برآورد E- بیز و بیز سلسله مراتبی $R = P(X > Y)$ در توزیع وایبول

شهرام یعقوب زاده شهرستانی، ایمان مخدوم*
دانشگاه پیام نور، گروه آمار

دریافت ۹۷/۰۶/۱۸ پذیرش ۹۹/۰۳/۳۱

چکیده

اگر در مدل تنش-مقاومت، متغیرهای تصادفی X و Y به ترتیب بیان‌کنندهٔ مقاومت و تنش باشند، پارامتر قابلیت اعتماد آن یعنی $R = P(X > Y)$، به روش‌های ماکسیمم درستنمایی و بیز و همچنین فواصل اطمینان مختلف آن برای بسیاری از توزیع‌ها برآورد شد. اما در این مقاله وقتی که متغیرهای تصادفی X و Y مستقل و دارای توزیع‌های وایبول با پارامترهای شکل یکسان و اسکالر متفاوت می‌باشند، برآورد E- بیز و برآورد بیز سلسله مراتبی R، تحت توابع زیان مربع خطا و آنتروپی به دست آورده می‌شود. سپس با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو، این برآوردهای جدید با هم و با برآورد بیز R مقایسه می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: توزیع وایبول، برآورد E- بیز، برآورد بیز سلسله مراتبی، تابع زیان مربع خطا، تابع زیان آنتروپی، پارامتر تنش ـ مقاومت، شبیه‌سازی مونت‌کارلو.

۱ ـ مقدمه

از دیر باز روش‌های مختلفی برای برآورد پارامترهای توزیع‌های آماری ارائه شده است. یکی از این روش‌ها، روش برآورد بیز مبتنی بر توزیع‌های پیشین است که انتخاب معقول آن‌ها روی فضای پارامتر نقش مهمی در کاهش خطای برآوردگر پسین بیزی دارد. گاهی اوقات وسیع بودن حوزه تغییرات پارامتر روی فضای پارامتر، باعث افزایش خطا و بزرگ شدن معیارهای مقایسه می‌شود. بنابر این تعریف توزیع پیشین مناسب روی فضای پارامتر و اعمال شرایطی خاص روی ابر پارامترهای توزیع پیشین، نقش مهمی در کاهش معیارهای مقایسه دارد. برآوردهای بیز تجربی[۱] و بیز سلسله مراتبی[۲] از این نوع برآوردگرها می‌باشند. توزیع پیشین

*نویسنده مسئول: makhdoom@pnu.ac.ir

[1] Emperical Bayesian(E-Bayesian) estimation
[2] Hierarchical Bayesian Estimation

بیزی سلسله مراتبی ابتدا توسط لیندلی و اسمیت (۱۹۷۲) معرفی شد و سپس توسط هان (۱۹۷۷) مورد بررسی بیشتری قرار گرفت و روش‌های برآورد $\boldsymbol{E}$- بیز و بیز سلسله مراتبی معرفی شد. اخیرا از روش‌های برآورد $\boldsymbol{E}$- بیز و بیز سلسله مراتبی توسط چند نویسنده در نظریهٔ برآورد استفاده شد که برخی از آن‌ها عبارتند از: برآورد پارامتر توزیع نمایی و برآورد پارامتر نسبت توزیع دوجمله ای توسط هان (۲۰۱۱, ۲۰۰۹) ، برآورد پارامتر و تابع قابلیت اعتماد توزیع بور نوع ۱۲ بر اساس نمونه‌های سانسور فزآیندهٔ نوع دوم توسط جاهین و اکاشا (۲۰۱۱) ، برآورد پارامتر توزیع پاسکال توسط وانگ و چن (۲۰۱۲). همچنین کاربرد روش بیز سلسله مراتبی در تحلیل داده‌ها توسط چند نویسنده مانند میچیز و ویکل (۲۰۰۹) ، کرسی و تینگلی (۲۰۱۰) ، آندو و زلنر (۲۰۱۰)، اوسی و دوکر (۲۰۱۱) و ریچارد (۲۰۱۱) نشان داده شد.

برآورد پارامتر قابلیت اعتماد یا پارامتر تنش-مقاومت یعنی $R = P(X > Y)$ که کارایی یک سیستم را نشان می‌دهد یکی از مسائل مهم استنباط آماری است که در علوم مختلفی مانند نظریهٔ طول عمر، قابلیت اطمینان مکانیکی یک سیستم، در مفاهیم مهندسی مانند سازه‌ها، فرسودگی موتور موشک و فرسودگی سازه‌های هواپیما کاربرد دارد. وقتی که X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و دارای یک نوع توزیع می‌باشند، نویسندگان بسیاری به برآورد پارامتر Rپرداخته اند. برآورد R در توزیع نمایی دو متغیره توسط آواد و همکاران (۱۹۸۱) ، در توزیع نرمال چند متغیره توسط گوپتا و گوپتا (۱۹۹۰) ، در توزیع بور نوع ۱۲ توسط رکب و کاندو (۲۰۰۵) ، در توزیع نمایی تعمیم یافته توسط کاندو و گوپتا (۲۰۰۵) ، در توزیع نمایی سه پارامتری توسط رکب و همکاران (۲۰۰۸) ، در توزیع نمایی تعمیم یافته بر مبنای نمونه‌های رکوردی توسط باکلیزی (۲۰۰۸) ، در توزیع وایبول بر اساس نمونه‌های سانسور فزآینده نوع دوم توسط اصغرزاده و همکاران (۲۰۱۱) ، در توزیع نمایی بر اساس نمونه‌های سانسور فزآینده نوع دوم توسط ساراکگلو و همکاران (۲۰۱۲) ، در توزیع بور نوع ۱۲ بر اساس نمونه‌های سانسور فزآینده نوع دوم توسط لیو و تسای (۲۰۱۲) ، در توزیع لیندلی توسط ال ـ موتایری و همکاران (۲۰۱۳) و در توزیع لیندلی توانی توسط گیتانی و همکاران (۲۰۱۵) مورد بررسی قرار گرفت.

چون توزیع وایبول کاربردهای زیادی در حوزه‌های مختلف علم مانند تحلیل بقا، مهندسی قابلیت اعتماد، پیش‌بینی آب و هوا دارد، برآورد پارامتر قابلیت اعتماد آن یعنی R به روش‌های مختلف توصیه می‌شود. در این مقاله توزیع وایبول با پارامترهای α و β $(W(\alpha,\beta))$ با تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی به ترتیب به صورت‌های

$$f(x;\alpha,\beta) = \alpha\beta x^{\alpha-1} e^{-\beta x^{\alpha}}, \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0 \qquad (۱)$$

$$F(x;\alpha,\beta) = 1 - e^{-\beta x^{\alpha}}, \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0 \qquad (۲)$$

در نظر گرفته می‌شود و سپس برآوردهای E-بیز و بیز سلسله مراتبی R به دست آورده می‌شود. با توجه به هان (۱۹۷۷) برآورد E ـ بیز و بیز سلسله مراتبی به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف ۱. فرض کنید b_1 و b_2 ابر پارامترهایی در توزیع پیشین θ و $\pi(b_1, b_2)$ توزیع توام پیشین (b_1, b_2) و برآورد بیز θ، $\hat{\theta}_B(b_1, b_2)$ باشند، آن‌گاه برآورد E-بیز θ که با نماد $\hat{\theta}_{EB}$ نشان داده می‌شود و در حقیقت امید ریاضی برآورد بیز θ می‌باشد به صورت

$$\hat{\theta}_{EB} = \mathrm{E}_{\pi(\mathrm{b_1,b_2})}(\hat{\theta}_B(b_1, b_2)) \\ = \int_{\Lambda_1}\int_{\Lambda_2} \hat{\theta}_B(b_1, b_2)\pi(b_1, b_2)db_1 db_2, \quad b_1 \in \Lambda_1, b_2 \in \Lambda_2$$

به دست می‌آید.

تعریف ۲. اگر λ یک ابر پارامتر در پارامتر θ و توزیع پیشین θ، $\pi(\theta|\lambda)$ و توزیع پیشین ابر پارامتر λ، $\pi'(\lambda)$ باشد، آن‌گاه توزیع پیشین سلسله مراتبی θ به صورت زیر به دست آورده می‌شود.

$$\pi''(\theta) = \int_\Lambda \pi(\theta|\lambda)\pi'(\lambda)d\lambda, \quad \lambda \in \Lambda$$

در این مقاله در بخش دوم، وقتی که X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و به ترتیب دارای توزیع های $W(\alpha, \beta_1)$ و $W(\alpha, \beta_2)$ می‌باشند، برآوردهای E-بیز و بیز سلسله مراتبی $R = P(X > Y)$ تحت توابع زیان مربع خطا و آنتروپی به دست آورده می‌شود. همچنین در این بخش فرض می‌شود α، β_1 و β_2 پارامترهای مستقل از هم هستند و دارای توزیع‌های پیشین به ترتیب

$$\pi_1(\beta_1|a_1, b_1) = \frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)}\beta_1^{a_1-1}e^{-b_1\beta_1}, \quad a_1 > 0, b_1 > 0 \tag{۳}$$

$$\pi_2(\beta_2|a_2, b_2) = \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)}\beta_2^{a_2-1}e^{-b_2\beta_2}, \quad a_2 > 0, b_2 > 0 \tag{۴}$$

$$\pi_3(\alpha|a_3, b_3) = \frac{b_3^{a_3}}{\Gamma(a_3)}\alpha^{a_3-1}e^{-b_3\alpha}, \quad \alpha, a_3, b_3 > 0 \tag{۵}$$

می‌باشند. با توجه به هان (۱۹۷۷) ، a_1 و b_1 در رابطهٔ (۳) طوری در نظر گرفته می‌شوند که $\pi_1(\beta_1|a_1, b_1)$ نسبت به β_1 کاهشی باشد. پس با توجه به رابطهٔ

$$\frac{d\pi_1(\beta_1|a_1, b_1)}{d\beta_1} = \frac{b_1^{a_1}\beta_1^{a_1-2}e^{b_1\beta_1}}{\Gamma(a_1)}((a_1 - 1) - b_1\beta_1)$$

باید $b_1 > 0$ و $0 < a_1 \leq 1$ باشد. برگر (۱۹۸۵) نشان داد که بزرگ بودن b_1 باعث کاهش کارایی برآورد بیز β_1 می‌شود. بنابر این ابر پارامتر b_1 باید از بالا کراندار شده و به صورت $0 < b_1 < c_1$ که c_1 عددی ثابت است در نظر گرفته شود. هان (۲۰۱۱) نشان داد که مناسب‌ترین توزیع پیشین b_1، توزیع یکنواخت است. بنابر این در این مقاله توزیع پیشین b_1 یعنی $\pi_3(b_1)$، توزیع یکنواخت پیوسته در بازهٔ $(0, c_1)$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین با توجه به شرط $0 < a_1 \leq 1$ و با در نظر گرفتن $a_1 = 1$، رابطهٔ (۳) به صورت

$$\pi_1(\beta_1|b_1) = b_1 e^{-b_1\beta_1}, \quad b_1 > 0, \beta_1 > 0. \tag{۶}$$

تبدیل می‌شود. با استدلالی مشابه استدلال نحوهٔ تبدیل (۳) به رابطهٔ (۶)، توزیع پیشین b_2 یعنی $\pi_4(b_2)$،توزیع یکنواخت پیوسته در بازهٔ $(0, c_2)$ که c_2 عددی ثابت است در نظر گرفته می‌شود. همچنین با فرض $a_2 = 1$، رابطهٔ (۴) به صورت

$$\pi_2(\beta_2|b_2) = b_2 e^{-b_2\beta_2}, \quad b_2 > 0, \beta_2 > 0. \tag{۷}$$

تبدیل می‌شود. با استدلالی مشابه استدلال نحوهٔ تبدیل رابطهٔ (۳) به رابطهٔ (۶)، رابطهٔ (۷) به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\pi_7(\alpha|b_3) = b_3 e^{-b_3\alpha} \tag{۸}$$

در بخش سوم به کمک شبیه‌سازی مونت‌کارلو برآوردهای بیز و E- بیز و بیز سلسله مراتبی R با هم مقایسه می‌شوند. بخش آخر هم به نتایج مقاله اختصاص داده شده است.

۲ ـ برآوردهای E- بیز و بیز سلسله مراتبی R

فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و به ترتیب دارای توزیع های $\mathrm{W}(\alpha, \beta_1)$ و $\mathrm{W}(\alpha, \beta_2)$ هستند. در این بخش برآوردهای E- بیز و بیز سلسله مراتبی $\mathrm{R} = \mathrm{P}(\mathrm{X} > Y)$ تحت توابع زیان مربع خطا و آنتروپی که به ترتیب به صورت

$$\mathrm{L}(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2$$

$$\mathrm{L}(\hat{\theta}, \theta) \propto \left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right)^{k} - k\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right) - 1, \quad k \neq 0.$$

تعریف می‌شوند به دست آورده می‌شود.

۲.۱ ـ برآوردهای E- بیز و بیز سلسله مراتبی R تحت تابع زیان مربع خطا

فرض کنید نمونه تصادفی $\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_n$ از توزیع $\mathrm{W}(\alpha, \beta_1)$ و نمونه تصادفی $\mathrm{Y}_1, \cdots, \mathrm{Y}_n$ از توزیع $\mathrm{W}(\alpha, \beta_2)$ در نظر گرفته شوند. با توجه به روابط (۶) تا (۸) و تابع درستنمایی

$$\mathrm{L}(\beta_1, \beta_2|\mathrm{Z}) \propto \alpha^{2n}(\beta_1\beta_2)^n \left[\prod_{i=1}^{n} (x_i y_i)\right]^{\alpha-1} \times e^{-\left[\beta_1\left(b_1 + \sum_{i=1}^n x_i^{\alpha}\right) + \beta_2\left(b_2 + \sum_{i=1}^n y_i^{\alpha}\right) - b_3\alpha\right]}$$

توزیع پسین توام α، β_1 و β_2 به صورت زیر به دست آورده می‌شود.

$$\pi(\alpha, \beta_1, \beta_2|\mathrm{Z}) = \frac{\alpha^{2n}(\beta_1\beta_2)^n\left[\prod_{i=1}^n (x_i y_i)\right]^{\alpha-1} e^{-C_1\beta_1 - C_2\beta_2 - b_3\alpha}}{(n!)^2 \int_0^{\infty} \frac{\alpha^{2n}\left[\prod_{i=1}^n (x_i y_i)\right]^{\alpha-1} e^{-b_3\alpha}}{(C_1 C_2)^{n+1}} d\alpha} \tag{۹}$$

که در آن $\mathrm{Z} = (\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_1, \cdots, \mathrm{Y}_n)$، $C_1 = b_1 + \sum_{i=1}^n X_i^{\alpha}$ و $C_2 = b_2 + \sum_{i=1}^n Y_i^{\alpha}$ می‌باشند.

قضیهٔ ۱. برای توزیع وایبول با تابع چگالی احتمال (۱)، برآورد بیز R تحت تابع زیان مربع خطا به صورت زیر است.

$$\widehat{R}_{BS}(b_1,b_2)=\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}\frac{(-1)^{n-j}\Gamma(2n-j+k+2)}{(n-j)!k!}g(j,k) \qquad (۱۰)$$

که در آن $g(j,k)$ به صورت زیر می‌باشد.

$$g(j,k)=\frac{\int_0^\infty \frac{\alpha^{2n}\left[\prod_{i=1}^{n}(x_iy_i)\right]^{\alpha-1}e^{-b_3\alpha}}{C_1^{j-k}C_2^{2n-j+k+2}}d\alpha}{\int_0^\infty \frac{\alpha^{2n}\left[\prod_{i=1}^{n}(x_iy_i)\right]^{\alpha-1}e^{-b_3\alpha}}{(C_1C_2)^{n+1}}d\alpha}$$

برهان. با توجه به رابطهٔ (۹)، برآورد بیز $R=\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}$ تحت تابع زیان مربع خطا به صورت زیر به دست آورده می‌شود.

$$\widehat{R}_{BS}(b_1,b_2)=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\pi(\alpha,\beta_1,\beta_2|Z)d\alpha d\beta_1 d\beta_2$$

$$=\int \alpha^{2n}\left[\prod_{i=1}^{n}(x_iy_i)\right]^{\alpha-1}e^{-b_3\alpha}\left(\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\beta_1^n\beta_2^{n+1}}{\beta_1+\beta_2}e^{-C_1\beta_1-C_2\beta_2}d\beta_1 d\beta_2\right)d\alpha$$

به کمک تغییر متغیر $u=\beta_1+\beta_2$ داریم:

$$I_1=\int_0^\infty\frac{\beta_1^n}{\beta_1+\beta_2}e^{-C_1\beta_1}d\beta_1=e^{C_1\beta_2}\int_{\beta_2}^\infty\frac{(u-\beta_2)^n}{u}e^{-C_1u}du$$

$$=e^{C_1\beta_2}\sum_{j=0}^{n}n_j\ (-\beta_2)^{n-j}\int_{\beta_2}^\infty u^{j-1}e^{-C_1u}du$$

با توجه به رابطهٔ $\int_{\lambda t}^\infty u^{n-1}e^{-u}du=n!\sum_{=0}^{n}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$ داریم:

$$\int_{\beta_2}^\infty u^{j-1}e^{-C_1u}du=j!\,e^{-C_1\beta_2}\sum_{k=0}^{j}\frac{\beta_2^k}{C_1^{j-k}k!}$$

بنابر این داریم:

$$I_1=n!\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}\frac{(-1)^{n-j}\beta_2^{n-j+k}}{C_1^{j-k}k!\,(n-j)!}$$

اکنون $\widehat{R}_{BS}(b_1,b_2)$ برابر است با

$$\widehat{R}_{BS}(b_1,b_2)=\frac{\int_0^{\infty}\alpha^{2n}\left[\prod_{i=1}^{n}(x_iy_i)\right]^{\alpha-1}e^{-b_3\alpha}\left(\int_0^{\infty}\beta_2^{n+1}I_1e^{-C_2\beta_2}d\beta_2\right)d\alpha}{(n!)^2\int_0^{\infty}\frac{\alpha^{2n}\left[\prod_{i=1}^{n}(x_iy_i)\right]^{\alpha-1}e^{-b_3\alpha}}{(C_1C_2)^{n+1}}}$$
$$=\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}\frac{(-1)^{n-j}\Gamma(2n-j+k+2)}{(n-j)!\,k!}g(j,k)$$

□

با فرض $v^{j,k}(\alpha)=\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{n-j+k+1}$ و

$$w(\alpha)=\ln\left[\frac{\alpha^{2n}[\prod_{i=1}^{n}(x_iy_i)]^{\alpha-1}e^{-b_3\alpha}}{(C_1C_2)^{n+1}}\right]$$

$g(j,k)$ به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$g(j,k)=\frac{\int_0^{\infty}v^{j,k}(\alpha)e^{w(\alpha)}d\alpha}{\int_0^{\infty}e^{w(\alpha)}d\alpha}$$

اکنون با استفاده از روش تقریب لیندلی (۱۹۸۰)، $g(j,k)$ را محاسبه می کنیم. به طور کلی بر اساس روش تقریب لیندلی (۱۹۸۰)، مقدار نسبت دو انتگرال به صورت

$$\frac{\int h(\lambda)e^{F(\lambda)}d\lambda}{\int_0^{\infty}e^{F(\lambda)}d\lambda}$$

برابر $h(\hat{\lambda})+\frac{1}{2}h_{11}(\hat{\lambda})\delta_{11}(\hat{\lambda})+v_1(\hat{\lambda})h_1(\hat{\lambda})+\frac{1}{2}F_3(\hat{\lambda})h_1(\hat{\lambda})(\delta_{11}(\hat{\lambda}))^2$ می‌باشد که در آن $\hat{\lambda}$ برآورد ماکسیمم درستنمایی λ، $v(\lambda)=F(\lambda)-L(\lambda)$، $L(\lambda)$ لگاریتم درستنمایی λ و

$$h_1(\lambda)=\frac{dh(\lambda)}{d\lambda},\quad h_{11}(\lambda)=\frac{d^2h(\lambda)}{d\lambda^2},\quad v_1(\lambda)=\frac{dv(\lambda)}{d\lambda},\quad F_3(\lambda)=\frac{d^3F(\lambda)}{d\lambda^3}$$
$$\delta_{11}(\hat{\lambda})=\left(-\frac{d^2F(\lambda)}{d\lambda^2}\right)^{-1}$$

هستند. بنابر این به کمک روش تقریب لیندلی (۱۹۸۰) داریم

$$g(j,k)=\left(v^{j,k}(\hat{\alpha})+\frac{1}{2}h_{11}^{j,k}(\hat{\alpha})\delta_{11}(\hat{\alpha})+\frac{1}{2}w_3(\hat{\alpha})(\delta_{11}(\hat{\alpha}))^2h_1^{j,k}(\hat{\alpha})\right)$$

که در آن $\widehat{\alpha}$ برآورد ماکسیمم درستنمایی α و جواب معادلهٔ

$$\frac{۲n}{\alpha}+\sum_{i=1}^{n}\log(x_iy_i)-\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}\log x_i}{b_1+\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}}-\frac{n\sum_{i=1}^{n}y_i^{\alpha}\log_i}{b_2+\sum_{i=1}^{n}y_i^{\alpha}}=0$$

می‌باشد که به روش تکراری نیوتن-رافسون به دست می‌آید و همچنین داریم

$$h_1^{j,k}(\alpha)=\frac{dv^{j,k}(\alpha)}{d\alpha},\quad \delta_{11}(\alpha)=\left(-\frac{d^2w(\alpha)}{d\alpha^2}\right)^{-1},\quad w_3(\alpha)=\frac{d^3w(\alpha)}{d\alpha^3}$$

$$h_{11}^{j,k}(\alpha)=\frac{d^2v^{j,k}(\alpha)}{d\alpha^2}$$

بنابراین

$$h_1^{j,k}(\hat{\alpha})=(n-j+k+1)C_1^{n-j+k}C_2^{j-n-k-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\hat{\alpha}}\ln x_i$$
$$+(j-n-k-1)C_1^{n-j+k+1}C_2^{j-n-k-2}\sum_{i=1}^{n}y_i^{\hat{\alpha}}\ln y_i$$

$$\delta_{11}(\hat{\alpha})=\left[\frac{2n}{\hat{\alpha}^2}+(n+1)\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{\hat{\alpha}}\ln x_i+y_i^{\hat{\alpha}}\ln y_i\right)\right]^{-1}$$

$$w_3(\hat{\alpha})=\frac{4n}{\hat{\alpha}^3}+\sum_{i=1}^{n}\left[x_i^{\hat{\alpha}}(\ln x_i)^2+y_i^{\hat{\alpha}}(\ln y_i)^2\right]$$

$$h_{11}^{j,k}(\hat{\alpha})=(n-j+k+1)(n-j+k)\hat{C}_1^{\,n-j+k-1}\hat{C}_2^{\,j-n-k-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\hat{\alpha}}\ln x_i\right)^2$$
$$+۲(n-j+k+1)(j-n-k-1)\hat{C}_1^{\,n-j+k}\hat{C}_2^{\,j-n-k-2}(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\hat{\alpha}}\ln x_i)(\sum_{i=1}^{n}y_i^{\hat{\alpha}}\ln y_i)$$
$$+(n-j+k+1)\hat{C}_1^{\,n-j+k}\hat{C}_2^{\,j-n-k-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\hat{\alpha}}(\ln x_i)^2$$
$$+(j-n-k-1)(j-n-k-2)\hat{C}_2^{\,j-n-k-3}\hat{C}_1^{\,n-j+k+1}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^{\hat{\alpha}}\ln y_i\right)^2$$

$$+(j-n-k-1)\hat{C}_1^{\,n-j+k+1}\hat{C}_2^{\,j-n-k-2}\sum_{i=1}^{n} y_i^{\hat{\alpha}}(\ln y_i)^2$$

به دست می‌آیند که البته $\hat{C}_1=b_1+\sum_{i=1}^{n} X_i^{\hat{\alpha}}$ و $\hat{C}_2=b_2+\sum_{i=1}^{n} Y_i^{\hat{\alpha}}$ می‌باشند. فرض کنید

$$K^m(c_1)=\frac{1}{m}\left(c_1+\sum_{i=1}^{n} x_i\hat{\alpha}\right)^m-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\hat{\alpha}\right)^m$$
$$K^m(c_2)=\frac{1}{m}\left(c_2+\sum_{i=1}^{n} y_i\hat{\alpha}\right)^m-\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\hat{\alpha}\right)^m$$

باشند، آن‌گاه داریم

$$V^{j,k}=\int_0^{c_1}\int_0^{c_2} v^{j,k}(\hat{\alpha})db_1db_2=K^{(n-j+k+2)}(c_1)K^{(j-n-k)}(c_2)$$

$$H_1^{j,k}=\int_0^{c_1}\int_0^{c_2} h_1^{j,k}(\hat{\alpha})db_1db_2=(n-j+k+1)K^{(n-j+k+1)}(c_1)K^{(j-n-k)}(c_2)\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\alpha}}\ln x_i$$
$$+(j-n-k-1)K^{(n-j+k+2)}(c_1)K^{(j-n-k-1)}(c_2)\sum_{i=1}^{n} y_i^{\hat{\alpha}}\ln y_i$$

$$H_{11}^{j,k}=\int_0^{c_1}\int_0^{c_2} h_{11}^{j,k}(\hat{\alpha})db_1db_2$$
$$=(n-j+k+1)(n-j+k)K^{(n-j+k)}(c_1)K^{(j-n-k)}(c_2)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\alpha}}\ln x_i\right)^2$$
$$+۲(n-j+k+1)(j-n-k-1)K^{(n-j+k+1)}(c_1)K^{(j-n-k-1)}(c_2)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\alpha}}\ln x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\hat{\alpha}}\ln y_i\right)$$
$$+(n-j+k+1)K^{(n-j+k+1)}(c_1)K^{(j-n-k)}(c_2)\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\alpha}}(\ln x_i)^2$$
$$+(j-n-k-1)(j-n-k-2)K^{(j-n-k-2)}(c_2)K^{(n-j+k+2)}(c_1)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\hat{\alpha}}\ln y_i\right)^2$$
$$+(j-n-k-1)K^{(n-j+k+2)}(c_1)K^{(j-n-k-1)}(c_2)\sum_{i=1}^{n} y_i^{\hat{\alpha}}(\ln y_i)^2$$

بنابر این با استفاده از تعریف (۱) و قضیظ ۲، نتیجهٔ زیر به دست آورده می‌شود.

فرع ۱. برای توزیع وایبول با تابع چگالی احتمال (۱)، برآورد E- بیز R، تحت تابع زیان مربع خطا به صورت زیر است.

$$\widehat{R}_{EBS}=\frac{1}{n!c_1c_2}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}\frac{(-1)^{n-j}\Gamma(2n-j+k+2)\left(V^{j,k}+\frac{1}{2}H_{11}^{j,k}\delta_{11}+\frac{1}{2}w_3\delta_{11}^2H_1^{j,k}\right)}{(n-j)!k!}$$

اکنون در ادامه، برآورد بیز سلسله مراتبی R به دست آورده می‌شود. با توجه به تعریف (۲)، توزیع پیشین سلسله مراتبی α به صورت

$$\pi_8(\alpha)=\frac{1-c_3\alpha e^{-c_3\alpha}-e^{-c_3\alpha}}{c_3\alpha^2}$$

به دست می‌آید که در نتیجه، توزیع توام پسین سلسله مراتبی α، β_1 و β_2 برابر است با

$$\pi^{**}(\alpha,\beta_1,\beta_2|Z)=\frac{\alpha^{2n}\left(\prod_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^{\alpha-1}(\beta_1\beta_2)^n e^{-\left(\beta_1\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}+\beta_2\sum_{i=1}^{n}y_i^{\alpha}\right)}}{\int_0^{\infty}\alpha^{2n}\left(\prod_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^{\alpha-1}K^n(c_1)K^n(c_2)\pi_8(\alpha)d\alpha}$$

$$\times\,\pi_5(\beta_1)\pi_6(\beta_2)\pi_8(\alpha)$$

بنابراین با فرض

$$S(c_1,c_2)=\frac{(n-2)!}{c_1c_2}\sum_{j=0}^{n-2}\sum_{k=0}^{j}\frac{(-1)^{n-j}\Gamma(2n-2j+k-2)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}\right)^k}{\left(K^{(2n-2j+k-3)}(c_2)\right)^{-1}k!\,(n-2-j)!}$$
$$-\frac{(n-2)!}{c_1c_2}\sum_{j=0}^{n-2}\sum_{k=0}^{j}\frac{(-1)^{n-j}\Gamma(2n-2j+k-2)\left(c_1+\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}\right)^k}{\left(K^{(2n-2j+k-3)}(c_2)\right)^{-1}k!\,(n-2-j)!}$$
$$-\frac{(n-1)!}{c_1c_2}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j}\frac{(-1)^{n-1-j}\Gamma(2n-2j+k-1)\left(c_1+\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}\right)^k}{k!\,(n-1-j)!\left(K^{(2n-2j+k-3)}(c_2)\right)^{-1}}$$

داریم

فرع ۲. برای توزیع وایبول با تابع چگالی احتمال (۱)، برآورد بیز سلسله مراتبی R، تحت تابع زیان مربع خطا به صورت زیر است.

$$\widehat{R}_{HBS}=\frac{\int_0^{\infty}\alpha^{2n}\left(\prod_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^{\alpha-1}S(c_1,c_2)\pi_8(\alpha)d\alpha}{\int_0^{\infty}\alpha^{2n}\left(\prod_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^{\alpha-1}K^n(c_1)K^n(c_2)\pi_8(\alpha)d\alpha}$$

۲.۲ برآوردهای E- بیز و بیز سلسله مراتبی R تحت تابع زیان آنتروپی

فرض کنید توزیع‌های $W(\alpha, \beta_1)$ و $W(\alpha, \beta_2)$ مستقل از هم بوده و $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $W(\alpha, \beta_1)$ و $Y_1, \cdots, Y_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $W(\alpha, \beta_2)$ باشند. همچنین در این بخش بدون از دست دادن کلیت مسئله، $\beta_1 < \beta_2$ در نظر گرفته می‌شود. بنابر این با فرض $\Gamma(s, t) = \int_0^t u^{s-1} e^{-u} du$ و

$$M(\alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} k_j \frac{\Gamma(n-j+1)\Gamma(n+j, \hat{C}_1\beta_2)}{\hat{C}_1^{\,n+j+1}\hat{C}_2^{\,n-j+1}}$$

برآورد بیز R، تحت تابع زیان آنتروپی که با نماد $\widehat{R}_{BG}(b_1, b_2)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر به دست می‌آید.

قضیهٔ ۲. برای توزیع وایبول با تابع چگالی احتمال (۱)، برآورد بیز R، تحت تابع زیان آنتروپی برابر است با

$$\widehat{R}_{BG}(b_1, b_2) = \left\{ \frac{\int_0^\infty \alpha^{2n}\left(\prod_{i=1}^n x_i y_i\right)^{\alpha-1} M(\alpha) e^{-b_3\alpha} d\alpha}{\int_0^\infty \frac{\alpha^{2n}\left[\prod_{i=1}^n (x_i y_i)\right]^{\alpha-1} e^{-b_3\alpha}}{(C_1 C_2)^{n+1}} d\alpha} \right\}^{-\frac{1}{k}} \qquad (۱۱)$$

برهان.

$$\widehat{R}_{BG}(b_1, b_2) = \left[E\left(R^{-k}|Z\right)\right]^{-\frac{1}{k}}$$

$$= \left\{ \int_{.}^{\square} \int_{.}^{\square} \int_{.}^{\beta_2} \left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2}\right)^k \pi(\alpha, \beta_1, \beta_2 | Z) d\alpha d\beta_1 d\beta_2 \right\}^{-\frac{1}{k}}$$

با توجه به رابطهٔ

$$\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2}\right)^k = \left(1 + \frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^k = \sum_{j=0}^{\infty} k_j \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^j$$

داریم

$$\int_{.}^{\beta_2} \int_0^\infty \left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2}\right)^k (\beta_1\beta_2)^n e^{-C_1\beta_1 - C_2\beta_2} d\beta_1 d\beta_2$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} k_j \frac{\Gamma(n-j+1)\Gamma(n+j+1, C_1\beta_2)}{C_1^{n+j+1} C_2^{n-j+1}} = M(\alpha)$$

بنابر این $\widehat{R}_{BG}(b_1,b_2)$ به صورت زیر است.

$$\widehat{R}_{BG}(b_1,b_2)=\left\{\frac{\int_0^\infty \alpha^{2n}\left(\prod_{i=1}^n x_iy_i\right)^{\alpha-1}M(\alpha)e^{-b_3\alpha}d\alpha}{\int_0^\infty \frac{\alpha^{2n}\left[\prod_{i=1}^n (x_iy_i)\right]^{\alpha-1}e^{-b_3\alpha}}{(C_1C_2)^{n+1}}d\alpha}\right\}^{-\frac{1}{k}}$$

□

چون محاسبهٔ $\widehat{R}_{BG}(b_1,b_2)$ به روش معمول امکان پذیر نیست به روش تقریب لیندلی (۱۹۸۰) آن را به دست می‌آوریم. بنابر این با فرض‌های

$$h(\alpha)=(C_1C_2)^{n+1}M(\alpha)=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{k}{j}\Gamma(n+j+1,C_1\beta_2)\Gamma(n-j+1)\left(\frac{C_2}{C_1}\right)^j$$

$$w(\alpha)=\ln\left[\frac{\alpha^{2n}[\prod_{i=1}^n (x_iy_i)]^{\alpha-1}e^{-b_3\alpha}}{(C_1C_2)^{n+1}}\right]$$

رابطهٔ (۱۱) به صورت $\widehat{R}_{BG}(b_1,b_2)=\left\{\frac{\int_0^\infty h(\alpha)e^{w(\alpha)}d\alpha}{\int_0^\infty e^{w(\alpha)}d\alpha}\right\}^{-\frac{1}{k}}$ بازنویسی می‌شود که به کمک روش تقریب لیندلی (۱۹۸۰) داریم:

$$\widehat{R}_{BG}(b_1,b_2)=\left(h(\hat{\alpha})+\frac{1}{2}h_{11}(\hat{\alpha})\delta_{11}(\hat{\alpha})+\frac{1}{2}w_3(\hat{\alpha})(\delta_{11}(\hat{\alpha}))^2h_1(\hat{\alpha})\right)^{-\frac{1}{k}} \tag{۱۲}$$

که در آن $h_1(\alpha)=\frac{dh(\alpha)}{d\alpha}$ و $h_{11}(\alpha)=\frac{d^2h(\alpha)}{d\alpha^2}$ هستند. بنابر این داریم،

$$h_1(\hat{\alpha})=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{k}{j}\Gamma(n-j+1)S_1(\hat{\alpha},j)$$

به طوری که

$$S_1(\hat{\alpha},j)=j\hat{C}_2^{\,j-1}\hat{C}_1^{\,-j}\Gamma(n+j+1,\hat{C}_1\beta_2)\sum_{i=1}^n y_i^{\hat{\alpha}}\ln y_i$$
$$-j\hat{C}_1^{\,j-1}\hat{C}_2^{\,j}\Gamma(n+j+1,\hat{C}_1\beta_2)\sum_{i=1}^n x_i^{\hat{\alpha}}\ln x_i$$
$$+\beta_2^{n+j+1}\hat{C}_1^{\,n}\hat{C}_2^{\,j}e^{-\hat{C}_1\beta_2}\sum_{i=1}^n x_i^{\hat{\alpha}}\ln x_i$$

است و

$$h_{11}(\hat{\alpha}) = \sum_{i=2}^{4} \sum_{j=0}^{\infty} k_j \quad \Gamma(n-j+1) S_i(\hat{\alpha}, j)$$

می‌باشد به طوری که

$$S_2(\hat{\alpha}, j) = j(j-1){\hat{C}_2}^{j-2}{\hat{C}_1}^{-j}\Gamma(n+j+1, \hat{C}_1\beta_2)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\hat{\alpha}}\ln y_i\right)^2$$

$$-j^2{\hat{C}_2}^{j-1}{\hat{C}_1}^{-j-1}\Gamma(n+j+1, \hat{C}_1\beta_2)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\alpha}}\ln x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\hat{\alpha}}\ln y_i\right)$$

$$+j\beta_2^{n+j+1}{\hat{C}_1}^{n}{\hat{C}_2}^{j-1}e^{-\hat{C}_1\beta_2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\alpha}}\ln x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\hat{\alpha}}\ln y_i\right)$$

$$+j{\hat{C}_2}^{j-1}{\hat{C}_1}^{-j}\Gamma(n+j+1, \hat{C}_1\beta_2)\sum_{i=1}^{n} y_i^{\hat{\alpha}}(\ln y_i)^2$$

$$S_3(\hat{\alpha}, j) = -j(j-1){\hat{C}_1}^{j-2}{\hat{C}_2}^{j}\Gamma(n+j+1, \hat{C}_1\beta_2)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\alpha}}\ln x_i\right)^2$$

$$-j^2{\hat{C}_1}^{j-1}{\hat{C}_2}^{j-1}\Gamma(n+j+1, \hat{C}_1\beta_2)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\alpha}}\ln x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\hat{\alpha}}\ln y_i\right)$$

$$+\beta_2^{n+j+1}{\hat{C}_1}^{n+2j-1}{\hat{C}_2}^{j}e^{-\hat{C}_1\beta_2}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\alpha}}\ln x_i$$

$$-j{\hat{C}_1}^{j-1}{\hat{C}_2}^{j}\Gamma(n+j+1, \hat{C}_1\beta_2)\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\alpha}}(\ln x_i)^2$$

$$S_4(\hat{\alpha}, j) = n\beta_2^{n+j+1}{\hat{C}_1}^{n-1}{\hat{C}_2}^{j}e^{-\hat{C}_1\beta_2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\alpha}}\ln x_i\right)^2$$

$$+j\beta_2^{n+j+1}{\hat{C}_1}^{n}{\hat{C}_2}^{j-1}e^{-\hat{C}_1\beta_2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\alpha}}\ln x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\hat{\alpha}}\ln y_i\right)$$

$$+\beta_2^{n+j+2}{\hat{C}_1}^{n}{\hat{C}_2}^{j}e^{-\hat{C}_1\beta_2}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\alpha}}\ln x_i$$

$$+\beta_2^{n+j+1}{\hat{C}_1}^{n}{\hat{C}_2}^{j}e^{-\hat{C}_1\beta_2}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\alpha}}(\ln x_i)^2$$

می‌باشند. $w_3(\alpha)$ و $\delta_{11}(\alpha)$ نیز قبلا در بخش ۱.۲ به دست آورده شدند. با فرض‌های

$$S(r) = \int_0^{c_1} \hat{C}_1^{\,r}\Gamma(n+j+1,\hat{C}_1\beta_2)db_1, \quad SS(r) = \int_0^{c_1} \hat{C}_1^{\,r} e^{-\hat{C}_1\beta_2}db_1$$

داریم:

$$H(\hat{\alpha}) = \frac{1}{c_1c_2}\int_0^{c_1}\int_0^{c_2} h(\hat{\alpha})db_2db_1 = \frac{1}{c_1c_2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{k!\,(n-j)!\,K^j(c_2)S(-j)}{j!\,(k-j)!}$$

$$H_1(\hat{\alpha}) = \frac{1}{c_1c_2}\int_0^{c_1}\int_0^{c_2} h_1(\hat{\alpha})db_2db_1 = \frac{1}{c_1c_2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{k!\,(n-j)!}{j!\,(k-j)!}\{jK^{j-1}(c_2)S(-j)\sum_{i=1}^{n} y_i^{\hat{\alpha}}\ln y_i$$
$$-n!\,jK^j(c_2)S(j)\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\alpha}}\ln x_i + \beta_2^jK^j(c_2)\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\alpha}}\ln x_i\}$$

$$H_{11}(\hat{\alpha}) = \frac{1}{c_1c_2}\int_0^{c_1}\int_0^{c_2} h_{11}(\hat{\alpha})db_1db_2 = \frac{1}{c_1c_2}\sum_{i=2}^{4}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{k}{j}\Gamma(n-j+1)SS_i(\hat{\alpha},j)$$

به طوری که

$$SS_2(\hat{\alpha},j) = \int_0^{c_1}\int_0^{c_2} S_2(\hat{\alpha},j)db_2db_1$$
$$= j(j-1)K^{j-2}(c_2)S(-j)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\hat{\alpha}}\ln y_i\right)^2$$
$$-j^2K^{j-1}(c_2)S(-j-1)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\alpha}}\ln x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\hat{\alpha}}\ln y_i\right)$$
$$+j\beta_2^{n+j+1}K^{j-1}(c_2)SS(n)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\alpha}}\ln x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\hat{\alpha}}\ln y_i\right)$$
$$+jK^{j-1}(c_2)S(-j)\sum_{i=1}^{n} y_i^{\hat{\alpha}}(\ln y_i)^2$$

$$SS_3(\hat{\alpha},j) = \int_0^{c_1}\int_0^{c_2} S_3(\hat{\alpha},j)db_2db_1$$
$$= -j(j-1)K^{j}(c_2)S(j-2)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\alpha}}\ln x_i\right)^2$$
$$-j^2K^{j-1}(c_2)S(j-1)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\hat{\alpha}}\ln x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\hat{\alpha}}\ln y_i\right)$$

$$+\beta_2^{n+j+1}K^j(c_2)SS(n+2j-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^{\widehat{\alpha}}\ln x_i$$

$$-jK^j(c_2)S(j-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^{\widehat{\alpha}}(\ln x_i)^2$$

$$SS_4(\widehat{\alpha},j)=\int_0^{c_1}\int_0^{c_2} S_4(\widehat{\alpha},j)db_2db_1$$

$$=n\beta_2^{n+j+1}K^j(c_2)SS(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\widehat{\alpha}}\ln x_i\right)^2$$

$$+j\beta_2^{n+j+1}K^{j-1}(c_2)SS(n)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\widehat{\alpha}}\ln x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\widehat{\alpha}}\ln y_i\right)$$

$$+\beta_2^{n+j+2}K^j(c_2)SS(n)\sum_{i=1}^{n} x_i^{\widehat{\alpha}}\ln x_i$$

$$+\beta_2^{n+j+1}K^j(c_2)SS(n)\sum_{i=1}^{n} x_i^{\widehat{\alpha}}(\ln x_i)^2$$

می‌باشند.

فرع ۳. برای توزیع وایبول با تابع چگالی احتمال (۱)، برآورد E- بیز R، تحت تابع زیان آنتروپی (در حالت $k=-1$) به صورت زیر است:

$$\widehat{R}_{EBG}=\left(H(\widehat{\alpha})+\frac{1}{2}H_{11}(\widehat{\alpha})\delta_{11}(\widehat{\alpha})+\frac{1}{2}w_3(\widehat{\alpha})(\delta_{11}(\widehat{\alpha}))^2H_1(\widehat{\alpha})\right)$$

با توجه به توزیع توام پسین سلسله مراتبی α، β_1 و β_2 یعنی $\pi^{**}(\alpha,\beta_1,\beta_2|Z)$، برآورد بیز سلسله مراتبی R، تحت تابع زیان آنتروپی به صورت زیر به دست آورده می‌شود.

فرع ۴ . برای توزیع وایبول با تابع چگالی احتمال (۱)، برآورد بیز سلسله مراتبی R، تحت تابع زیان آنتروپی به صورت زیر است.

$$\widehat{R}_{HBG}=\left(E(R^{-k}|Z)\right)^{-\frac{1}{k}}$$

$$=\left\{\frac{\int_{.}^{} \int_{.}^{} \int_{.}^{} \left(\frac{\beta_1+\beta_2}{\beta_2}\right)^k \pi^{**}(\alpha,\beta_1,\beta_2|Z)d\alpha d\beta_1 d\beta_2}{\int_0^{\infty} \alpha^{2n}(\prod_{i=1}^{n} x_iy_i)^{\alpha-1}K^n(c_1)K^n(c_2)\pi_8(\alpha)d\alpha}\right\}^{-\frac{1}{k}}$$

$$=\left\{\frac{\int_{.}^{} \alpha^{2n}[\prod_{i=1}^{n}(x_iy_i)]^{\alpha-1}e^{-b_3\alpha}\pi_8(\alpha)T(\alpha)d\alpha}{\int_0^{\infty} \alpha^{2n}(\prod_{i=1}^{n} x_iy_i)^{\alpha-1}K^n(c_1)K^n(c_2)\pi_8(\alpha)d\alpha}\right\}^{-\frac{1}{k}}$$

که در آن داریم

$$T(\alpha)=\sum_{j=0}^{\infty} k_j \;\; K^{n+j}(c_1)K^{n-j}(c_2)$$

۳ ـ مطالعهٔ شبیه‌سازی

در این بخش از توزیع‌های $W(\alpha,\beta_1)$ و $W(\alpha,\beta_2)$، نمونه‌های تصادفی با حجم‌های متفاوت تولید می‌کنیم. سپس به مقایسه روش‌های بیز، E- بیز و بیز سلسله مراتبی R می‌پردازیم. الگوی شبیه‌سازی به صورت زیر است.

(۱) از توزیع یکنواخت استاندارد، نمونه‌های تصادفی با حجم‌های متفاوت تولید می‌کنیم.

(۲) فرض کنید U توزیع یکنواخت استاندارد دارد، آن‌گاه به کمک رابطه $X=\left[-\frac{1}{\beta}\log(1-U)\right]^{\frac{1}{\alpha}}$، از توزیع‌های $W(\alpha,\beta_1)$ و $W(\alpha,\beta_2)$ به ازای (α,β_1,β_2) با مقادیر (۱,۱,۲)، (۲,۲,۳)، (۲/۵,۳,۲/۵) و (۰/۵,۰/۵,۱/۵) ، نمونه‌های تصادفی با حجم‌های متفاوت تولید می‌کنیم.

(۳) به کمک نمونه‌های تصادفی تولید شده در مرحله دوم و به ازای $c_1=3, c_2=c_3=5$ و $k=-1$، برآوردهای بیز، E- بیز و بیز سلسله مراتبی R را به دست می‌آوریم.

مراحل اول تا سوم را ۱۰۰۰ بار تکرار نموده و میانگین برآوردگرها و مجموع مربعات خطای آن‌ها به دست می‌آوریم. نتایج شبیه‌سازی و مقدار واقعی $R(R_{real})$ در هرحالت در جدول‌های ۱ و ۲ آورده شده است. نتایج این جدول‌ها، نشان دهنده آن است که تحت تابع زیان مربع خطا، برآورد بیز سلسله مراتبی از برآوردهای بیز و E- بیز و تحت تابع زیان آنتروپی، برآورد بیز از برآوردهای بیز سلسله مراتبی و E- بیز بهتر می‌باشد. برای مثال به ازای $(\alpha,\beta_1,\beta_2)=(1,2,2)$ در جدول ۴، میانگین مربع خطای برآورد بیز سلسله مراتبی R برای $n=10,\cdots,50$ از میانگین مربع خطای برآوردهای بیز و E-بیز R کوچک‌تر است که بیان‌کننده بهتر بودن برآورد بیز سلسله مراتبی است. اما در جدول ۴ میانگین مربع خطای برآورد بیز R برای $n=10,\cdots,50$ از میانگین مربع خطای برآوردهای بیز سلسله مراتبی و E- بیز R کوچک‌تر است که بیان‌کننده بهتر بودن برآورد بیز می‌باشد.

همچنین برای مقایسه روش‌های برآورد R تحت تابع زیان مربع خطا، از واریانس توزیع پسین نیز می‌توان استفاده کرد. بنابر این اگر روش شبیه‌سازی T بار تکرار شود و $R_M^{(t)}$ برآورد R به روش‌های بیز $(M=1)$، E-بیز $(M=2)$ و بیز سلسله مراتبی $(M=3)$ در مرحله tام باشد، آن‌گاه برای $M=1,2,3$ داریم

$$\widehat{E}(R_M|\text{data})=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_M^{(t)},\quad \widehat{V}\text{ar}(R|\text{data})=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(R_M^{(t)}-\widehat{E}(R_M|\text{data})\right)^2$$

برای مقایسه روش‌های برآورد R، تحت تابع زیان آنتروپی، از ریسک پسین برآوردگرها نیز می‌توان استفاده کرد. با فرض $\theta = (\alpha, \beta_1, \beta_2)$ و $L_M^{(t)} = L(\theta, R_M^{(t)})$، ریسک برآوردگر R برای $M = 1,2,3$ به صورت

$$R_M(\theta) = E(L_M^{(t)}|\theta) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} L_M^{(t)}$$

محاسبه شده و با فرض

$$\theta_1 = (1,1,2), \theta_2 = (2,2,3), \theta_3 = (2/5,3,2/5), \theta_4 = (0/5,0/5,1/5)$$

ریسک بیز پسین برآوردگرها نیز به صورت زیر به دست می‌آید.

$$r_M = E(R_M(\theta)|\text{data}) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} R_M(\theta_i)$$

جدول ۱: میانگین برآوردهای R برای داده‌های شبیه‌سازی شده تحت تابع زیان مربع خطا

$\alpha = ۱$	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 2$	$R_{real} = 0/5$
n	$\hat{R}_{BS}$	$\hat{R}_{EBS}$	$\hat{R}_{HBS}$
۱۰	۰/۶۰۱۲(۰/۱۲۵۴)	۰/۶۹۱۴(۰/۱۵۶۴)	۰/۵۸۷۶(۰/۱۰۱۲)
۲۰	۰/۶۰۰۴(۰/۱۱۱۷)	۰/۶۷۵۴(۰/۱۴۱۲)	۰/۵۵۶۷(۰/۰۹۸۷)
۳۰	۰/۵۸۷۶(۰/۱۰۹۷)	۰/۶۲۵۴(۰/۱۲۶۵)	۰/۵۲۱۴(۰/۰۸۹۷)
۴۰	۰/۵۵۶۵(۰/۰۹۹۷)	۰/۵۸۸۹(۰/۱۱۱۸)	۰/۵۱۹۱(۰/۰۷۱۲)
۵۰	۰/۵۲۰۹(۰/۰۸۷۶)	۰/۵۳۴۳(۰/۱۰۸۸)	۰/۴۹۹۷(۰/۰۵۴۹)
$\alpha = 2$	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$	$R_{real} = 0/6$
n	$\hat{R}_{BS}$	$\hat{R}_{EBS}$	$\hat{R}_{HBS}$
۱۰	۰/۷۱۵۱(۰/۲۲۱۵)	۰/۷۶۵۴(۰/۳۲۱۷)	۰/۷۰۹۱(۰/۲۰۷۷)
۲۰	۰/۷۱۱۳(۰/۲۱۷۶)	۰/۷۵۶۶(۰/۳۱۴۱)	۰/۶۸۹۷(۰/۱۹۸۷)
۳۰	۰/۷۰۱۵(۰/۲۰۱۱)	۰/۷۵۱۹(۰/۳۰۹۲)	۰/۶۶۷۹(۰/۱۷۰۷)
۴۰	۰/۶۸(۰/۱۹۱۷)	۰/۷۳۴۹(۰/۲۸۹۷)	۰/۶۵۱۲(۰/۱۵۶۰)
۵۰	۰/۶۶۹۱(۰/۱۸۸۸)	۰/۷۱۸۸(۰/۲۶۷۵)	۰/۶۲۲۶(۰/۱۲۷۸)
$\alpha = 2/5$	$\beta_1 = 3$	$\beta_2 = 2/5$	$R_{real} = 0/454$
n	$\hat{R}_{BS}$	$\hat{R}_{EBS}$	$\hat{R}_{HBS}$
۱۰	۰/۵۲۶۷(۰/۳۵۶۰)	۰/۵۶۱۳(۰/۴۵۳۲)	۰/۴۶۷۲(۰/۳۲۰۳)
۲۰	۰/۵۰۹۷(۰/۳۲۱۱)	۰/۵۳۲۲(۰/۴۲۳۲)	۰/۴۵۷۰(۰/۳۰۶۷)
۳۰	۰/۴۹۶۵(۰/۳۱۷۶)	۰/۵۲۴۷(۰/۳۴۷۶)	۰/۴۵۶۶(۰/۲۸۹۶)
۴۰	۰/۴۶۵۷(۰/۲۹۸۷)	۰/۵۰۵۴(۰/۳۲۴۸)	۰/۴۵۵۹(۰/۲۵۵۳)
۵۰	۰/۴۵۴۸(۰/۲۵۸۹)	۰/۴۶۷۸(۰/۳۰۹۵)	۰/۴۵۴۸(۰/۲۴۱۵)
$\alpha = 0/5$	$\beta_1 = 0/5$	$\beta_2 = 1/5$	$R_{real} = 0/75$
n	$\hat{R}_{BS}$	$\hat{R}_{EBS}$	$\hat{R}_{HBS}$
۱۰	۰/۷۷۹۸(۰/۲۷۴۵)	۰/۸۵۱۴(۰/۳۲۱۳)	۰/۷۵۵۳(۰/۲۵۱۴)
۲۰	۰/۷۶۲۴(۰/۲۶۱۳)	۰/۸۱۲۳(۰/۳۰۹۸)	۰/۷۵۳۷(۰/۲۴۳۴)
۳۰	۰/۷۵۸۱(۰/۲۵۷۶)	۰/۸۰۸۷(۰/۲۹۷۵)	۰/۷۵۲۱(۰/۲۴۰۲)
۴۰	۰/۷۵۱۴(۰/۲۴۵۶)	۰/۷۸۱۶(۰/۲۷۸۶)	۰/۷۵۱۲(۰/۲۲۹۸)
۵۰	۰/۷۵۱۱(۰/۲۳۸۸)	۰/۷۵۱۲(۰/۲۲۶۷)	۰/۷۴۹۲(۰/۲۰۸۷)

جدول ۲: میانگین برآوردهای R برای داده‌های شبیه‌سازی شده تحت تابع زیان آنتروپی

$\alpha = 1$	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 2$	$R_{real} = 0/5$
n	$\widehat{R}_{BG}$	$\widehat{R}_{EBG}$	$\widehat{R}_{HBG}$
۱۰	۰/۵۷۲۲(۰/۲۱۳۲)	۰/۶۲۳۴(۰/۲۷۸۹)	۰/۵۹۵۵(۰/۳۲۱۸)
۲۰	۰/۵۶۸۷(۰/۲۰۱۷)	۰/۶۱۴۰(۰/۲۶۷۵)	۰/۵۸۷۶(۰/۳۰۹۸)
۳۰	۰/۵۴۵۵(۰/۱۸۷۷)	۰/۵۹۸۷(۰/۲۴۸۸)	۰/۵۶۷۷(۰/۲۹۸۷)
۴۰	۰/۵۳۹۵(۰/۱۶۵۴)	۰/۵۶۹۷(۰/۲۲۱۸)	۰/۵۴۶۶(۰/۲۷۶۷)
۵۰	۰/۵۱۱۹(۰/۱۱۵۲۷)	۰/۵۳۴۸۶(۰/۲۱۲۰)	۰/۵۲۹۷(۰/۲۵۲۹)
$\alpha = 2$	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$	$R_{real} = 0/6$
n	$\widehat{R}_{BS}$	$\widehat{R}_{EBS}$	$\widehat{R}_{HBS}$
۱۰	۰/۶۲۸۹(۰/۲۰۷۱)	۰/۷۷۲۱(۰/۳۳۱۱)	۰/۷۰۶۵(۰/۲۲۱۶)
۲۰	۰/۶۱۸۲(۰/۱۹۷۲)	۰/۷۶۵۴(۰/۳۱۱۰)	۰/۶۹۹۸(۰/۲۰۱۲)
۳۰	۰/۶۱۷۷(۰/۱۸۱۲)	۰/۷۴۱۱(۰/۲۹۸۸)	۰/۶۶۷۷(۰/۱۹۱۹)
۴۰	۰/۶۱۰۴(۰/۱۵۷۷)	۰/۷۲۱۱(۰/۲۸۱۶)	۰/۶۴۸۰(۰/۱۸۷۱)
۵۰	۰/۶۰۸۶(۰/۱۳۴۵)	۰/۶۹۸۷(۰/۲۶۷۶)	۰/۶۲۱۲۱(۰/۱۷۱۰)
$\alpha = 2.5$	$\beta_1 = 3$	$\beta_2 = 2/5$	$R_{real} = 0/454$
n	$\widehat{R}_{BS}$	$\widehat{R}_{EBS}$	$\widehat{R}_{HBS}$
۱۰	۰/۴۵۷۱(۰/۲۱۳۴)	۰/۴۷۱۲(۰/۳۰۹۷)	۰/۴۶۱۱(۰/۲۷۶۱)
۲۰	۰/۴۵۶۲(۰/۲۰۴۹)	۰/۴۶۶۵(۰/۲۹۸۷)	۰/۴۶۰۲(۰/۲۶۷۴)
۳۰	۰/۴۵۶۰(۰/۲۰۱۱)	۰/۴۶۱۱(۰/۲۷۴۷)	۰/۴۵۹۸(۰/۲۵۹۸)
۴۰	۰/۴۵۵۸(۰/۱۹۸۸)	۰/۴۵۹۲(۰/۲۵۷۷)	۰/۴۵۷۹(۰/۲۲۱۱)
۵۰	۰/۴۵۵۵(۰/۱۷۷۶)	۰/۴۵۶۸(۰/۲۴۵۶)	۰/۴۵۵۹(۰/۲۱۴۵)
$\alpha = 0/5$	$\beta_1 = 0/5$	$\beta_2 = 1/5$	$R_{real} = 0/75$
n	$\widehat{R}_{BS}$	$\widehat{R}_{EBS}$	$\widehat{R}_{HBS}$
۱۰	۰/۷۶۱۶(۰/۱۹۸۷)	۰/۷۹۶۱(۰/۲۲۳۲)	۰/۸۲۱۳(۰/۲۵۱۳)
۲۰	۰/۷۶۰۹(۰/۱۸۲۲)	۰/۷۸۷۶(۰/۲۱۴۵)	۰/۸۱۷۷(۰/۲۴۸۷)
۳۰	۰/۷۵۹۷(۰/۱۷۸۶)	۰/۷۷۱۲(۰/۲۰۵۶)	۰/۸۰۹۶(۰/۲۲۴۴)
۴۰	۰/۷۵۲۰(۰/۱۷۱۱)	۰/۷۶۲۲(۰/۱۹۱۰)	۰/۷۸۶۶(۰/۱۹۲۴)
۵۰	۰/۷۵۰۶(۰/۱۲۱۴)	۰/۷۶۲۲(۰/۱۸۷۹)	۰/۷۷۸۶(۰/۱۷۸۶)

نتیجه‌گیری

در این مقاله، وقتی که X و Y متغیر های تصادفی مستقل و دارای توزیع وایبول با پارامتر شکل یکسان و پارامتر اسکالر متفاوت هستند، برآوردهای E- بیز و بیز سلسله مراتبی $R = P(X > Y)$، تحت توابع زیان مربع خطا و آنتروپی به دست آورده شد. سپس به کمک روش شبیه‌سازی مونت کارلو، این برآورردها با هم و با برآورد بیز R مقایسه شدند. نتایج شبیه‌سازی بیانگر بهتر بودن برآورد بیز سلسله مراتبی R، تحت تابع زیان مربع خطا و بهتر بودن برآورد بیز R، تحت تابع زیان آنتروپی نسبت به سایر روش‌های برآورد است. همچنین در ارتباط با مقایسه روش‌های پیشنهادی یعنی روش‌های برآورد E- بیز و بیز سلسله مراتبی، نتایج شبیه‌سازی بیانگر بهتر بودن برآورد بیز سلسله مراتبی از برآورد E-بیز، تحت توابع زیان مربع خطا و آنتروپی می‌باشد. همچنین می‌توان نتایج مقایسه برآوردهای بیز، E- بیز و بیز سلسله مراتبی R در توزیع‌های نمایی و رایلی را به کمک نتایج مقایسه همین برآوردها در توزیع وایبول، به ترتیب در حالت‌های $\alpha = 1$ و $\alpha = 2$ به دست آورد.

References

1. Awad, A.M., Azzam, M.M. and Hamdan, M.A. (1981), Some inference results on P(Y <X) in the bivariate exponential model, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 10, 2515-2525.

2. Ando, T. and Zellner, A. (2010), Hierarchical Bayesian Analysis of the Seemingly Unrelated Regression and Simultaneous Equations Models Using a Combination of Direct Monte Carlo and Importance Sampling Techniques, *Bayesian Analysis*, 5(1), 65-96.

3. Asgharzadeh, A., Valiollahi, R. and Raqab, M.Z. (2011), Stress-strength reliability of Weibull distribution based on progressively censored samples, *SORT*, 35(2), 103-124.

4. Al-Mutairi, D.K., Ghitany, M.E. and Kundu, D. (2013), Inferences on stressstrength reliability from Lindley distribution, *Communication Statistics-Theory and Methods*, 42(8),1443-1463.

5. Baklizi, A. (2008), Likelihood and Bayesian estimation of $Pr(X < Y)$ using lower record values from the generalized exponential distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*, 52, 3468-3473.

6. Berger, J.O. (1985), *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, second ed., Springer-Verlag, New York.

7. Bateman, H. (1953), *Higer Transcendental Functions*, Vol. II. Hograw-Hill, New York.

8. Cressie, N. and Tingley, M.P. (2010), Comment: Hierarchical Statistical Modeling for Paleoclimate Reconstruction, *Journal of the American Statistical Association*, 105, 895-900.

9. Gupta, R.D. and Gupta, R.C. (1990), Estimation of $P(a_0X > b_0Y)$ in the multivarite normal case, *Statistics*, 1, 91-97.

10. Ghitany, M.E., Al-Mutairi, D.K. and Aboukhamseen, S.M. (2015), Estimation of the reliability of a stress-strength system from power Lindley distributions, *Communication Statistics Simulation and Computation*, 44, 118-136.

11. Han, M. (1997), The structure of hierarchical prior distribution and its applications, *Chinese Operations Research and Management Science*, 6(3), 31-40.

12. Han, M. (2009), E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of failure rate, *Applied Mathematical Modelling*, 33(4), 1915-1922.

13. Han, M. (2011), E-Bayesian estimation of the reliability derived from Binomial distribution, *Applied Mathematical Modelling*, 35, 2419-2424.

14. Jaheen, Z.F. and Okasha, H.M. (2011), E-Bayesian estimation for the Burr type XII model based on type-2 censoring, *Applied Mathematical Modelling*, 35, 4730-4737.

15. Kundu, D. and Gupta, R.D. (2005), Estimation of $P(Y < X)$ for the generalized exponential distribution, *Metrika*, 61, 291-308.

16. Lindley, D.V. and Smith, A.F. (1972), Bayes estimation for the linear model, *Journal of the Royal Statistical Society-Series B*, 34, 1-41.

17. Lindley, D.V. (1980), Approximate Bayesian methods, *Trabajos de Estadistica de Investigacion Operativa*, 31(1), 223-237.

18. Lio, Y.L. and Tsai, T.R. (2012), Estimation of $\delta = P(X < Y)$ for Burr XII distribution based on the progressively first failure-censored samples, *Journal of Applied Statistics*, 39(2), 309-322.

19. Micheas, A.C. and Wikle, C.K. (2009), A Bayesian Hierarchical Nonoverlapping Random Disc Growth Model, *Journal of the American Statistical Association*, 104, 274-283.

20. Osei, F.B. and Duker, A.A. (2011), Hierarchical Bayesian modeling of the space-time diffusion patterns of cholera epidemic in Kumasi, *Ghana. Statistica Neerlandica*, 65, 84-100.

21. Richard, D.M. (2011), A Bayesian hierarchical model for the measurement of working memory capacity, *Journal of Mathematical Psychology*, 55, 8-24.

22. Raqab, M.Z. and Kundu, D. (2005), Comparison of different estimators of $P(Y < X)$ for a scaled Burr type X distribution, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 34(2), 465-483.

23. Raqab, M.Z., Madi, T. and Kundu, D. (2008), Estimation of P(Y < X) for the three-parameter generalized exponential distribution, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 37, 2854-2865.

24. Saracoglu, B., Kinacia, I. and Kundu, D. (2012), On estimation of $R = P(Y < X)$ for exponential distribution under progressive type-II censoring, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 85(2), 729-744.

25. Wang, J., Li, D. and Chen, D. (2012), E Bayesian Estimation and Hierarchical Bayesian Estimation of the System Reliability Parameter, *Systems Engineering Procedia*, 3, 282-289.