است. سرعت بالای محاسبات، سهولت در به‌دست آمدن و اطمینان از داشتن جواب تقریبی به‌دلیل اثبات پایداری از مزایای این روش است.

واژه‌های کلیدی: مسئله انتگرال-دیفرانسیل با هسته منفرد، روش تفاضلات متناهی، تحلیل پایداری.
رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 65R20, 45K05

مقدمه

پدیده‌های طبیعی گوناگونی همانند حرارت، موج و حرکت سیالات کاربرد فراوانی در مدل کردن معادلات دیفرانسیل و معادله انتگرال- دیفرانسیل با مشتقات جزئی دارند. به‌دلیل پیچیدگی و گستردگی این نوع معادلات، تعداد روش‌های مرسوم و پر استفاده محدود بوده است و تنها روش‌های تحلیلی "روش سری فوریه" یا "روش مشخصه" به اصلی ترین‌ابزار در حل رده‌ای مشخص از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تبدیل شده است.

از آن‌جاکه روش تفاضلات متناهی روی دامنه‌های نامنظم به‌خوبی کار می‌کند، ایده اصلی این مقاله بر پایه استفاده از این روش است، برای این منظور ابتدا دامنهٔ پیوستهٔ مسئله را گسسته‌سازی نموده، سپس تابع مجهول یا مشتقات آن به‌وسیلهٔ تکنیکی عددی تقریب زده می‌شود . برای رسیدن به این مهم ابتدا معادلهٔ دیفرانسیل را با کمک انتگرال‌گیری به‌صورت ساده تبدیل می‌کنیم. سپس تابع مجهول به‌وسیلهٔ تعداد متناهی تابع پایه‌ای با ضرایب مجهول تقریب می‌کنیم. پس از تبدیل به دستگاه ماتریسی، و حل آن ضرایب مجهول و در نتیجه خود تابع مجهول مشخص می‌شود. از روش تفاضلات متناهی برای حل مسائل مختلف ریاضی و فیزیک از جمله در جریان سیال، چهاربردار پتانسیل الکترومغناطیسی، تابش‌های انتقال حرارت، لایه مرزی خطی و انتقال جرم می‌توان بهره برد [۱]، [۳]. محققان بسیاری

*نویسنده مسئول erfaniyan@uoz.ac.ir

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.12.1]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.79]

برای حل معادلات انتگرال و معادلات دیفرانسیل از روش تفاضلات متناهی استفاده کرده‌اند مانند اتکینسون [۴] لیکیب[۵]، ندلس[۶] و عرفانیان در [۷]. در این مقاله از روش تفاضلات متناهی برای حل معادله انتگرال-دیفرانسیل با مشتقات جزئی استفاده شده است. تحقیقات فراوانی با روش‌های مختلف برای حل معادله انتگرال-دیفرانسیل صورت گرفته است. برای مثال مؤمنی در [۸] برای معادله انتگرال دیفرانسیل یکتایی و وجود جواب را در حالت محلی و عمومی به‌دست آورد. هم‌چنین روش‌های عددی مختلفی برای تقریب زدن این معادلات ارائه شده است ، برای نمونه بابلیان و سلیمی در [۹] با استفاده از توابع بلاک- پالس، در [۱۱] با استفاده از روش گلرکین طیفی برنشتاین هم‌محلی مسئله را حل کرده‌اند. هم‌چنین عرفانیان در [۱۲]-[۱۶] با استفاده از موجک هار جوابی برای معادلۀ انتگرال و معادله انتگرال دیفرانسیل به‌دست آورده‌اند.

در این مقاله معادله انتگرال-دیفرانسیل همرفت-نفوذی با هسته منفرد

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}+\lambda\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}-\beta\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}=\int_0^t K(t-s)\,w(x,s)\,ds+F(x,t), \qquad (۱)$$

را برای $x\in(0,1)$ و $t\in(0,1)$ و شرط اولیه $w(x,0)=g(x)$ و شرایط مرزی

$$w(0,t)=p(t), \qquad w(1,t)=q(t),$$

در نظر می‌گیریم که در آن λ و β ثابت‌های مثبت و توابع F، g، p و q توابعی پیوسته و معلوم است. که هسته منفرد ضعیف معادلۀ انتگرال، بدین‌صورت تعریف می‌شود

$$K(t-s)=(t-s)^{-\alpha}, \qquad 0<\alpha<1.$$

حل عددی مسئله

در این بخش، یک الگورتیم عددی برای حل معادلۀ (۱) با شرایط داده شده ارائه می‌دهیم، و با استفاده از روش تفاضلات متناهی (براساس طرح کرانک-نیکلسون) انتگرال منفرد را گسسته‌سازی و سپس اقدام به حل مسئله می‌کنیم.

۱. پیاده‌سازی روش تفاضلات متناهی

با استفاده از فرمول‌های سه‌نقطه‌ای و دو نقطه‌ای عملگرهای $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial}{\partial t}$ را به‌صورت (۲) گسسته‌سازی می‌کنیم:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}w(x_i,t_{k+1})\approx\frac{w_{i+1}^{k+1}-2w_i^{k+1}+w_{i-1}^{k+1}}{h^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial t}w(x_i,t_{k+1})\approx\frac{w_i^{k+1}-w_i^k}{\tau}. \qquad (۲)$$

با استفاده از (۲) شکل تفاضلات متناهی صریح برای معادلۀ (۱) به‌صورت (۳) حاصل می‌شود:

$$\frac{w_i^{k+1}-w_i^k}{\tau}+\theta\left(\lambda\frac{w_{i+1}^{k+1}-w_{i-1}^{k+1}}{2h}-\beta\frac{w_{i+1}^{k+1}-2w_i^{k+1}+w_{i-1}^{k+1}}{h^2}\right)+(1-\theta)\left(\lambda\frac{w_{i+1}^{k}-w_{i-1}^{k}}{2h}-\beta\frac{w_{i+1}^{k}-2w_i^{k}+w_{i-1}^{k}}{h^2}\right)$$
$$=\int_0^{t_{k+1}}(t_{k+1}-s)^{-\alpha}\,w(x_i,s)\,ds+F(x_i,t_{k+1}) \qquad (۳)$$

از طرفی برای قسمت انتگرال سمت راست معادله اخیر مطابق رابطه (۴) داریم:

$$\int_0^{t_{k+1}}(t_{k+1}-s)^{-\alpha}\,w(x_i,s)\,ds\approx\sum_{j=0}^{k}w(x_i,t_{k-j+1})\int_{t_j}^{t_{j+1}}s^{-\alpha}ds=\frac{\tau^{1-\alpha}}{1-\alpha}\sum_{j=0}^{k}l_j\,w(x_i,t_{k-j+1}),$$

(۴)

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.12.1]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.79]

که $l_j=\left((j+1)^{1-\alpha}-(j)^{1-\alpha}\right)$.

با جای‌گذاری (۴) در رابطهٔ (۳) و $\theta=\frac{1}{2}$، با انجام فرایند ساده‌سازی می‌یابیم

$$\left(-r\beta+\frac{1}{2}r\lambda h\right)w_{i+1}^{k+1}+\left(1+2r\beta-\frac{\tau^{2-\alpha}}{1-\alpha}\right)w_i^{k+1}+\left(-r\beta-\frac{1}{2}r\lambda h\right)w_{i-1}^{k+1}$$
$$=\left(r\beta-\frac{1}{2}r\lambda h\right)w_{i+1}^{k}+\left(1-2r\beta\right)w_i^{k}+\left(r\beta+\frac{1}{2}r\lambda h\right)w_{i-1}^{k}+\frac{\tau^{2-\alpha}}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{k}l_j\,w_i^{k-j+1}+\tau F(x_i,t_{k+1}),$$

(۵)

$$r=\frac{\tau}{2h^2},\qquad w_i^k=w(x_i,t_k).$$

با استفاده از رابطهٔ (۵) برای $i=1,2,\ldots,M-1$ و $k=0,1,\ldots,N-1$، شکل ماتریسی زیر نتیجه می‌شود

$$AW^{k+1}=BW^k+G^{k+1},\qquad (۶)$$

که در آن

$$A=\begin{pmatrix}\mu_2&\mu_3&0&0&0&\ldots&0&0&0\\ \mu_1&\mu_2&\mu_3&0&0&\ldots&0&0&0\\ 0&\mu_1&\mu_2&\mu_3&0&\ldots&0&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&\ldots&0&0&\mu_1&\mu_2&\mu_3\\ 0&0&0&\ldots&0&0&0&\mu_1&\mu_2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\eta_2&\eta_3&0&0&0&\ldots&0&0&0\\ \eta_1&\eta_2&\eta_3&0&0&\ldots&0&0&0\\ 0&\eta_1&\eta_2&\eta_3&0&\ldots&0&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&\ldots&0&0&\eta_1&\eta_2&\eta_3\\ 0&0&0&\ldots&0&0&0&\eta_1&\eta_2\end{pmatrix},$$

$$W^{k+1}=\left(w_1^{k+1},\quad w_2^{k+1},\quad \ldots\quad ,w_{M-2}^{k+1},\quad w_{M-1}^{k+1}\right)^T,$$

$$W^{k}=\left(w_1^{k},\quad w_2^{k},\quad \ldots\quad ,w_{M-2}^{k},\quad w_{M-1}^{k}\right)^T,$$

$$G^{k+1}=\begin{pmatrix}-\mu_1\,p(t_{k+1})+\frac{\tau^{2-\alpha}}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{k}l_j\,w_1^{k-j+1}+\tau F(x_1,t_{k+1})+\eta_1\,p(t_k)\\ \frac{\tau^{2-\alpha}}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{k}l_j\,w_2^{k-j+1}+\tau F(x_2,t_{k+1})\\ \frac{\tau^{2-\alpha}}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{k}l_j\,w_3^{k-j+1}+\tau F(x_3,t_{k+1})\\ \vdots\\ \frac{\tau^{2-\alpha}}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{k}l_j\,w_{M-2}^{k-j+1}+\tau F(x_{M-2},t_{k+1})\\ -\mu_3\,q(t_{k+1})+\frac{\tau^{2-\alpha}}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{k}l_j\,w_{M-1}^{k-j+1}+\tau F(x_{M-1},t_{k+1})+\eta_3\,q(t_k)\end{pmatrix}.$$

است که

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.12.1]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.79]

$$\mu_1=\left(-r\beta-\frac{1}{2}r\lambda h\right),\qquad \mu_2=\left(1+2r\beta-\frac{\tau^{2-\alpha}}{1-\alpha}\right),\qquad \mu_3=\left(-r\beta+\frac{1}{2}r\lambda h\right),$$
$$\eta_1=\left(r\beta+\frac{1}{2}r\lambda h\right),\qquad \eta_2=\left(1-2r\beta\right),\qquad \eta_3=\left(r\beta-\frac{1}{2}r\lambda h\right),$$

بنابراین دستگاه خطی (۶) در دامنهٔ

$$Q=\left\{(x,t)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le t\le 1\right\},$$

و نقاط گره‌ای (x_i,t_k)،

$$x_i=ih,\quad i=1,2,\ldots,M-1,\qquad h=\frac{1}{M},$$
$$t_k=k\tau,\quad k=0,1,\ldots,N,\qquad \tau=\frac{1}{N},$$

جواب تقریبی $w(x,t)$ را به‌وجود می‌آورد.

بردار اولیه W^0 را می‌توان با کمک شرط اولیه $w(x,0)=g(x)$ برای $x_1,x_2,\ldots,x_{M-1}$ به‌دست آورد، داریم

$$W^0=\left(g(x_1),\quad g(x_2),\quad \ldots\quad ,g(x_{M-2}),\quad g(x_{M-1})\right)^T.$$

تحلیل خطا

یکی از مهم‌ترین بخش‌ها در کارهای عددی مشخصا کارا و قابل اثبات و استناد بودن آن است. بنابراین در این روش به‌منظور اطمینان بخشی با بیان یک لم و قضیه پایداری روش را اثبات می‌کنیم.

لم ۱. [۱۰] *مقادیر ویژه ماتریس A از رابطهٔ*

$$\gamma_s=\mu_2+2\sqrt{\mu_1\mu_3}\cos\left(\frac{s\pi}{M}\right),\qquad s=1,2,\ldots,M-1.$$

محاسبه می‌شود.

قضیهٔ ۲. *شرط پایداری در طرح تفاضلی* (۵)، *آن است که شرط زیر برقرار باشد*

$$\left|\mu_2+2\sqrt{\mu_1\mu_3}\cos\left(\frac{s\pi}{M}\right)\right|>1.$$

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که ماتریس A قطری اکید است، برای این منظور نشان می‌دهیم که

$$\mu_2>\mu_1+\mu_3,$$

با جای‌گذاری مقادیر μ_1، μ_2 و μ_3 و بعد از ساده‌سازی داریم:

$$1+2r\beta-\frac{\tau^{2-\alpha}}{1-\alpha}>-2r\beta,$$
$$\Rightarrow\ 1+4r\beta>\frac{\tau^{2-\alpha}}{1-\alpha},$$
$$\Rightarrow\ 1+4r\beta>(1+4r\beta)(1-\alpha)>\tau^{2-\alpha}>\tau^{-\alpha},$$
$$\Rightarrow\ (1+4r\beta)^{\alpha}>\tau,$$

هم‌چنین، داریم

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.12.1]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.79]

$$1+4r\beta > (1+4r\beta)^{\alpha} > \tau,$$
$$\Rightarrow\ 1+\frac{4\tau\beta}{2h^2} > \tau,$$
$$\Rightarrow (1-\tau)h^2 > -2\tau\beta,$$

که به‌وضوح برقرار است، بنابراین ماتریس A قطری اکید است و در نتیجه وارون‌پذیر است. با توجه به معادلهٔ (۶) به ازای $i = 1,2,\ldots,M-1$، داریم:

$$W^{k+1} = A^{-1}\left(BW^{k} + G^{k+1}\right), \qquad (۷)$$

بنابراین عامل انتشار خطا در رابطهٔ (۷) ماتریس A^{-1} است. بنابراین طرح تفاضلی (۵) به‌ازای $i = 1,2,\ldots,M-1$، پایدار است هنگامی که اندازهٔ هر یک از مقادیر ویژه ماتریس A^{-1} از یک بیش‌تر نباشد. از طرفی طبق لم ۱ مقادیر ویژه ماتریس A بدین‌صورت است:

$$\gamma_s = \mu_2 + 2\sqrt{\mu_1\mu_3}\left(\cos\left(\frac{s\pi}{M}\right)\right), \quad s = 1,2,\ldots,M-1.$$

که برای برقراری رابطهٔ مذکور باید $\mu_1\mu_3 \geq 0$. با قرار دادن مقادیر μ_1 و μ_3 داریم:

$$\left(-r\beta - \frac{1}{2}r\lambda h\right)\left(-r\beta + \frac{1}{2}r\lambda h\right) \geq 0,$$
$$\left(r\beta + \frac{1}{2}r\lambda h\right)\left(r\beta - \frac{1}{2}r\lambda h\right) = r^2\beta^2 - \frac{1}{4}r^2\lambda^2h^2 \geq 0,$$
$$r^2\beta^2 \geq \frac{1}{4}r^2\lambda^2h^2 \Rightarrow r\beta \geq \frac{1}{2}r\lambda h \Rightarrow \beta \geq \frac{1}{2}\lambda h.$$

یا $h \leq \frac{2\beta}{\lambda}$ ، است، بنابراین مقادیر ویژه ماتریس A^{-1} طبق رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\zeta_s = \frac{1}{\mu_2 + 2\sqrt{\mu_1\mu_3}\cos\left(\frac{s\pi}{M}\right)}, \qquad s = 1,2,\ldots,M-1.$$

و از آن‌جاکه باید $|\zeta_k| < 1$، بنابراین باید

$$\left|\mu_2 + 2\sqrt{\mu_1\mu_3}\cos\left(\frac{s\pi}{M}\right)\right| > 1,$$

از این‌رو حکم برقرار است.

نتایج عددی

در این بخش، هدف اصلی بررسی کارایی روش ارائه شده برای حل معادله (۱) است. بنابراین به‌منظور بررسی کارایی بهتر روش ارائه شده نرم‌های L_2 و L_∞ بین جواب دقیق و تقریبی به‌صورت:

$$L_2 = \sqrt{\frac{1}{N+1}\frac{1}{M-1}\sum_{k=1}^{N+1}\sum_{i=1}^{M-1}\left(w(x_i,t_k)^{exact} - w(x_i,t_k)^{numerical}\right)^2},$$
$$L_\infty = \max_{\substack{1\le i\le M-1\\ 1\le k\le N+1}}\left|w(x_i,t_k)^{exact} - w(x_i,t_k)^{numerical}\right|,$$

تعریف می‌کنیم. هم‌چنین الگورتیم عددی زیر را برای حل مسئله براساس طرح کرانک-نیکلسون با شرایط داده شده بیان و بر اساس این الگوریتم گسسته‌سازی انتگرال منفرد را برای حل عددی مسئله در بخش ۲ استفاده کردیم.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.12.1]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.79]

الگوریتم

- ابتدا گسسته‌سازی زمانی و مکانی را انجام می‌دهیم.
- انتگرال منفرد را گسسته‌سازی می‌کنیم.
- فرم ماتریسی مسئله را به‌دست می‌آوریم.
- با حل دستگاه حاصل، جواب تقریبی مسئله را به‌دست می‌آوریم.

در ادامه برای نشان دادن کارایی روش بیان شده جواب تقریبی و دقیق، به‌دست آمده را با روش بی‌اسپلاین مکعبی (CBSM[1]) نیز مقایسه کرده‌ایم.

مثال ۱. *معادله انتگرال-دیفرانسیل همرفت-نفوذی زیر را در نظر بگیرید:*

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}+\lambda\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}-\beta\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}=\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\, w(x,s)\,ds+F(x,t),\qquad 0\le x\le 1,\qquad 0\le t\le 1,$$

که در آن $\lambda=1$، $\beta=1$ و شرایط اولیه و مرزی به‌صورت

$$w(x,0)=2\sin^2(x),\qquad w(0,t)=0,\qquad w(1,t)=2(1+t)\sin^2(1),\qquad 0\le x\le 1,\quad 0\le t\le 1.$$

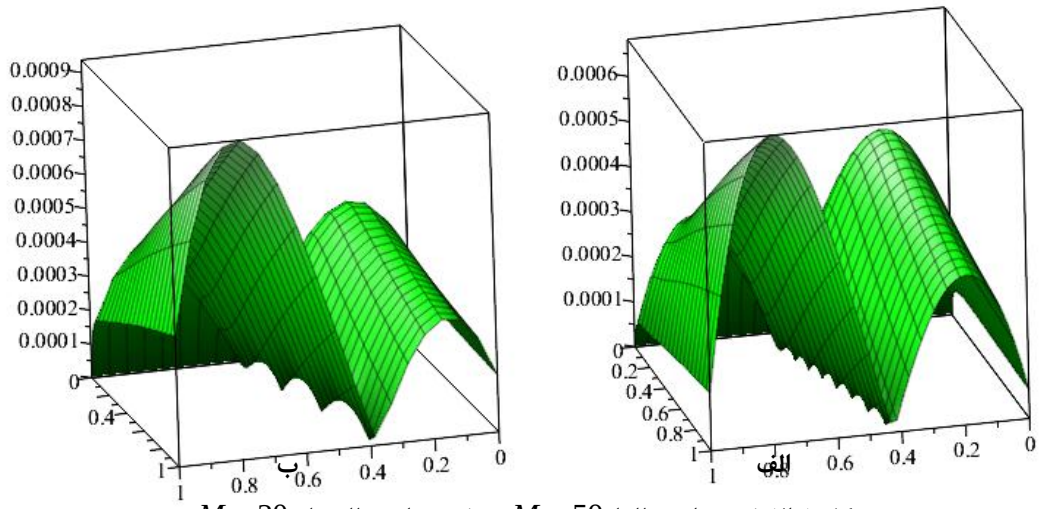
است. جواب دقیق مسئله بدین‌صورت است:

$$w(x,t)=2(t+1)\sin^2(x).$$

نتایج عددی مربوط به تقسیمات زمانی مختلف در جدول زیر نمایش داده شده است. هم‌چنین به‌منظور نشان دادن دقت روش ارائه شده، نمودارهای خطاهای آن‌ها نیز رسم شده است.

جدول ۱. مقایسهٔ بین خطای روش‌ها به‌ازای مقادیر مختلف M

M	$\frac{L_2}{FDM}$	$\frac{L_\infty}{FDM}$	$\frac{L_2}{CBSM}$	$\frac{L_\infty}{CBSM}$
۲۰	۰/۰۰۰۵۵۲	۰/۰۰۰۹۳۶	۰/۰۰۴۷۴۱	۰/۰۰۹۴۰
۵۰	۰/۰۰۰۴۰۰	۰/۰۰۰۶۸۲	۰/۰۰۴۸۴۸	۰/۰۰۹۷۱



شکل ۱. الف) نمودار خطا با $M=50$، ب) نمودار خطای با $M=20$

مثال ۲. *مسئلهٔ انتگرال-دیفرانسیل همرفت-نفوذی زیر را در نظر بگیرید:*

1. Cubic B-Spline Method

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.12.1]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.79]

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}+\lambda\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}-\beta\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}=\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{5}}\, w(x,s)\,ds+F(x,t),\qquad 0\le x\le 1,\qquad 0\le t\le 1$$

که در آن $\lambda=1$، $\beta=2$ و شرایط اولیه و مرزی بدین‌صورت است:

$$w(x,0)=\left(x^2+x+1\right),\qquad w(0,t)=(t+1)^2,\qquad w(1,t)=3(t+1)^2,\qquad 0\le x\le 1,\qquad 0\le t\le 1.$$

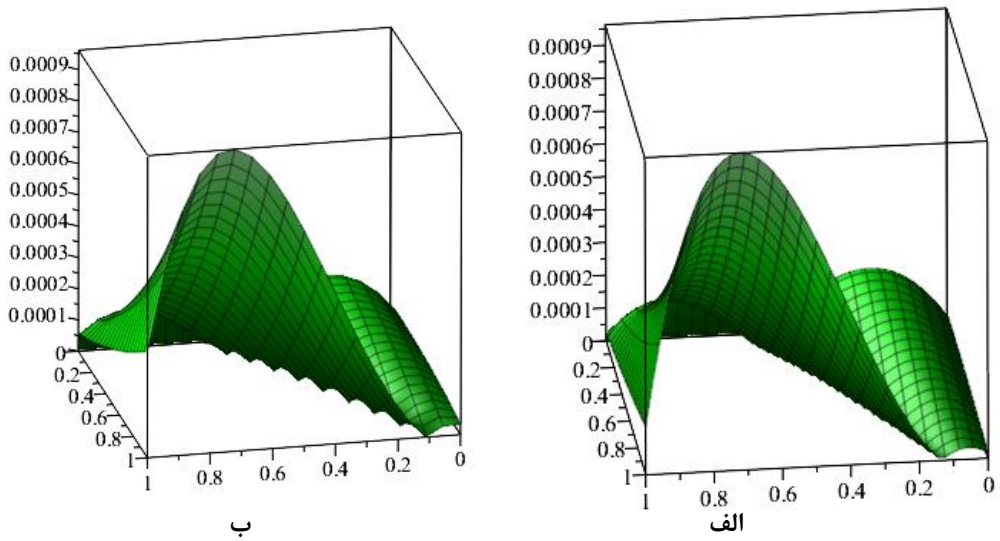
جواب دقیق مسئله بدین‌صورت است:

$$w(x,t)=(t+1)^2\left(x^2+x+1\right).$$

نتایج عددی مربوط به تقسیمات زمانی مختلف در جدول ۲ نمایش داده شده است و برای نشان دادن کارایی روش بیان شده با مقایسه جواب تقریبی و دقیق، با روش بی‌اسپلاین مکعبی نتیجه می‌گیریم که روش ارائه شده دقت و کارائی لازم را دارد. هم‌چنین به‌منظور نشان دادن دقت روش ارائه شده، نمودارهای خطاهای آن‌ها نیز رسم شده است.

جدول۲. مقایسهٔ بین خطای روش‌ها برای مقادیر مختلف M

M	$\frac{L_2}{FDM}$	$\frac{L_\infty}{FDM}$	$\frac{L_2}{CBSM}$	$\frac{L_\infty}{CBSM}$
۲۰	۰/۰۰۰۶۱۳	۰/۰۰۰۹۶۱	۰/۰۰۲۸۰۴	۰/۰۰۵۳۹۷
۵۰	۰/۰۰۰۶۰۴	۰/۰۰۰۹۶۲	۰/۰۰۱۳۷۱	۰/۰۰۲۸۶۷



شکل ۲ . الف) نمودار خطا به‌ازای $M=50$، ب) نمودار خطای به‌ازای $M=20$

مثال ۳. *مسئلهٔ انتگرال-دیفرانسیل همرفت-نفوذی زیر را در نظر بگیرید:*

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}+\lambda\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}-\beta\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}=\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{5}}\, w(x,s)\,ds+F(x,t),\qquad 0\le x\le 1,\qquad 0\le t\le 1$$

که در آن $\lambda=1$، $\beta=2$ و شرایط اولیه و مرزی بدینصورت است:

$$w(x,0)=x,\qquad w(0,t)=0,\qquad w(1,t)=e^{2t}(t+1),\qquad 0\le x\le 1,\qquad 0\le t\le 1.$$

جواب دقیق مسئله بدین‌صورت است:

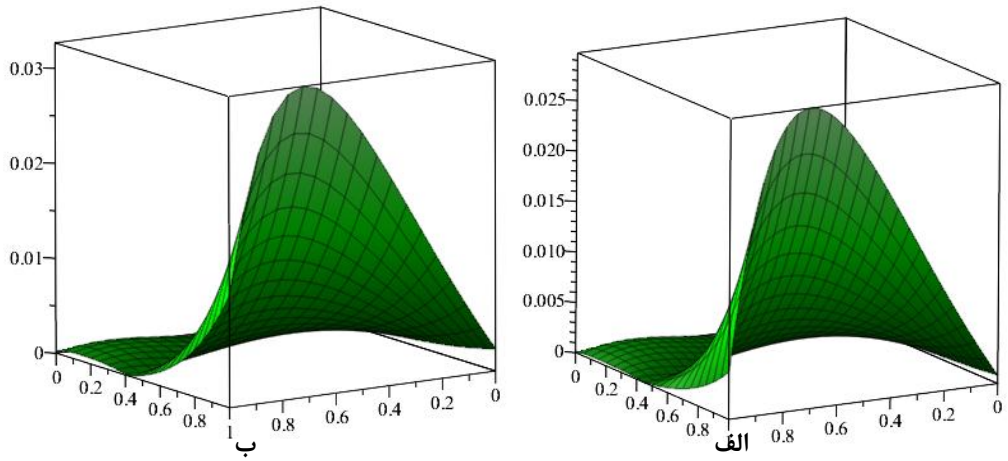
$$w(x,t)=e^{2xt}(tx+1)x.$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.12.1]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.79]

نتایج عددی مربوط به تقسیمات زمانی مختلف در جدول ۳ نمایش داده شده است. هم‌چنین به‌منظور نشان دادن دقت روش ارائه شده، نمودارهای خطاهای آن‌ها نیز رسم شده است.

جدول ۳. مقایسه بین خطای روش‌ها برای مقادیر مختلف M

M	$\frac{L_2}{FDM}$	$\frac{L_\infty}{FDM}$	$\frac{L_2}{CBSM}$	$\frac{L_\infty}{CBSM}$
۲۰	۰/۰۲۲۷۷۱	۰/۰۳۲۶۸۶۲	۰/۰۱۶۶۲۸	۰/۰۱۵۰۷۴
۵۰	۰/۰۲۰۳۹۱	۰/۰۲۹۷۲۱	۰/۰۵۸۶۶۹	۰/۰۵۲۳۶۰



شکل ۳. الف) نمودار خطا به‌ازای $M = 50$، ب) نمودار خطای به ازای $M = 20$

نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش عددی براساس روش تفاضلات متناهی برای حل مسئله انتگرال-دیفرانسیل با مشتقات جزئی و هسته منفرد به‌کار برده شد. از مثال‌های ارائه شده می‌توان نتیجه گرفت که روش عددی ارائه شده دارای دقت و کارائی مطلوب برای حل این مسئله است.

سپاس‌گزاری

این پژوهش با حمایت مالی دانشگاه زابل (شماره گرنت: UOZ- GR -9718-17) انجام شده است. بدین‌وسیله مراتب قدردانی و تشکر خود را از معاونت پژوهش و فناوری دانشگاه زابل اعلام می‌کنیم.

منابع

1. Ames W. F., "Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering", Academic Press, New York (1965).
2. Sparrow E. M., "Application of Variational Method to Radiation Heat-Transfer Calculations", J. Heat Transfer, vol. 82, ser. C (1960) 375-380.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.12.1]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.79]

3. Siekmann J., "The Laminar Boundary Layer along a Flat Plate", Z. Flugwiss., vol. 10 (1962) 278-281.
4. Atkinson K. E., "A Survey of Numerical Methods for the Solution of Fredholm Integral Equations of the Second Kind, Society for Industrial and Applied Mathematics", Philadelphia, PA (1976).
5. Ikebe Y., "The Galerkin method for the numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind", SIAM Rev.,(14) (3) (1972) 465-491.
6. Nedelec J. C., "Approximation des quations intgrales en mcanique et physique, Centre de Mathematiques", Ecole Poly-technique, Palaiseau (1977).
7. Erfanian M., Zeidabadi H., "Approximate solution of linear Volterra integro-differential equation by using cubic B-spline finite element method in the complex plane", Advances in Difference Equations, 62 (1) (2019).
8. Momani S. M., "Local and global existence theorems on fractional integro-differential equations", Journal of Fractional Calculus 18 (2000) 81-86.
9. Babolian E., Salimi Shamloo A., "Numerical solution of Volterra integral and integro-differential equations of convolution type by using operational matrices of piecewise constant orthogonal functions", (214) (2) (2008) 495-508.
10. Smith G. D., "Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods", Oxford University Press (1986).
11. Erfanian M., Zeidabadi H., "Using of Bernstein spectral Galerkin method for solving of weakly singular Volterra–Fredholm integral equations", Mathematical Sciences. Vol. 12 (2018) 103-109.
12. Erfanian M., Gachpazan M., Beiglo H., "A new sequential approach for solving the integro-differential equation via Haar wavelet bases", Computational Mathematics and Mathematical Physics Springer. Vol 57(2) (2017) 297-305.
13. Erfanian M., Mansoori A., "Solving the nonlinear integro-differential equation in complex plane with rationalized Haar wavelet", Mathematics and Computers in Simulation, doi: 10.1016/j.matcom.2019.03.006 (2019).
14. Erfanian M., Zeidabadi H., "Solving of nonlinear Fredholm integro-differential equation in a complex plane with rationalized Haar wavelet bases", Asian-European Journal of Mathematics, 1950055 (15 pages), DOI:10.1142/S1793557119500554 (2019).

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-24]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.12.1]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.79]

15. Erfanian M., Gachpazan M., Beiglo H., "Solving nonlinear Volterra integro-differential equation by using Legendre polynomial approximations", Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization,Vol 4(2) (2014) 73-83.

16. Erfanian M.**,** "The approximate solution of nonlinear mixed Volterra-Fredholm Hammerstein integral equations with RH wavelet bases in a complex plane**",** Mathematical Methods in the Applied Sciences (ISI), 41(18) (2018) 8942-8952.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-24]

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.12.1]

[DOI: 10.52547/mmr.6.1.79]