(نشریه علوم دانشگاه خوارزمی)

توسیع مرکزی جامع برای سوپرجبر لی حاصل از ضرب تنسوری یک جبر شرکت‌پذیر جابه‌جایی و یک سوچرجبر لی

ملیحه یوسف‌زاده
دانشگاه اصفهان، گروه ریاضی

دریافت ۹۷/۰۵/۲۱ پذیرش ۹۸/۰۳/۰۸

چکیده

بررسی نمایش‌های توسیع‌های مرکزی سوپرجبرهای لی به‌علت کاربردشان در بررسی رفتار سیستم‌های فیزیکی همواره مورد علاقهٔ ریاضی‌دانان و هم‌چنین فیزیک‌دانان بوده است. در این راستا دست‌یابی به توسیع‌های مرکزی سوپرجبرهای لی بسیار مهم است و اولین سوال در این زمینه، یافتن توسیع‌های مرکزی جامع برای سوپرجبرهای لی است. بررسی توسیع مرکزی جامع جبرهای $\mathfrak{g}:=A\otimes\mathfrak{k}$، به‌ازای یک جبر شرکت‌پذیر جابه‌جایی یک‌دار A و یک جبر لی با بعد متناهی ساده $\mathfrak{k}$، در سال ۱۹۸۴ انجام گرفت. پس از آن در سال۲۰۱۱، توسیع مرکزی جامع برای $\mathfrak{g}$، برای حالتی که $\mathfrak{k}$ یک سوپرجبر لی بعد متناهی کلاسیک پایه‌ای است، بررسی شد. در این مقاله توسیع مرکزی جامع را برای کلاسی از سوپرجبرهای به فرم $A\otimes\mathfrak{k}$ بررسی می‌کنیم؛ این کلاس، (سوپر)جبرهایی که در بالا به آن اشاره شد را در بر دارد. روش به‌کار گرفته شده در این مقاله، کاملاً متفاوت از روش‌های قبلی است و به‌علاوه نتایج آن‌ها را پوشش می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: سوپرجبرهای جریانی، توسیع مرکزی، دوهم‌دور، توسیع مرکزی جامع

مقدمه

در تحقیقات مرتبط با جبرها و سوپرجبرهای لی، بررسی نمایش جبرها و هم‌چنین بررسی مفهومی به‌نام توسیع مرکزی[1]، از مسایل مهمی هستند که توجه ریاضی‌دانان زیادی را به‌خود جلب کرده‌اند. مسئله نمایش جبرها به‌علت کاربردشان در بررسی سیستم‌های فیزیکی برای فیزیک‌دانان نیز اهمیت دارد. در این راستا، بررسی نمایش‌های تصویری (سوپر) جبرهای لی جایگاه ویژه‌ای دارد. نمایش‌های تصویری[2] یک (سوپر) جبر لی $\mathcal{G}$، در واقع نمایش‌های توسیع‌های مرکزی از $\mathcal{G}$ هستند. بنابراین بررسی نمایش‌های تصویری یک (سوپر)جبر لی از یک سو مستلزم یافتن توسیع‌های مرکزی و از سوی دیگر نیازمند بررسی نمایش‌های آن‌ها است. در [۷]، به بررسی نمایش‌های تصویری یکانی[3] از سوپرجبرهایی که به سوپرجبرهای جریانی[4] معروف هستند پرداخته شده است؛ بدین‌ترتیب که ابتدا توسیع‌های مرکزی این جبرها شناخته و سپس نمایش‌های یکانی آنها دسته‌بندی شده است. سوپرجبرهای جریانی به‌صورت $A\otimes\mathfrak{k}$ هستند که A یک سوپرجبر شرکت‌پذیر سوپرجابه‌جایی و $\mathfrak{k}$ یک سوپرجبر لی است (مثال ۵ را ملاحظه کنید).

مفهوم توسیع مرکزی از یک سوپرجبر لی $\mathcal{G}$ همانگونه که از نام آن تداعی می‌شود، دست‌یابی به سوپرجبر لی جدیدی است که مرکز آن گسترش یافته مرکز $\mathcal{G}$ است (تعریف ۱۰ را ملاحظه کنید). اولین سوالی که در بررسی

*نویسنده مسئول ma.yousofzadeh@ipm.ir

1. Central extension
2. Projective representation
3. Unitary
4. Current superalgebra

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.5.1]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.165]

توسیع‌های مرکزی $\mathcal{G}$ مطرح می‌شود، یافتن یک توسیع مرکزی جامع[1] برای $\mathcal{G}$ است. در [۵]، به بررسی توسیع مرکزی جامع جبرهای $\mathfrak{g}:=A\otimes\mathfrak{k}$، به‌ازای یک جبر شرکت‌پذیر جابه‌جایی یک‌دار A و یک جبر لی بعد متناهی ساده $\mathfrak{k}$، پرداخته شده است. ثابت شده است که توسیع مرکزی جامع برای $\mathfrak{g}$ به‌صورت $\mathfrak{g}\oplus\overline{\Omega}^1(A)$ است که در آن $\overline{\Omega}^1(A)$ مدول مشتقات کاهلِر[2] به پیمانه فرم‌های دقیق است (به بخش ۳ مراجعه شود). پس از آن در [۴]، توسیع مرکزی جامع برای $\mathfrak{g}$، برای حالتی که $\mathfrak{k}$ یک سوپرجبر لی بعد متناهی کلاسیک پایه‌ای است، بررسی شد. در این مقاله توسیع مرکزی جامع را برای کلاسی از سوپرجبرهای جریانی بررسی می‌کنیم. روش به‌کار گرفته شده، کاملاً متفاوت از روش‌های قبلی است و به‌علاوه نتایج آن‌ها را پوشش می‌دهد. در بخش دوم مقدمات لازم در اختیار خوانندگان قرار داده می‌شود؛ مطالب به‌گونه‌ای بیان شده‌اند که خوانندگان ناآشنا با سوپرجبرهای لی نیز بتوانند مطالب را دنبال کنند و در نهایت قضیه اصلی در بخش سوم ثابت می‌شود.

توسیع مرکزی

در این بخش، مقدماتی که برای فصل بعد نیاز داریم را مطرح می‌کنیم. گرچه تمامی مطالب مورد نیاز بیان شده‌اند، از اثبات‌های معمول شناخته شده در مبحث سوپرجبرهای لی صرف‌نظر کرده‌ایم. در طول این مقاله، تمامی فضاهای برداری و ضرب‌های تانسوری روی یک میدان $\mathbb{F}$ از مشخصه صفر در نظر گرفته می‌شوند.

تعریف ۱. الف) یک فضای برداری M همراه با تجزیه‌ای به‌صورت $M=M_0\oplus M_1$ که در آن M_0 و M_1 زیرفضاهایی از M هستند، را یک *سوپرفضای برداری* می‌نامیم. در این‌جا $\{۰,۱\}$ معرف گروه دو عضوی $\mathbb{Z}_2$ است. یک عضو $x\in M_0$ را *زوج* یا *همگن از درجهٔ* 0 گوییم و می‌نویسیم $|x|=0$. به‌طور مشابه یک عضو $x\in M_1$ را *فرد* یا همگن از درجهٔ 1 گوییم و می‌نویسیم $|x|=1$.

الف) از هم‌اکنون قرارداد می‌کنیم اگر در طول متن از نماد $|x|$ برای عضوی از یک سوپرفضای برداری استفاده کرده‌ایم، آن عضو را به‌طور پیش فرض همگن در نظر گرفته‌ایم.

ب) یک سوپرفضای برداری $A=A_0\oplus A_1$ همراه با یک تابع دوخطی $*:A\times A\to A$ را یک *سوپرجبر* گوییم هرگاه

$$A_i*A_j\subseteq A_{i+j}\qquad (i,j\in\mathbb{Z}_2).$$

تابع دوخطی " $*$ " را *ضرب* در A می‌نامیم. به‌ازای $a,b\in A$، ضرب $a*b$ را برای سادگی به‌صورت ab می‌نویسیم. سوپرجبر $A=A_0\oplus A_1$ با شرط $A_1=\{0\}$ را یک جبر می‌نامیم.

- یک سوپرجبر A را *یک‌دار* گوییم هرگاه $۱\in A$ موجود باشد طوری‌که به‌ازای هر عضو a از A، $1a=a=a1$. در این حالت $۱\in A_0$.
- سوپرجبر A را *سوپرجابه‌جایی* گوییم هرگاه به‌ازای هر $a,b\in A$، $ab=(-1)^{|a||b|}ba$ و آن را *سوپر پادجابه‌جایی* گوییم هرگاه به‌ازای هر $a,b\in A$، $ab=-(-1)^{|a||b|}ba$. سوپرجبر A را *شرکت‌پذیر* گوییم هرگاه برای هر $a,b,c\in A$، $(ab)c=a(bc)$.
- سوپرجبر A را یک *سوپرجبر لی* گوییم هرگاه A سوپر پادجابه‌جایی باشد و در *سوپراتحاد ژاکوبی* صدق کند، یعنی به‌ازای هر $a,b,c\in A$

$$(ab)c=a(bc)-(-1)^{|b||a|}b(ac).$$

---
1. Universal
2. Kahler

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.5.1]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.165]

معمولاً ضرب در یک سوپرجبر لی را با $[\cdot,\cdot]$ نمایش می‌دهیم.

• *بُعد* یک سوپرجبر را بُعد آن به‌عنوان یک فضای برداری تعریف می‌کنیم.

ج) یک تبدیل‌خطی φ از یک سوپرجبر A به یک سوپرجبر B را یک *همریختی* گوییم هرگاه

• φ زوج باشد، به این معنا که برای $i \in \mathbb{Z}_2$، $\varphi(A_i) \subseteq B_i$،

• برای $a_1, a_2 \in A$، $\varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)$.

تکریختی، بروریختی و غیره به‌طور معمول تعریف می‌شوند.

مثال ۲. الف) $V := \mathbb{F}$ را همواره به‌عنوان یک سوپرفضای برداری در نظر می‌گیریم که برای آن $V_0 = \mathbb{F}$ و $V_1 = \{0\}$.

ب) فرض کنید $V = V_0 \oplus V_1$ و $W = W_0 \oplus W_1$ دو سوپرفضای برداری باشند. در این صورت فضای برداری $\mathcal{T} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$، شامل تمامی تبدیلات خطی از V به W، نیز یک سوپرفضای برداری است؛ در حقیقت $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \oplus \mathcal{T}_1$ که در آن برای $i \in \mathbb{Z}_2$،

$$\mathcal{T}_i := \{\varphi \in \mathcal{T} \mid \varphi(V_j) \subseteq W_{i+j} \quad \forall j \in \mathbb{Z}_2\}.$$

به‌علاوه $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ از درون‌ریختی‌های V همراه با ضرب به‌صورت

$$[x, y] = xy - (-1)^{|x||y|} yx \qquad (x, y \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)),$$

که در آن xy معرف ترکیب x و y است، یک سوپرجبر لی است.

ج) فرض کنید m و n دو عدد صحیح مثبت باشند، برای

$$\mathcal{L} := gl(m,n) := \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \middle| A_1 : n \times n \text{ ماتریس } \text{ و } A_4 : m \times m \text{ ماتریس} \right\}$$

و

$$\mathcal{L}_0 := \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{L} \middle| A_2 = 0, A_3 = 0 \right\}, \mathcal{L}_1 := \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{L} \middle| A_1 = 0, A_4 = 0 \right\},$$

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1$ همراه با ضرب به صورت

$$[x, y] := xy - (-1)^{|x||y|} yx \qquad (x, y \in \mathcal{L}),$$

که در آن ضرب xy ضرب معمول ماتریس‌هاست، یک سوپرجبر لی است.

تعریف ۳. فرض کنید $\mathfrak{k}$ یک سوپرجبر و M یک سوپرفضای برداری باشد.

الف) یک تبدیل خطی $d: \mathfrak{k} \to \mathfrak{k}$ را یک *مشتق*[1] از $\mathfrak{k}$ گوییم هرگاه برای هر $x, y \in \mathfrak{k}$،

$$d[x, y] = [d(x), y] - (-1)^{|x||y|}[d(y), x].$$

فضای برداری شامل همه مشتقات $\mathfrak{k}$ را با $der\,(\mathfrak{k})$ نمایش می‌دهیم.

ب) فرض کنید $\alpha: \mathfrak{k} \times \mathfrak{k} \to M$ یک تابع دوخطی باشد.

• تابع α را *سوپرمتقارن* گوییم اگر برای $x, y \in \mathfrak{k}$،

$$\alpha(x, y) = (-1)^{|x||y|} \alpha(y, x).$$

• تابع α را *سوپرپادمتقارن* گوییم اگر برای $x, y \in \mathfrak{k}$،

$$\alpha(x, y) = -(-1)^{|x||y|} \alpha(y, x).$$

• تابع α را *پایا* گوییم اگر برای هر $x, y, z \in \mathfrak{k}$، $\alpha([x, y], z) = \alpha(x, [y, z])$.

• تابع α را *زوج* یا *همگن از درجه* 0 (به‌طور متناظر، *فرد* یا *همگن از درجهٔ* 1) می‌نامیم اگر برای $i, j \in \mathbb{Z}_2$،

---

1. Derivation

$\alpha(\mathfrak{k}_i,\mathfrak{k}_j)\subseteq M_{i+j}$ (به‌طور متناظر، $\alpha(\mathfrak{k}_i,\mathfrak{k}_j)\subseteq M_{i+j+1}$).

مجموعه همه توابع دوخطی پایا و سوپرمتقارن از $\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}$ به $\mathbb{F}$ را با $Sym(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}$ نمایش می‌دهیم و آنها را *فرم‌های* سوپرمتقارن پایا می‌نامیم (مثال ۲ الف را ملاحظه کنید).

ج) یک تابع دوخطی $\omega:\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}\to M$ یک *دوهم‌دور*[1] *با ضرایب در* M نامیده می‌شود اگر برای هر $x,y,z\in\mathfrak{k}$،

- $\omega(x,y)=-(-1)^{|x||y|}\omega(y,x)$،
- $\omega([x,y],z)=\omega(x,[y,z])-(-1)^{|x||y|}\omega(y,[x,z])$.

مجموعه تمامی دوهم‌دورهای $\mathfrak{k}$ با ضرایب در M با $Z^2(\mathfrak{k},M)$ نمایش داده می‌شود. یک دوهم‌دور ω را یک *دوهم‌مرز*[2] گوییم هرگاه تبدیل خطی $f:\mathfrak{k}\to M$ چنان وجود داشته باشد که برای هر $x,y\in\mathfrak{g}$، شرط $\omega(x,y)=f([x,y])$ برآورده شود. مجموعه همه دوهم‌مرزهای $\mathfrak{k}$ با ضرایب در M را با $B^2(\mathfrak{k},M)$ نمایش می‌دهیم. فضای خارج‌قسمتی

$$H^2(\mathfrak{k},M):=Z^2(\mathfrak{k},M)/B^2(\mathfrak{k},M)$$

دومین کوهومولوژی از $\mathfrak{k}$ با ضرایب در M نامیده می‌شود. دو عضو از $Z^2(\mathfrak{k},M)$ را *کوهومولوژی-معادل* گوییم هرگاه تفاضل آنها یک دوهم‌مرز باشد.

یادداشت ۴. برای یک سوپرفضای برداری $M=M_0\oplus M_1$، $\pi_0:M\to M_0$ و $\pi_1:M\to M_1$ را به‌ترتیب توابع تصویری کانونی روی M_0 و M_1 در نظر می‌گیریم. اگر $\omega:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to M$ یک دوهم‌دور برای یک سوپرجبر لی $\mathfrak{g}$ باشد، برای $i=0,1$، تعریف می‌کنیم

$$\omega_i:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to M$$
$$\omega_i(x):=\begin{cases}\pi_i\circ\omega(x) & x\in(\mathfrak{g}_0\times\mathfrak{g}_0)\oplus(\mathfrak{g}_1\times\mathfrak{g}_1)\\ \pi_{i+1}\circ\omega(x) & x\in(\mathfrak{g}_0\times\mathfrak{g}_1)\oplus(\mathfrak{g}_1\times\mathfrak{g}_0).\end{cases}$$

به‌راحتی دیده می‌شود ω_0 یک دوهم‌دور زوج و ω_1 یک دوهم‌دور فرد است و به‌علاوه $\omega=\omega_0+\omega_1$. در نتیجه $Z^2(\mathfrak{g},M)$ یک سوپرفضای برداری است و $B^2(\mathfrak{g},M)$ یک سوپرزیرفضاست و از این‌رو، $H^2(\mathfrak{g},M)$ یک سوپرفضای برداری است.

مثال ۵. الف) فرض کنید V یک سوپرفضای برداری و W یک فضای برداری باشند. در این صورت $U:=V\otimes W$ نیز یک سوپرفضای برداری است؛ در واقع

$$U_0:=\ V_0\otimes \mathrm{W}\ \ \text{و}\ \ U_1:=V_1\otimes \mathrm{W}.$$

ب) فرض کنید A یک جبر شرکت‌پذیر جابه‌جایی و $\mathfrak{k}$ یک سوپرجبر لی باشد. در این صورت سوپرفضای برداری $\mathfrak{g}:=A\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{k}$ همراه با براکت

$$[\cdot,\cdot]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$$
$$(a\otimes x,b\otimes y)\mapsto ab\otimes[x,y]\qquad(a,b\in A,\qquad x,y\in\mathfrak{k})$$

یک سوپرجبر لی است . اگر A یک‌دار و $\mathfrak{k}$ کامل[3] باشد یعنی $\mathfrak{k}=[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]$، آن‌گاه $\mathfrak{g}$ نیز کامل است.

تعریف ۶. سوپرجبر لی معرفی شده در مثال ۵ ب) را یک *سوپرجبر جریانی* می‌نامیم.

مثال ۷. فرض کنید $\mathfrak{g}$ یک سوپر جبر لی ساده کلاسیک پایه‌ای با فرم دوخطی پایای ناتباهیده زوج f و B جبر چندجمله‌ای‌های کوتاه‌شده[4] $\mathbb{F}\oplus\mathbb{F}t$ باشد، در این صورت فرم تعریف شده به‌وسیلهٔ

1. 2-cocycla
2. 2- *coboundry*
3. Perfect
4. Truncated

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.5.1]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.165]

$$(۱,۱) = (۱, t) = (t, 1) := 1, \quad (t, t) := 0$$

یک فرم دوخطی متقارن ناتباهیده روی B است. سوپر جبر لی جریانی $t := B \otimes \mathfrak{g}$ کامل است ولی ساده نیست زیرا $\mathbb{F}t \otimes \mathfrak{g}$ ایده‌آلی نابدیهی از t است. به‌علاوه، سوپرجبر لی t مجهز به فرم دوخطی سوپرمتقارن پایای ناتباهیده زوج

$$\kappa: t \otimes t \to \mathbb{F}$$
$$(a \otimes x, b \otimes y) \mapsto (a, b) f(x, y) \qquad (x, y \in g, \quad a, b \in B)$$

است.

مثال ۸. فرض کنید ω یک دوهم‌دور زوج از یک سوپرجبر $(\mathcal{G}, [\cdot,\cdot])$ با ضرایب در یک سوپرفضای M باشد. قرار دهید $\hat{\mathcal{G}}_\omega := \mathcal{G} \oplus M = (\mathcal{G}_0 \oplus M_0) \oplus (\mathcal{G}_1 \oplus M_1)$ و تعریف کنید:

$$[\cdot,\cdot]_\omega: \hat{\mathcal{G}}_\omega \times \hat{\mathcal{G}}_\omega \to \hat{\mathcal{G}}_\omega, \qquad (x + m, x' + m') \mapsto [x, x'] + \omega(x, x')$$

که در آن $x, x' \in \mathcal{G}$ و $m, m' \in M$. در این صورت $\hat{\mathcal{G}}_\omega$ همراه با $[\cdot,\cdot]_\omega$ یک سوپرجبر لی است. دقت کنید زوج بودن ω برای برقراری شرط $[(\hat{\mathcal{G}}_\omega)_i, (\hat{\mathcal{G}}_\omega)_j] \subseteq (\hat{\mathcal{G}}_\omega)_{i+j}$ (به‌ازای $i, j \in \mathbb{Z}_2$) الزامی است.

لم ۹. *فرض کنید ω_1 و ω_2 دو دوهم‌دور زوج کوهومولوژی-معادل از یک سوپرجبر لی کامل $\mathcal{G}$ (یعنی $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] = \mathcal{G}$) با ضرایب در یک سوپرفضای برداری M باشند، در این صورت $\hat{\mathcal{G}}_{\omega_1}$ با $\hat{\mathcal{G}}_{\omega_2}$ یکریخت است.*

اثبات. تبدیل خطی $f: \mathcal{G} \to M$ را به گونه‌ای در نظر بگیرید که برای $x, y \in \mathcal{G}$،

$$\omega_2(x, y) - \omega_1(x, y) = f[x, y].$$

زیرا ω_1 و ω_2 زوج هستند و $\mathcal{G}$ کامل است، f یک تبدیل خطی زوج است. حال تعریف می‌کنیم

$$\theta: \hat{\mathcal{G}}_{\omega_1} \to \hat{\mathcal{G}}_{\omega_2}$$
$$x + m \mapsto x + f(x) + m \qquad (x \in \mathcal{G}, \quad m \in M).$$

به‌راحتی دیده می‌شود برای $x, y \in \hat{\mathcal{G}}_{\omega_1}$، $\theta([x, y]_{\omega_1}) = [\theta(x), \theta(y)]_{\omega_2}$. هم‌چنین می‌دانیم f زوج است، پس θ نیز زوج است و از این‌رو، θ یک همریختی است. به‌علاوه نگاشت

$$\theta': \hat{\mathcal{G}}_{\omega_2} \to \hat{\mathcal{G}}_{\omega_1}$$
$$x + m \mapsto x - f(x) + m \qquad (x \in \mathcal{G}, \quad m \in M).$$

وارون θ است، پس θ یک یکریختی است.

تعریف۱۰. گوییم یک سوپرجبر لی $\mathfrak{L}$ یک *توسیع مرکزی* از یک سوپرجبر لی $\mathcal{G}$ است هرگاه بروریختی $\pi: \mathfrak{L} \to \mathcal{G}$ که هسته آن زیرمجموعه‌ای از مرکز $\mathfrak{L}$ است، وجود داشته باشد؛ به‌عبارت دیگر

$$ker(\pi) \subseteq Z(\mathfrak{L}) := \{x \in \mathfrak{L} | [x, y] = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{L}\}.$$

یک توسیع مرکزی $\hat{\mathcal{G}}$ از $\mathcal{G}$، متناظر با بروریختی $\hat{\pi}: \hat{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$، را یک توسیع مرکزی *جامع* گوییم هرگاه برای هر توسیع مرکزی $\mathfrak{L}$ از $\mathcal{G}$، متناظر با بروریختی $\pi: \mathfrak{L} \to \mathcal{G}$، همریختی $\varphi: \hat{\mathcal{G}} \to \mathfrak{L}$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای‌که

$$\pi \circ \varphi = \hat{\pi}.$$

یادداشت ۱۱. الف) اگر $\mathfrak{L}$ یک توسیع مرکزی از یک سوپرجبر لی $\mathcal{G}$ متناظر با بروریختی $\pi: \mathfrak{L} \to \mathcal{G}$ باشد، در این صورت به‌عنوان فضاهای برداری $\mathfrak{L} \simeq \mathcal{G} \oplus \ker(\pi)$. علت نام‌گذاری توسیع مرکزی هم همین تجزیه است.

ب) یک سوپرجبر لی $\mathcal{G}$ توسیع مرکزی جامع دارد اگر و فقط اگر *کامل* باشد یعنی $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] = \mathcal{G}$, [۸ قضیه‌های ۱٫۸ و ۱٫۱۴]. در این حالت توسیع مرکزی جامع با تقریب یکریختی یکتاست و هم‌چنین نگاشت φ در تعریف ۱۰ یگانه است.

ج) نمادهای مثال ۸ را در نظر بگیرید. $\hat{\mathcal{G}}_\omega$ یک توسیع مرکزی از $\mathcal{G}$، متناظر با تابع تصویری کانونی $\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \oplus$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.5.1]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.165]

$M \to \mathcal{G}$ است و به‌علاوه هر توسیع مرکزی از $\mathcal{G}$ به همین طریق به‌دست می‌آید [۴, بخش ۴].

از هم‌اکنون فرض می‌کنیم $\mathfrak{k}$ یک سوپرجبر لی کامل با بعد متناهی باشد که به یک فرم سوپرمتقارن پایای ناتباهیده همگن κ مجهز است. مثال ۲ الف) را یادآوری می‌کنیم و توجه می‌کنیم که چون κ همگن است، برای اعضای همگن $x, y \in \mathfrak{k}$،

$$\kappa(x,y) = 0 \quad \text{اگر} \quad |\kappa| + |x| + |y| = 1 \text{، آن‌گاه} \tag{۱}$$

فضای دوگان $\mathfrak{k}$ را با $\mathfrak{k}^*$ نمایش می‌دهیم. در این صورت نگاشت

$$\varphi: \quad \mathfrak{k} \to \mathfrak{k}^*$$
$$x \mapsto \kappa(x,\cdot) \qquad (x \in \mathfrak{k})$$

یک نگاشت دوسویی است. بنابراین برای هر درون‌ریختی S از $\mathfrak{k}$، یگانه درون‌ریختی S^* وجود دارد که

$$\kappa(Sx,y) = (-1)^{|x||y|}\kappa(S^*y,x) \qquad (x,y \in \mathfrak{k}).$$

لم ۱۲. ([NY] گزارهٔ ۳,۵) *قرار دهید*

$$\mathrm{d}er_-(\mathfrak{k}) := \{D \in \mathrm{d}er(\mathfrak{k}) | D^* = -D\}$$

و

$$\mathrm{cent}_+(\mathfrak{k}) := \{S \in \mathrm{E}nd_{\mathbb{F}}(\mathfrak{k}) | S^* = S, \quad S[a,b] = [S(a),b] \ \ (\forall a,b \in \mathfrak{k})\}.$$

در این صورت سوپرفضای برداری $\mathrm{d}er_-(\mathfrak{k})$ با $Z^2(\mathfrak{k},\mathbb{F})$ و سوپرفضای برداری $\mathrm{cent}_+(\mathfrak{k})$ با $Sym(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}$ یکریخت است.

تعریف ۱۳. فرض کنید A یک جبر شرکت‌پذیر جابه‌جایی یک‌دار و M یک سوپرفضای برداری باشد. یک تبدیل خطی $F: A \otimes A \to M$ را یک تابع *هوخشیلد*[1] گوییم اگر برای $a,b,c \in \mathcal{A}$،

- $F(a \otimes b) = -F(b \otimes a)$،
- $F(ab \otimes c) = F(a \otimes bc) + F(b \otimes ac)$.

مثال ۱۴. فرض کنید A یک جبر شرکت‌پذیر جابه‌جایی یک‌دار، $\mathfrak{k}$ یک سوپرجبر لی و M یک سوپرفضای برداری باشد. قرار دهید $\mathfrak{g} := A \otimes \mathfrak{k}$.

الف) اگر $f: A \to M$ یک تبدیل خطی و $D \in \ der_-(\mathfrak{k})$، آن‌گاه

$$\eta_{f,D}: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to M, \quad \eta_{f,D}(a \otimes x, b \otimes y) := f(ab)\kappa(Dx,y) \quad (a,b \in A, \qquad x,y \in \mathfrak{k})$$

یک دوهم‌دور از $\mathfrak{g}$ است [۷, مثال ۳,۱۲]. چون $\eta_{f,D}$ نسبت به f و D خطی است، اگر $D = D_0 + D_1$ تجزیه D به تبدیلات خطی زوج و فرد باشند و $\pi_i: M \to M_i \quad (i = 0,1)$ تابع تصویری کانونی باشد، آن‌گاه

$$\eta_{f,D} = \eta_{\pi_0 \circ f, D_0} + \eta_{\pi_0 \circ f, D_1} + \eta_{\pi_1 \circ f, D_0} + \eta_{\pi_1 \circ f, D_1}.$$

حال فرض کنید D همگن باشد و $f = \pi_i \circ f$ که $i = 0,1$. اگر $a,b \in A$ و $x,y \in \mathfrak{k}$ اعضای همگنی باشند، (۲,۱) نتیجه می‌دهد که

$$\text{اگر } |\kappa| + |D| + |x| + |y| = 1 \text{، آن‌گاه } \kappa(Dx,y) = 0 \,.$$

بنابراین درجه $f(ab)\kappa(Dx,y) \in M$ به‌وسیلهٔ $x,y \in \mathfrak{k}$ با شرط $|\kappa| + |D| + |x| + |y| = 0$ تعیین می‌شود. بنابراین چون

$$|f(ab)\kappa(Dx,y)| = i,$$

$\eta_{f,D}$ زوج است اگر و فقط اگر $i = |D| + |\kappa|$.

1. Hochschild

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.5.1]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.165]

ب) فرض کنید $F: A \otimes A \to M$ یک تابع هوخشیلد و $S \in \mathfrak{cent}_+(\mathfrak{k})$. در این صورت

$$\xi_{F,S}: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to M, \quad \xi_{F,S}(a \otimes x, b \otimes y) := F(a \otimes b)\kappa(Sx, y) \ (a, b \in A, \quad x, y \in \mathfrak{k}).$$

یک دوهم‌دور از $\mathfrak{g}$ است [۷, مثال ۳,۱۲]. همانند حالت قبل، اگر $i \in \{0,1\}$ و $F = \pi_i \circ F$ و به‌علاوه S همگن باشد، این دوهم‌دور زوج است اگر و فقط اگر $i = |S| + |\kappa|$.

تعریف ۱۵. فرم دوخطی κ، *پایا-مشتق* نامیده می‌شود اگر $der\,(\mathfrak{k}) = der_-(\mathfrak{k})$.

در زیر قضیهٔ ۳,۱۶ از [۷] را بیان می‌کنیم؛ این قضیه دوهم‌دورها را به طور کامل مشخص می‌کند:

قضیهٔ ۱۶. *مثال ۱۴ را در نظر بگیرید و فرض کنید κ، پایا-مشتق باشد. با در نظر گرفتن لم ۱۲، سوپرفضای برداری $der_-(\mathfrak{k})$ را با $Z^2(\mathfrak{k}, \mathbb{F})$ و سوپرفضای برداری $\mathfrak{cent}_+(\mathfrak{k})$ را با $Sym(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}$ یکی‌گیری می‌کنیم و فرض می‌کنیم اعضای $D_1, \dots, D_n$ از $der(\mathfrak{k}) = der_-(\mathfrak{k})$ پایه‌ای برای $Z^2(\mathfrak{k}, \mathbb{F})$ تشکیل دهند و $S_1, \dots, S_m \in \mathfrak{cent}_+(\mathfrak{k})$ به‌گونه‌ای باشند که پایه‌ای برای $Sym(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}$ تشکیل دهند. در این صورت برای هر دوهم‌دور ω از $\mathfrak{g} = A \otimes \mathfrak{k}$ با مقادیر در یک سوپرفضای برداری M، توابع خطی $f_i: A \to M$ و توابع هوخشیلد $F_j: A \times A \to M$ وجود دارند طوری که*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \eta_{f_i, D_i} + \sum_{j=1}^{m} \xi_{F_j, S_j}.$$

یادداشت ۱۷. دقت می‌کنیم D_iها و S_jها در قضیه قبل را می‌توان همگن در نظر گرفت. در این حالت، هر دوهم‌دور زوج به‌صورت

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_{f_i, D_i} + \sum_{j=1}^{m} \xi_{F_j, S_j}$$

است که f_iها و F_jها همگن هستند طوری که $|\kappa| = |f_i| + |D_i| = |F_j| + |S_j|$.

توسیع مرکزی جامع و جبرهای جریانی

در این بخش قضیه اصلی مقاله را ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\mathfrak{k}$ یک سوپرجبر لی کامل با بعد متناهی است که به یک فرم سوپرمتقارن پایای ناتباهیده همگن κ مجهز است و $\mathcal{A}$ یک جبر شرکت‌پذیر جابه‌جایی یک‌دار است. توسیع مرکزی جامع برای سوپرجبر جریانی $\mathcal{A} \otimes \mathfrak{k}$ را برحسب مدول مشتقات کاهلِر به‌دست می‌آوریم.

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر شرکت‌پذیر جابه‌جایی یک‌دار باشد. یک فضای برداری M همراه با یک تابع دوخطی $\cdot: \mathcal{A} \times M \to M$ یک $\mathcal{A}$*-مدول* است هرگاه

- $(ab) \cdot m = a \cdot (b \cdot m)\ (a, b \in \mathcal{A},\ m \in M)$،
- $1 \cdot m = m$.

برای سادگی در نوشتن از این به بعد ممکن است از نوشتن عمل مدولی "0" و هم‌چنین از نوشتن پرانتزها صرف‌نظر کنیم. $\mathcal{A}$-زیر مدول‌ها به‌طور طبیعی تعریف می‌شوند و برای دو $\mathcal{A}$-مدول M و N، یک تبدیل خطی $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(M, N)$ را یک همریختی مدولی نامیم هرگاه

$$\phi(ax) = a\phi(x).$$

تعریف ۱۸. فرض کنید M یک $\mathcal{A}$-مدول باشد. یک تبدیل خطی $d: \mathcal{A} \to M$ یک مشتق از $\mathcal{A}$ در M نامیده می‌شود هرگاه

$$d(ab) = ad(b) + bd(a).$$

مجموعه همه مشتقات $\mathcal{A}$ در M را با $der\,(\mathcal{A}, M)$ نمایش می‌دهیم و هرعضو آن را یک مشتق از $\mathcal{A}$ در M می‌نامیم. مشتقات $\mathcal{A}$ در $\mathcal{A}$ را *مشتقات* $\mathcal{A}$ می‌نامیم.

مثال ۱۹. فضای برداری $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ همراه با عمل

$$a \cdot (b \otimes c) := ab \otimes c$$

برای $a, b, c \in \mathcal{A}$، یک $\mathcal{A}$-مدول است. هم‌چنین چون $\mathcal{A}$ شرکت‌پذیر است، $\mathcal{A}$ به‌طور طبیعی یک $\mathcal{A}$-مدول است

گزاره ۲۰. *الف) تابع ضربی*

$$m_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A} \qquad a \otimes b \mapsto ab$$

یک همریختی مدولی است؛ به‌ویژه $K := \ker(m_{\mathcal{A}})$ یک $\mathcal{A}$-زیرمدول از $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ است.

ب) فضای برداری $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ همرا با ضرب

$$(a \otimes b)(c \otimes d) := ac \otimes bd \qquad (a, b, c, d \in \mathcal{A})$$

یک جبر است و K زیرجبری از $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ است.

ج) $K^2 := \quad span_{\mathbb{F}}\{xy | x, y \in K\}$ زیرمدولی از K است، به‌ویژه فضای خارج‌قسمتی

$$\Omega^1(\mathcal{A}) := K/K^2$$

همراه با عمل مدولی القایی

$$\mathcal{A} \times K/K^2 \to K/K^2$$
$$(a, x + K^2) \mapsto ax + K^2 \qquad (a \in \mathcal{A}, \qquad x \in K)$$

یک $\mathcal{A}$-مدول است که آن را مدول مشتقات کاهلِر می‌نامیم.

اثبات. الف) به راحتی بررسی می‌شود.

ب) اولین ادعا واضح است. حال فرض کنید $\sum_{i=1}^{n} (a_i \otimes b_i)$ و $\sum_{i=1}^{m} (c_i \otimes d_i)$ اعضایی از K باشند. در این صورت

$$m_{\mathcal{A}}(\sum_{i=1}^{n} (a_i \otimes b_i) \sum_{i=1}^{m} (c_i \otimes d_i)) = m_{\mathcal{A}}(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i c_j \otimes b_i d_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i c_j b_i d_j$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i (\sum_{j=1}^{m} c_j d_j) = 0.$$

پس $\sum_{i=1}^{n} (a_i \otimes b_i) \sum_{i=1}^{m} (c_i \otimes d_i) \in \ker(m_{\mathcal{A}}) = K$.

ج) با استفاده از قسمت (ب)،

$$K^2 := \ span_{\mathbb{F}}\{xy | x, y \in K\} \subseteq K.$$

هم‌چنین با در نظر گرفتن نمادهای اثبات قسمت دوم، برای $x \in \mathcal{A}$، داریم

$$x(\sum_{i=1}^{n} (a_i \otimes b_i) \sum_{i=1}^{m} (c_i \otimes d_i)) = x(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i c_j \otimes b_i d_j)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x a_i c_j \otimes b_i d_j$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (x a_i \otimes b_i) \sum_{i=1}^{m} (c_i \otimes d_i) \in K^2,$$

بنابراین K^2 زیرمدولی از K است از این‌رو، عمل مدولی معرفی شده القا می‌شود.

فرض کنید $x \in K$، کلاس x در فضای خارج‌قسمتی $\Omega^1(\mathcal{A})$ را با $[[x]]$ نمایش می‌دهیم. و دقت می‌کنیم برای $x, y \in K$، $[[xy]] = 0$. بنابراین برای $a, b \in \mathcal{A}$، داریم

$$[[(1 \otimes ab) - (b \otimes a) - (a \otimes b) + (ab \otimes 1)]] = [[(1 \otimes a - a \otimes 1)(1 \otimes b - b \otimes 1)]] = 0. \quad (۲)$$

لم ۲۱. *تبدیل خطی*

$$\mathrm{d}_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \to \Omega^1(\mathcal{A}), \qquad a \mapsto [[1 \otimes a - a \otimes 1]]$$

یک مشتق از $\mathcal{A}$ در $\Omega^1(\mathcal{A})$ است.

اثبات. ابتدا یادآوری می‌کنیم $\mathcal{A}$ جابه‌جایی است. برای $a, b \in \mathcal{A}$، با استفاده از ۱۸، داریم

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\mathcal{A}}(ab) &= [[(1 \otimes ab) - (ab \otimes 1)]] \\
&= [[(1 \otimes ab) - (ab \otimes 1)]] + [[-(1 \otimes ab) + (b \otimes a) + (a \otimes b) - (ab \otimes 1)]] \\
&= [[(1 \otimes ab) - (ab \otimes 1) - (1 \otimes ab) + (b \otimes a) + (a \otimes b) - (ab \otimes 1)]] \\
&= [[-(ba \otimes 1) - (ab \otimes 1) + (b \otimes a) + (a \otimes b)]] \\
&= [[b(1 \otimes a - a \otimes 1)]] + [[a(1 \otimes b - b \otimes 1)]] \\
&= b[[(1 \otimes a - a \otimes 1)]] + a[[(1 \otimes b - b \otimes 1)]] \\
&= b\mathrm{d}_{\mathcal{A}}(a) + a\mathrm{d}_{\mathcal{A}}(b) = a\mathrm{d}_{\mathcal{A}}(b) + b\mathrm{d}_{\mathcal{A}}(a).
\end{aligned}$$

بدین‌ترتیب اثبات کامل می‌شود.

لم ۲۲. *به‌عنوان یک $\mathcal{A}$-مدول، $\Omega^1(\mathcal{A})$ به‌وسیلهٔ $im(d_{\mathcal{A}})$ تولید می‌شود.*

اثبات. فرض کنید $\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \in K$. در این صورت $\sum_{i=1}^n a_ib_i = 0$ و داریم

$$\begin{aligned}
[[\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i]] = [[\sum_{i=1}^n (a_i 1 \otimes b_i)]] &= [[\sum_{i=1}^n (a_i 1 \otimes b_i - a_ib_i \otimes 1 + a_ib_i \otimes 1)]] \\
&= [[\sum_{i=1}^n (a_i 1 \otimes b_i - a_ib_i \otimes 1]] + [[\sum_{i=1}^n a_ib_i \otimes 1)]] \\
&= \sum_{i=1}^n [[(a_i(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1)]] \\
&= \sum_{i=1}^n a_i[[(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1)]] \\
&= \sum_{i=1}^n (a_i(\mathrm{d}_{\mathcal{A}}(b_i)) \in \mathcal{A}\mathrm{d}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}).
\end{aligned}$$

این مطلب، اثبات را کامل می‌کند.

گزارهٔ ۲۳. *فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر شرکت‌پذیر جابه‌جایی یک‌دار باشد. در این صورت*

$$\begin{aligned}
G: \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \overline{\Omega}^1(\mathcal{A}) &:= \Omega^1(\mathcal{A})/\mathrm{im}(\mathrm{d}_{\mathcal{A}}) \\
a \otimes b \mapsto \overline{a \cdot \mathrm{d}_{\mathcal{A}} b} & \qquad (a, b \in \mathcal{A})
\end{aligned}$$

یک تابع هوخشیلد است؛ منظور از $\overline{a \cdot \mathrm{d}_{\mathcal{A}} b}$ در این‌جا، کلاس هم‌ارزی $a \cdot \mathrm{d}_{\mathcal{A}} b$ در فضای خارج‌قسمتی $\overline{\Omega}^1(\mathcal{A})$ است. به‌علاوه اگر M یک سوپرفضا و $F: \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to M$ یک تابع هوخشیلد باشد، آن‌گاه تبدیل خطی

$\bar{F}:\bar{\Omega}^1(\mathcal{A}) \to M$ با شرط $\bar{F} \circ G = F$ وجود دارد.

اثبات. ابتدا یادآوری می‌کنیم $\mathrm{d}_{\mathcal{A}}:\mathcal{A} \to \Omega^1(\mathcal{A})$ یک مشتق است، پس برای $a,b \in \mathcal{A}$، داریم

$$\mathrm{d}_{\mathcal{A}}(ab) = a \cdot \mathrm{d}_{\mathcal{A}}(b) + b \cdot \mathrm{d}_{\mathcal{A}}(a),$$

بنابراین

$$G(a \otimes b) = \overline{a \cdot \mathrm{d}_{\mathcal{A}}(b)} = -\overline{b \cdot \mathrm{d}_{\mathcal{A}}(a)} = -G(b \otimes a) \qquad (a,b \in \mathcal{A}).$$

هم‌چنین برای اعضای همگن $a,b \in \mathcal{A}$،

$$\begin{aligned}&(ab) \cdot \mathrm{d}_{\mathcal{A}}(c) - a \cdot \mathrm{d}_{\mathcal{A}}(bc) - b \cdot \mathrm{d}_{\mathcal{A}}(ac)\\ &= (ab) \cdot \mathrm{d}_{\mathcal{A}}(c) - ((ac) \cdot \mathrm{d}_{\mathcal{A}}(b) + (ab) \cdot \mathrm{d}_{\mathcal{A}}(c)) - b \cdot \mathrm{d}_{\mathcal{A}}(ac)\\ &= -(ac) \cdot \mathrm{d}_{\mathcal{A}}(b) - b \cdot \mathrm{d}_{\mathcal{A}}(ac) = -\mathrm{d}_{\mathcal{A}}(bac) \in \mathrm{im}(\mathrm{d}_{\mathcal{A}}).\end{aligned}$$

بنابراین

$$G(ab,c) - G(a,bc) - G(b,ac) = \overline{(ab) \cdot \mathrm{d}_{\mathcal{A}}(c)} - \overline{a \cdot \mathrm{d}_{\mathcal{A}}(bc)} - \overline{b \cdot \mathrm{d}_{\mathcal{A}}(ac)} = 0.$$

این مطلب نشان می‌دهد که G یک تابع هوخشیلد است.

سپس فرض کنید M یک سوپرفضای برداری و $F:\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to M$ یک تابع هوخشیلد باشد. چون برای $a \in \mathcal{A}$، داریم

- $F(a \otimes 1) = -F(1 \otimes a)$،
- $F(a,1) = F(a1 \otimes 1) = F(a \otimes 1) + F(1 \otimes a)$،

پس $F(a \otimes 1) = F(1 \otimes a) = 0$. بنابراین برای $a \in \mathcal{A}$،

$$F(\mathrm{d}_{\mathcal{A}}(a)) = F(1 \otimes a - a \otimes 1) = 0.$$

در نتیجه $im(\mathrm{d}_{\mathcal{A}}) \subseteq ker(F)$ و از این‌رو، تبدیل خطی F، تبدیل خطی $\bar{F}:\bar{\Omega}^1(\mathcal{A}) \to M$ را القا می‌کند؛ در واقع برای $a,b \in \mathcal{A}$،

$$\begin{aligned}\bar{F} \circ G(a \otimes b) &= \bar{F}(\overline{a\mathrm{d}_{\mathcal{A}}b}) = F(a\mathrm{d}_{\mathcal{A}}b) = F(a(1 \otimes b - b \otimes 1))\\ &= F(a \otimes b) - F(ab \otimes 1)\\ &= F(a \otimes b).\end{aligned}$$

بدین‌ترتیب اثبات کامل می‌شود.

اکنون آماده‌ایم که قضیهٔ اصلی مقاله را بیان کنیم. با توجه به این که یک سوپرجبر لی بعدمتناهی کلاسیک پایه‌ای، مجهز به یک فرم دوخطی ناتباهیده سوپرمتقارن زوج است، قضیهٔ اصلی این بخش، نتایج [۴] (روی یک میدان) را نیز پوشش می‌دهد. روش استفاده شده در [۴] همان روش استفاده شده در مقاله [۵] ([۱]، [۲]، [۳] و [۶] را نیز ملاحظه کنید) بر اساس یافتن یک پایه شُواله[1] است که در حالت سوپر به‌کار گرفته شده است. این روش وابسته به ساختار شناخته شده سوپرجبرهای لی کلاسیک پایه‌ای است، در حالی که روش ما برای هر سوپرجبر لی کامل بعد متناهی مجهز به یک فرم دوخطی سوپرمتقارن پایای ناتباهیده همگن به‌کار گرفته می‌شود و از این‌رو، نتایج بیش‌تری به‌دست می‌دهد؛ برای مثال، $\mathfrak{k}$ را می‌توان سوپرجبر لی ساده بعدمتناهی کلاسیک $q(n)$ در نظر گرفت که یک سوپرجبر لی بعدمتناهی کلاسیک پایه‌ای نیست. به‌عنوان مثالی دیگر، قضیهٔ اصلی ما توسیع مرکزی جامع سوپرجبرهای لی $\mathcal{A} \otimes t$، که t همانند مثال ۲،۷ معرفی می‌شود، را نیز به‌دست می‌دهد.

قضیهٔ ۲۴. *فرض کنید κ، پایا-مشتق باشد. با در نظر گرفتن لم ۱۲، سوپرفضای برداری $der\_(\mathfrak{k})$ را با $Z^2(\mathfrak{k},\mathbb{F})$ و*

1. Chevalley basis

سوپرفضای برداری $\mathrm{cent}_+(\mathfrak{k})$ *را با* $Sym(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}$ *یکی‌گیری می‌کنیم و* $D_1, \dots, D_s, \dots, D_t$ *از مشتقات همگن* $\mathfrak{k}$ *را به‌گونه‌ای در نظر می‌گیریم که* $\{[D_1], \dots, [D_t]\}$ *از کلاس‌های کوهومولوژی، پایه‌ای برای* $H^2(\mathfrak{k})$ *باشد باشد و*

$$|D_1| + |\kappa| = \cdots = |D_s| + |\kappa| = 0 \quad \text{و} \quad |D_{s+1}| + |\kappa| = \cdots = |D_t| + |\kappa| = 1\,.$$

هم‌چنین زیرمجموعه $\{S_1, \dots, S_p, \dots, S_m\}$ از $\mathrm{cent}_+(\mathfrak{k})$ شامل درون‌ریختی‌های همگن را پایه‌ای برای $Sym(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}$ در نظر می‌گیریم طوری‌که

$$|S_1| + |\kappa| = \cdots = |S_p| + |\kappa| = 0 \quad \text{و} \quad |S_{p+1}| + |\kappa| = \cdots = |S_m| + |\kappa| = 1\,.$$

سوپرجبر لی $\mathfrak{g} := \mathcal{A} \otimes \mathfrak{k}$ را در نظر بگیرید و قرار دهید

$$\widehat{M} := (\oplus_{i=1}^{t} \mathcal{A}) \oplus (\oplus_{i=1}^{m} \overline{\Omega}^1(\mathcal{A})).$$

در این صورت $\widehat{M}$ یک سوپرفضای برداری است که

$$\widehat{M}_0 = (\oplus_{i=1}^{s} \mathcal{A}) \oplus (\oplus_{i=1}^{p} (\overline{\Omega}^1(\mathcal{A}))$$

و

$$\widehat{M}_1 = (\oplus_{i=\mathrm{s}+1}^{t} \mathcal{A}) \oplus (\oplus_{i=\mathrm{p}+1}^{m} (\overline{\Omega}^1(\mathcal{A})).$$

تعریف کنید

$$\alpha: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \widehat{M}$$
$$(a \otimes x, b \otimes y) \mapsto (ab\kappa(D_i x, y))_{1 \le i \le t} + (\overline{a \cdot \mathrm{d}_{\mathcal{A}}(b)}\kappa(S_i x, y))_{1 \le i \le m}.$$

در این صورت α یک دوهم‌دور زوج است و $\hat{\mathfrak{g}}_\alpha$ توسیع مرکزی جامع از $\mathfrak{g}$ است.

اثبات. این که α یک دوهم‌دور زوج است از مثال ۱۴ حاصل می‌شود. فرض کنید ω یک دوهم‌دور زوج با ضرایب در یک سوپرفضای M باشد. از یادداشت ۱۶ می‌دانیم که تبدیلات خطی همگن $f_1, \dots, f_t$ از $\mathcal{A}$ به M و توابع همگن هوخشیلد $F_1, \dots, F_m$ روی $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ وجود دارند که

$$|f_i| + |D_i| = |F_j| + |S_j| = |\kappa| \quad (1 \le i \le t, \qquad 1 \le j \le m)$$

و ω با $\dot{\omega} = \sum_{i=1}^{t} \eta_{f_i, D_i} + \sum_{j=1}^{\mathrm{m}} \zeta_{F_j, S_j}$ کوهومولوژی-معادل است. از گزارهٔ ۲۳ می‌دانیم که برای هر $j \in \{1, \dots, m\}$، تبدیل خطی $\bar{F}_j : \overline{\Omega}^1(\mathcal{A}) \to M$ وجود دارد که برای هر $a, b \in \mathcal{A}$، $\bar{F}_j(\overline{a \cdot \mathrm{d}_A(b)}) = F_j(a \otimes b)$. به‌ویژه، $\bar{F}_j$ همگن از درجه $|F_j|$ است. حال تعریف کنید

$$\theta: \widehat{M} \to M$$
$$(a_i)_{1 \le i \le t} + (\overline{x_j})_{1 \le j \le m} \mapsto \sum_{i=1}^{t} f_i(a_i) + \sum_{j=1}^{m} \bar{F}_j(\overline{x_j}),$$

که در آن $a_1, \dots, a_t$ اعضایی از $\mathcal{A}$ و $x_1, \dots, x_m$ اعضایی از $\Omega^1(\mathcal{A})$ هستند. می‌دانیم به‌ازای $۱ \le i \le s$، $|f_i| = |\kappa| + |D_i| = 0$ و برای $s + 1 \le i \le t$، $|f_i| = |\kappa| + |D_i| = 1$، هم‌چنین برای $۱ \le j \le p$، $|F_j| = |\kappa| + |S_j| = 0$ و برای $p + 1 \le j \le m$، $|F_j| = |\kappa| + |S_j| = 1$، بنابراین θ یک تبدیل خطی زوج است.

سپس یادآوری می‌کنیم $\mathcal{A}_1 = \{0\}$، پس برای اعضای $a, b \in \mathcal{A}$ و $x, y \in \mathfrak{k}$ داریم

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}(a \otimes x, b \otimes y) &= \sum_{i=1}^{t} \eta_{f_i, D_i}(a \otimes x, b \otimes y) + \sum_{j=1}^{m} \zeta_{F_j, S_j}(a \otimes x, b \otimes y) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{t} f_i(ab)\kappa(D_i x, y) + \sum_{j=1}^{m} F_j(a \otimes b)\kappa(S_j x, y) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{t} f_i(ab)\kappa(D_i x, y) + \sum_{j=1}^{m} \bar{F}_j(\overline{a \cdot d_A(b)})\kappa(S_j x, y)
\end{aligned}$$

$$= \theta((\kappa(D_i x, y)ab)_{1\leq i\leq t} + (\kappa(S_j x, y)\overline{a \cdot d_A(b)})_{1\leq j\leq m})$$
$$= \theta(\alpha(a \otimes x, b \otimes y)).$$

این بدان معناست که $\theta \circ \alpha = \dot{\omega}$. حال لم ۹ را در نظر بگیرید و تعریف کنید

$$\Phi: \hat{\mathfrak{g}}_\alpha \to \hat{\mathfrak{g}}_{\dot{\omega}} \simeq \hat{\mathfrak{g}}_\omega$$
$$x + a \mapsto x + \theta(a) \qquad (x \in \mathfrak{g}, \qquad a \in \widehat{M}).$$

برای $x, y \in \mathfrak{g}$ و $a, b \in \widehat{M}$، داریم

$$\begin{aligned}[\Phi(x+a), \Phi(y+b)]_{\dot{\omega}} &= [x + \theta(a), y + \theta(b)]_{\dot{\omega}} = [x, y] + \dot{\omega}(x, y)\\ &= [x, y] + \theta(\alpha(x, y))\\ &= \Phi([x, y] + \alpha(x, y))\\ &= \Phi([x + \theta(a), y + \theta(b)]_\alpha).\end{aligned}$$

اما θ زوج است، پس Φ نیز زوج است، از این‌رو، Φ یک همریختی است. این مطلب اثبات را کامل می‌کند.

منابع

1. Bloch S., "The dilogarithm and extensions of Lie algebras", Algebraic K-theory, Evanston 1980, Springer Lecture Notes in Math., N. 854 (1981).
2. Chevalley C., "Sur certains groupes simples, Tohoku Math", J. (2) 7, No. 1-2 (1955) 14–66.
3. Garland H., "The arithmetic theory of loop groups", Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 52 (1980) 5-136
4. Iohara K., Koga Y., "Central extensions of Lie superalgebras", Comment. Math. Helv. 86, No. 4 (2011) 985-986.
5. Kassel Ch., "Kähler differentials and coverings of complex simple lie algebras extended over a commutative algebra", J. Pure and Appl. Algebra 34 (1984) 265-275.
6. Kassel Ch., Loday J-L., "Extensions centrales d'algèbres de Lie", Annales de l'Institut Fourier, Tome 32, No. 4, (1982) 119-142.
7. Neeb K-H., Yousofzadeh M., "Current superalgebras and unitary representations", J. Pure and Applied Alg. 222(10) (2018) 3303-3333.
8. Neher E., "An introduction to universal central extensions of Lie superalgebras, in: Proceedings of the "Groups, Rings, Lie and Hopf Algebras"", Conference, St. John's, NF, 2001, in: Math. Appl., Vol. 555, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (2003) 141-166.