یگانگی جواب مسائل مقدار مرزی شامل معادلهٔ بیضوی کوشی- ریمان با شرایط مرزی موضعی و غیرموضعی

جواد عبادپورگلنبر[۱]، محمد جهانشاهی*[۱]، نیهان علی‌اف[۲]
۱- دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، گروه ریاضی
۲- دانشگاه دولتی باکو، گروه ریاضی

دریافت: ۹۷/۰۷/۲۵ پذیرش: ۹۹/۰۲/۲۲

چکیده

در این مقاله دو مسئله مقدار مرزی شامل معادله کوشی – ریمان با دو شرط مرزی متفاوت، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در حالت اول، شرط مرزی از نوع موضعی است و برای اثبات یگانگی جواب نشان می دهیم معادله همگن متناظر با شرایط مرزی موضعی تنها جواب بدیهی صفر را دارد. در حالتی که شرایط مرزی غیرموضعی باشد برای اثبات یگانگی جواب ، ابتدا مسئله را به دستگاه معادلات انتگرالی نوع دوم فردهلم تبدیل نموده سپس هسته های تکینی‌دارآنها رت منظم‌سازی کرده، نهایتا شرایط کافی ارائه می‌دهیم تا هسته‌های معادلات انتگرال بدست آمده در شرایط قضیه نگاشت انقباضی صدق کنند تا از این رهگذر یگانگی جواب اثبات شود.

واژه‌های کلیدی: معادله کوشی-ریمان، یگانگی جواب، جواب اساسی، منظم سازی، دستگاه معادلات انتگرالی فردهلم

۱.مقدمه

معادلات دیفرانسیل جزئی لاپلاس وکوشی- ریمان از مهمترین معادلات بیضوی می‌باشند. در مباحث کلاسیک نشان داده شده است که این معادلات با شرایط اولیه خوش طرح نیستند [۲]. این معادلات با شرایط مرزی کلاسیک مثل شرایط مرزی دیریکله، نویمان و پوانکاره خوش‌طرح هستند ولی از آن‌جا که در معادلات دیفرانسیل جزئی همواره تعداد شرایط مرزی کلاسیک (موضعی) به تعداد نصف مرتبه معادله داده می‌شود این موضوع برای معادلات با مرتبهٔ فرد مثل معادله کوشی - ریمان مشکل ایجاد می‌کند[۶،۷،۸]. در این مقاله خوش طرح بودن معادله کوشی- ریمان را با شرایط مرزی مختلف از نوع موضعی و غیرموضعی بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که این مسائل در هر دو حالت از نقطه نظر یگانگی جواب، خوش طرح می‌باشد. در[۱۱] خوش طرح بودن برای مسائل مقدار مرزی شامل معادلات دیفرانسیل عادی خود الحاق و ناخود الحاق با شرایط مرزی موضعی و غیرموضعی نشان داده شده است.

* نویسنده مسئول jahanshahi@azaruniv.ac.ir

لازم به ذکر است که معادلات کوشی ریمان علاوه بر اینکه درخود ریاضات در بحث توابع تحلیلی و توابع هولومرفیک و همچنین در بحث توابع همساز و پیدا کردن مزدوج های همساز کاربرد دارند، در زیر به بعضی از کاربردهای آنها در فیزیک و مهندسی اشاره می کنیم. اولین کاربرد معادلات کوشی – ریمان در فیزیک و مهندسی برمیگردد به توسیع نظریه توابع تحلیلی ریمان که در آن u نشان دهنده پتانسیل سرعت سیال غیرمتراکم پایا در صفحه و v تابع بخار هست. با فرض این‌که زوج u و v در معادلات کوشی ریمان صدق می‌کنند در این صورت u پتانسیل سرعت جریان سیال در صفحه بوده طوری که پتانسیل سرعت سیال در هر نقطه از صفحه برابر با گرادیان u که با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود.

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j$$

با مشتق‌گیری مرتبهٔ دوم از معادلات کوشی ریمان به معادلهٔ لاپلاس می‌رسیم که مجهول آن یک تابع همساز می‌باشد و این واگرایی گرادیان را می‌رساند که برابر صفر هست و بنابراین سیال غیر متراکم است.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

بخش اول: مسأله مقدار مرزی برای معادله کوشی - ریمان با شرط مرزی موضعی

۱٫۱.   بیان ریاضی مسئله

مسأله مقدار مرزی زیر را در نظر می‌گیریم:

(۱)

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + i \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = f(x) \qquad x = (x_1 , x_2) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

با شرط مرزی موضعی

(۲)

$$u_1(x) \sin\left(\frac{\upsilon, x_1}{2}\right) + u_2(x) \cos\left(\frac{\upsilon, x_1}{2}\right) = \varphi(x) \quad x = (x_1 , x_2) \in \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

که f و φ توابع معلوم و پیوسته ای می‌باشند. همچنین در شرط مرزی (۲)، υ بردار قائم بر مرز ناحیه در جهت خارج و x_1 و x_2 بردارهای افقی و قائم مختصات دکارتی بوده و $\left(\frac{\upsilon, x_1}{2}\right)$ نصف زاویه بردار نرمال خارجی و محور x_1 می‌باشد.

فرض می‌کنیم تابع مجهول به صورت زیر باشد

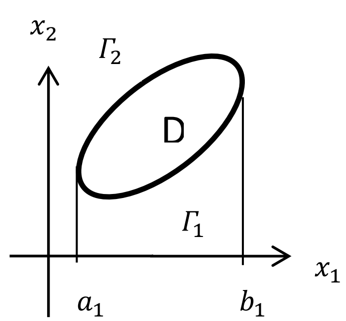
(۳)

$$u(x) = u_1(x) + iu_2(x)$$

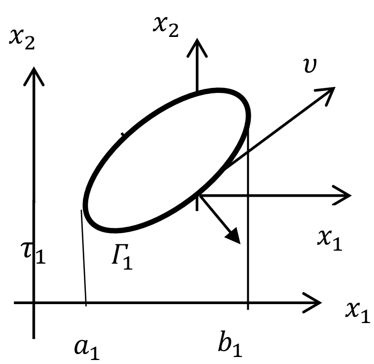
که یک تابع تحلیلی است که $u_1(x)$ و $u_2(x)$ توابع تحلیلی اند و $i = \sqrt{-1}$. منظور از جواب مساله (۲)-(۱)، جواب کلاسیک می‌باشد یعنی

$$u(x_1\,, x_2) \epsilon C^1(D) \cap C(\overline{D})$$

مطابق شکل‌های زیر ناحیهٔ مسطح $D \subseteq \mathbb{R}^2$ کراندار، همبند و مرز آن از توع لیاپانوف (Lyaponov) می‌باشد و روابط بین بردارهای قائم و مماس بر مرز و بردارهای dx_1 و dx_2 به صورت می‌باشند:



شکل ۱



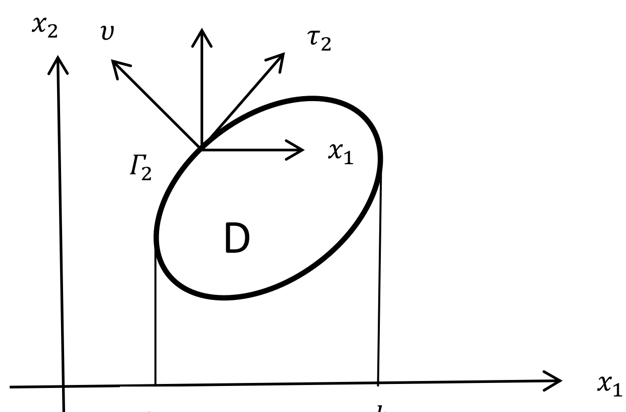
شکل ۲

$$\Gamma_1 \colon dx_1 = dx\cos(x_1, \tau_1)$$

$$\Rightarrow \qquad dx = \frac{dx_1}{\cos(x_1, \tau_1)}$$

$$\cos(\upsilon, x_2) = -\cos\,(x_1, \tau_1)$$

$$\cos(\upsilon, x_1) = \sin\,(x_1, \tau_1)$$



شکل ۳

$$\Gamma_2 \colon\; dx_1 = dx\cos(x_1, \tau_2)$$

$$\Rightarrow \qquad dx = \frac{dx_1}{\cos(x_1, \tau_2)}$$

$$\cos(\upsilon, x_2) = \cos\,(x_1, \tau_2)$$

$$\cos(\upsilon, x_1) = -\sin\,(x_1, \tau_2)$$

توضیح شکل‌ها: مرز ناحیهٔ D که به صورت لیاپانوف می‌باشد هر خط موازی محور قائم مرز این ناحیهٔ را حداکثر در دو نقطه قطع می‌کند.

در ضمن خم ساده Γ را یک خم لیاپانوف گوییم هرگاه :

الف) v ، بردار قائم خارجی به خمΓ به طور پیوسته رویΓ تغییر کند.

ب) در هر همسایگی به دلخواه کوچک هر نقطه از خم Γ هر خط موازی با بردار قائم به خم، خم را فقط در یک نقطه قطع کند.

ج) برای هر دو نقطهٔ دلخواه x و y که فاصلهٔ آنها به قدر کافی کوچک باشد داشته باشیم

$$\left|\left(\widehat{v_x, v_y}\right)\right| < c|x-y|^{\alpha}$$

که (v_x, v_y)زاویه بین بردار قائم به خم در نقاط x وy است و c عدد ثابتی است.

هدف اثبات یگانگی جواب مسأله (۲)-(۱) می‌باشد بدین منظور نشان می‌دهیم که مسأله مقدار مرزی همگن نظیر به معادلهٔ (۱) دارای تنها جواب بدیهی صفر می باشد [۴]. اثبات در دو مرحله صورت می‌گیرد در مرحلهٔ اول نشان می‌دهیم تابع مجهول (۳) در مرز ناحیهٔ D صفر است سپس در مرحلهٔ دوم نشان می دهیم تابع مجهول (۳) درداخل ناحیهٔ D نیز صفر است.

یادآوری ۱:

ابتدا فرمول گاوس-آستراگرادسکی[1] را که در روابط بعدی استفاده خواهد شد به صورت زیر یادآوری می‌کنیم [۳]:

$$\iint_D \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} g(x)dx = \int_\Gamma f(x)g(x)\cos(v, x_k)\,dx - \iint_D f(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x_k}dx \quad , \quad k = 1,2$$

مرحلهٔ اول:

به این منظور معادله همگن (۱) را در$u(x)$ ضرب کرده و در ناحیهٔ D انتگرال‌گیری می‌کنیم، و از دستور گاوس-آستراگرادسکی برای باز کردن انتگرال دوگانه استفاده می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$0 = \iint_D \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + i\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right)u(x)dx = \iint_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_2}u(x)dx + i\iint_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_1}u(x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Gamma u^2(x)\cos(v, x_2)\,dx + \frac{i}{2}\int_\Gamma u^2(x)\cos(v, x_1)\,dx$$

[1] Gauss-Ostrogradsky

$$= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} u^2(x)[\cos(\upsilon, x_2) + i \cos(\upsilon, x_1)]dx$$

که نتیجه می‌گیریم که:

(۴)

$$\int_{\Gamma} u^2(x)[\cos(\upsilon, x_2) + i \cos(\upsilon, x_1)]dx = 0$$

رابطهٔ (۳) را در رابطهٔ (۴) جایگذاری کرده، پس از جداسازی قسمت‌های حقیقی و موهومی دستگاه زیر را به دست می‌آوریم:

(۵)

$$\begin{cases} \int_{\Gamma} \{[{u_1}^2(x) - {u_2}^2(x)] \cos(\upsilon, x_2) - 2u_1(x)u_2(x) \cos(\upsilon, x_1)\}dx = 0 \\ \int_{\Gamma} \{[{u_1}^2(x) - {u_2}^2(x)] \cos(\upsilon, x_1) + 2u_1(x)u_2(x) \cos(\upsilon, x_2)\}dx = 0 \end{cases}$$

شرط مرزی موضعی (۲) را میتوان به صورت زیر نوشت:

(۶)

$$u_2(x) = -u_1(x) \tan\left(\frac{\upsilon, x_1}{2}\right)$$

که با جای‌گذاری رابطهٔ (۶) در دستگاه (۵) داریم:

(۷)

$$\begin{cases} \int_{\Gamma} {u_1}^2(x) \left\{\left(1 - \tan^2\left(\frac{\upsilon, x_1}{2}\right)\right) \cos(\upsilon, x_2) + 2\tan\left(\frac{\upsilon, x_1}{2}\right) \cos(\upsilon, x_1)\right\} dx = 0 \\ \int_{\Gamma} {u_1}^2(x) \left\{\left(1 - \tan^2\left(\frac{\upsilon, x_1}{2}\right)\right) \cos(\upsilon, x_1) - 2\tan\left(\frac{\upsilon, x_1}{2}\right) \cos(\upsilon, x_2)\right\} dx = 0 \end{cases}$$

در اولین سطر رابطهٔ (۷) جملات داخل آکولاد را در نظر می‌گیریم:

$$\left(1 - \tan^2\left(\frac{\upsilon, x_1}{2}\right)\right) \cos(\upsilon, x_2) + 2\tan\left(\frac{\upsilon, x_1}{2}\right) \cos(\upsilon, x_1)$$

$$= \left(1 - \frac{1-\cos(\upsilon,x_1)}{1+\cos(\upsilon,x_1)}\right)\cos(\upsilon,x_2) + 2\cdot\frac{2\sin\left(\frac{\upsilon,x_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\upsilon,x_1}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\upsilon,x_1}{2}\right)}\cos(\upsilon,x_1)$$

$$= \frac{2\cos(\upsilon,x_1)}{1+\cos(\upsilon,x_1)}\cos(\upsilon,x_2) + \frac{2\sin(\upsilon,x_1)}{1+\cos(\upsilon,x_1)}\cos(\upsilon,x_1) = \frac{2\cos(\upsilon,x_1)\left[\cos(\upsilon,x_2)+\sin(\upsilon,x_1)\right]}{1+\cos(\upsilon,x_1)}$$

با توجه به روابط حاصل از شکل‌های ۲ و۳ عبارت $\cos(\upsilon,x_2)+\sin(\upsilon,x_1)$ همواره صفر است. لذا اولین سطر دستگاه (۷) به یک رابطهٔ بدیهی تبدیل می‌شود. برای گریز از این حالت در سطر دوم رابطهٔ (۷)، جملات داخل آکولاد را در نظر می‌گیریم:

$$\left(1-\tan^2\left(\frac{\upsilon,x_1}{2}\right)\right)\cos(\upsilon,x_2) - 2\tan\left(\frac{\upsilon,x_1}{2}\right)\cos(\upsilon,x_2)$$

$$= \left(1 - \frac{1-\cos(\upsilon,x_1)}{1+\cos(\upsilon,x_1)}\right)\cos(\upsilon,x_1) - 2\cdot\frac{2\sin\left(\frac{\upsilon,x_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\upsilon,x_1}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\upsilon,x_1}{2}\right)}\cos(\upsilon,x_2)$$

$$= \frac{2\cos^2(\upsilon,x_1)}{1+\cos(\upsilon,x_1)}\cos(\upsilon,x_2) - \frac{2\sin(\upsilon,x_1)\cos(\upsilon,x_2)}{1+\cos(\upsilon,x_1)} = \frac{2\cos^2(\upsilon,x_1)+2\sin^2(\upsilon,x_1)}{1+\cos(\upsilon,x_1)}$$

$$= \frac{2}{1+\cos(\upsilon,x_1)}$$

با توجه به توضیحات بالا معادلهٔ دوم رابطهٔ (۷) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_{\Gamma} \frac{{u_1}^2(x)}{1+\cos(\upsilon,x_1)}dx \ = 0$$

چون تابع زیر انتگرال نامنفی است، نتیجه می‌شود که

(۸)

$$u_1(x) \equiv 0 \qquad\qquad x\in\Gamma$$

در شرط مرزی (۲) اگر رابطهٔ (۸) را اعمال کنیم، نتیجه می‌شود که

(۹)

$$u_2(x) \equiv 0 \qquad\qquad x\in\Gamma$$

با توجه به روابط (۸) و (۹) از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌گیریم که

(۱۰)

$$u(x) = u_1(x) + iu_2(x) \equiv 0 \qquad x \in \Gamma$$

روابط بالا نتیجه داد که $u(x) = u_1(x) + i\, u_2(x)$ در مرز ناحیهٔ D یعنی Γ صفر است.

مرحلهٔ دوم:

در زیر نشان می‌دهیم که $u(x)$ در داخل ناحیه D نیز صفر است به این منظور از جواب اساسی معادله کوشی- ریمان به صورت زیر استفاده می‌کنیم [۱]:

(۱۱)

$$U(x-\xi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}$$

اکنون رابطهٔ (۱۱) را در معادله معادله کوشی- ریمان همگن ضرب کرده ودر ناحیه D انتگرال می‌گیریم، و در باز کردن انتگرال های زیر شبیه مرحله اول از دستور گاوس- آستراگرادسکی استفاده می‌کنیم لذا خواهیم داشت:

(۱۲)

$$\begin{aligned}
0 &= \iint_D \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + i\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right) U(x-\xi)\,dx \\
&= \iint_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} U(x-\xi)\,dx + i\iint_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} U(x-\xi)\,dx \\
&= \int_\Gamma u(x)\,U(x-\xi)\cos(\upsilon, x_2)\,dx - \iint_D u(x)\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}\,dx \\
&+ i\int_\Gamma u(x)\,U(x-\xi)\cos(\upsilon, x_1)\,dx - i\iint_D u(x)\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}\,dx \\
&= \int_\Gamma u(x)\,U(x-\xi)[\cos(\upsilon, x_2) + i\cos(\upsilon, x_1)]\,dx \\
&- \iint_D u(x)\left(\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2} + i\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}\right)\,dx
\end{aligned}$$

بنا به خاصیت جواب اساسی و تابع دلتای دیراک داریم:

$$\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}+i\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}=\delta(x-\xi)$$

که در آن نماد δ تابع دلتای دیراک است. از خاصیت تابع زیر استفاده کرده،

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x-\xi)dx=\begin{cases} f(\xi) & ; \quad \xi\epsilon(a,b) \\ \frac{1}{2}f(\xi) & ; \quad \xi=a \text{ یا } \xi=a \end{cases}$$

رابطهٔ (۱۲) به صورت زیر در می آید[۱]:

(۱۳)

$$\int_\Gamma u(x)\,U(x-\xi)[\cos(\upsilon,x_2)+i\cos(\upsilon,x_1)]\,dx=\begin{cases} u(\xi) & ; \quad \xi\epsilon D \\ \frac{1}{2}u(\xi) & ; \quad \xi\epsilon\Gamma \end{cases}$$

با توجه به رابطهٔ (۱۰) و نیز با اولین رابطه سمت راست رابطهٔ (۱۳) نتیجه می شود که $u(x)$ در داخل ناحیه D نیز صفر است به عبارت دیگر:

$$u(x)\equiv 0 \qquad\qquad (x_1,x_2)\epsilon D$$

بنابراین جواب مسأله (۲)-(۱) یگانه است.■

با جمع‌بندی قضیه زیر را خواهیم داشت:

قضیهٔ ۱:

فرض کنید ناحیه $D\subseteq\mathbb{R}^2$ یک ناحیه کراندار و همبند باشد و هر خط موازی با محور عرض ها، مرزD را حداکثر در دو نقطه قطع کند. اگر f وφ توابع پیوسته‌ای باشند، آنگاه جواب مسأله مقدارمرزی (۲)-(۱) یگانه است.

بخش دوم: مسئله مقدار مرزی برای معادله کوشی – ریمان با شرایط مرزی غیر موضعی

مسأله مقدار مرزی زیر را در نظر می‌گیریم:

(۱۴)

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}+i\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}=f(x) \qquad x\in D$$

که با شرط مرزی غیرموضعی زیر داده می‌شود:

(۱۵)

$$\alpha_1(x_1)u\big(x_1,\gamma_1(x_1)\big)+\alpha_2(x_1)u\big(x_1,\gamma_2(x_1)\big)=0 \quad ; \qquad x_1\in[a_1,b_1]$$

که در آن $\alpha_j(x_1) \neq 0\ ,\ \ j=1,2$ توابعی از کلاس هولدر (Holder) می‌باشند و در ضمن

$$\partial D = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \ \ ; [a_1 , b_1] = Proj|_{\Gamma_1} = Proj|_{\Gamma_2}$$

یادآوری۲:

اگر پروسه به کار رفته در بخش اول مقاله را بکار ببریم به رابطه‌ای خواهیم رسید که امکان اینکه بتوانیم دستگاه (۷) را نتیجه بگیریم ندارد و لذا در این بخش اثبات یگانگی را از یک روش دیگر استفاده می‌کنیم . به این منظور از حالت دوم رابطه (۱۳) که در آن (ξ_1 , ξ_2) متعلق به مرز D باشد ابتدا مسدله مقدار مرزی (۱۵)-(۱۴) را به دستگاه معادلات انتگرال مرزی نوع دوم فردهلم تبدیل می‌کنیم و با جایگزینی جواب اساسی طبق رابطهٔ (۱۱) و بعضی عملیات ساده‌سازی این معادلات انتگرال مرزی به صورت زیر خواهد بود:

(۱۶)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}u\left(\xi_1 ,\gamma_1(\xi_1)\right) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{a_1}^{b_1} \dfrac{u\left(x_1 ,\gamma_1(x_1)\right)}{\gamma_2(x_1)-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\left(1-i\gamma'_2(x_1)\right)dx_1 \\ -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{a_1}^{b_1} \dfrac{u\left(x_1 ,\gamma_1(x_1)\right)}{\gamma_1(x_1)-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\left(1-i\gamma'_1(x_1)\right)dx_1 ;\ \ \xi = \ (\xi_1 ,\xi_2) \in \Gamma_1 \\ \dfrac{1}{2}u\left(\xi_1 ,\gamma_2(\xi_1)\right) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{a_1}^{b_1} \dfrac{u\left(x_1 ,\gamma_2(x_1)\right)}{\gamma_2(x_1)-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\left(1-i\gamma'_2(x_1)\right)dx_1 \\ -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{a_1}^{b_1} \dfrac{u\left(x_1 ,\gamma_1(x_1)\right)}{\gamma_1(x_1)-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\left(1-i\gamma'_1(x_1)\right)dx_1 ;\ \ \xi = \ (\xi_1 ,\xi_2) \in \Gamma_2 \end{cases}$$

منظم‌سازی تکینی‌ها در هسته‌های انتگرال‌ها:

در دستگاه (۱۶)، انتگرال‌هایی که دارای تکینی (singularity) هستند را مشخص می کنیم لذا برای راحتی، فقط آن قسمت از هسته که دارای تکینی می‌باشند را در نظر می‌گیریم. توجه شود که هستهٔ جملهٔ اول رابطهٔ نخست تکینی ندارد و جملهٔ دوم آن تکینی دارد همچنین هستهٔ جملهٔ اول رابطهٔ دوم (۱۶) تکینی ندارد و جملهٔ دوم (۱۶) رابطهٔ تکینی دارد:

$$-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1-i\gamma'_1(x_1)}{\gamma_1(x_1)-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}=-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1-i\gamma'_1(x_1)}{[\gamma'_1(\sigma_1(x_1,\xi_1))+i](x_1-\xi_1)}=\frac{i}{\pi}\cdot\frac{1-i\gamma'_1(x_1)}{1-i\gamma'_1(\sigma_1(x_1,\xi_1))}\cdot\frac{1}{x_1-\xi_1}$$

$$=\frac{i}{\pi}\cdot\frac{1}{x_1-\xi_1}+\frac{i}{\pi}\cdot\frac{1}{x_1-\xi_1}\cdot\frac{i[\gamma'_1(\sigma_1(x_1,\xi_1))-\gamma'_1(x_1)]}{1-i\gamma'_1(\sigma_1(x_1,\xi_1))}$$

توجه شود که از قضیهٔ مقدار میانگین برای مشتق در مورد منحنی‌های Γ_1 و Γ_2 که ضابطه‌های آن با $\gamma_1(x_1)$ و $\gamma_2(x_1)$ داده شده است استفاده می‌کنیم و نیز

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1-i\gamma'_1(x_2)}{\gamma_2(x_1)-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1-i\gamma'_2(x_1)}{[\gamma'_2(\sigma_2(x_1,\xi_1))+i](x_1-\xi_1)}=-\frac{i}{\pi}\cdot\frac{1-i\gamma'_2(x_1)}{1-i\gamma'_2(\sigma_2(x_1,\xi_1))}\cdot\frac{1}{x_1-\xi_1}$$

$$=-\frac{i}{\pi}\cdot\frac{1}{x_1-\xi_1}-\frac{i}{\pi}\cdot\frac{1}{x_1-\xi_1}\cdot\frac{i[\gamma'_2(\sigma_2(x_1,\xi_1))-\gamma'_2(x_1)]}{1-i\gamma'_2(\sigma_2(x_1,\xi_1))}$$

روابط به دست آمده بالا را در دستگاه (۱۶) جای‌گذاری می‌کنیم؛ داریم:

$$u\left(\xi_1,\gamma_1(\xi_1)\right)=\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u\left(x_1,\gamma_1(x_1)\right)}{x_1-\xi_1}dx_1+\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u\left(x_1,\gamma_1(x_1)\right)}{1-i\gamma'_1(\sigma_1(x_1,\xi_1))}\cdot\frac{\gamma'_1(x_1)-\gamma'_1(\sigma_1(x_1,\xi_1))}{x_1-\xi_1}dx_1$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u\left(x_1,\gamma_2(x_1)\right)}{\gamma_2(x_1)-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}(1-i\gamma'_2(x_1))dx_1$$

و

$$u\left(\xi_1,\gamma_2(\xi_1)\right)=-\frac{i}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u\left(x_1,\gamma_2(x_1)\right)}{x_1-\xi_1}dx_1-\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u\left(x_1,\gamma_2(x_1)\right)}{1-i\gamma'_2(\sigma_2(x_1,\xi_1))}\cdot\frac{\gamma'_2(x_1)-\gamma'_2(\sigma_2(x_1,\xi_1))}{x_1-\xi_1}dx_1$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{u\left(x_1,\gamma_1(x_1)\right)}{\gamma_1(x_1)-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\left(1-i\gamma'_1(x_1)\right)dx_1$$

روابط فوق در واقع معادلات انتگرال مرزی نسبت به تابع مجهول می‌باشند که هسته‌های آنها منظم‌سازی شده است[۶،۷].
اکنون روابط اول و دوم بالا را به ترتیب در $\alpha_1(\xi_1)$ و $-\alpha_1(\xi_1)$ ضرب و طرفین را با هم جمع می‌زنیم. با توجه به شرط مرزی مسأله، دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} \alpha_1(\xi_1)u\left(\xi_1,\gamma_1(\xi_1)\right)-\alpha_2(\xi_1)u\left(\xi_1,\gamma_2(\xi_1)\right) \\ \quad =\dfrac{i}{\pi}\displaystyle\int_{a_1}^{b_1}\frac{\alpha_1(\xi_1)-\alpha_1(x_1)}{x_1-\xi_1}u\left(x_1,\gamma_1(x_1)\right)dx_1 \\ \quad\quad +\dfrac{\alpha_1(\xi_1)}{\pi}\displaystyle\int_{a_1}^{b_1}\frac{u\left(x_1,\gamma_1(x_1)\right)}{1-i\gamma'_1\left(\sigma_1(x_1,\xi_1)\right)}\cdot\frac{\gamma'_1(x_1)-\gamma'_1\left(\sigma_1(x_1,\xi_1)\right)}{x_1-\xi_1}dx_1 \\ \quad\quad +\dfrac{\alpha_1(\xi_1)}{\pi}\displaystyle\int_{a_1}^{b_1}\frac{u\left(x_1,\gamma_1(x_1)\right)}{1-i\gamma'_1\left(\sigma_1(x_1,\xi_1)\right)}\cdot\frac{\gamma'_1(x_1)-\gamma'_1\left(\sigma_1(x_1,\xi_1)\right)}{x_1-\xi_1}dx_1 \\ \quad\quad +\dfrac{\alpha_2(\xi_1)}{\pi}\displaystyle\int_{a_1}^{b_1}\frac{u\left(x_1,\gamma_2(x_1)\right)}{1-i\gamma'_2\left(\sigma_2(x_1,\xi_1)\right)}\cdot\frac{\gamma'_2(x_1)-\gamma'_2\left(\sigma_2(x_1,\xi_1)\right)}{x_1-\xi_1}dx_1 \\ \quad\quad +\dfrac{\alpha_2(\xi_1)}{\pi}\displaystyle\int_{a_1}^{b_1}\frac{u\left(x_1,\gamma_2(x_1)\right)}{\gamma_1(x_1)-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}\cdot\left(1-i\gamma'_1(x_1)\right)dx_1 \\ \alpha_1(\xi_1)u\left(\xi_1,\gamma_1(\xi_1)\right)+\alpha_2(\xi_1)u\left(\xi_1,\gamma_2(\xi_1)\right)=0 \end{cases}$$

با جمع و تفریق معادلات دستگاه فوق داریم:

(۱۷)

$$\begin{cases} u\left(\xi_1,\gamma_1(\xi_1)\right)=\displaystyle\int_{a_1}^{b_1}\left[K_{11}(\xi_1,x_1)u\left(x_1,\gamma_1(x_1)\right)+K_{12}(\xi_1,x_1)u\left(x_1,\gamma_2(x_1)\right)\right]dx_1 \\ u\left(\xi_1,\gamma_2(\xi_1)\right)=\displaystyle\int_{a_1}^{b_1}\left[K_{21}(\xi_1,x_1)u\left(x_1,\gamma_1(x_1)\right)+K_{22}(\xi_1,x_1)u\left(x_1,\gamma_2(x_1)\right)\right]dx_1 \end{cases}$$

که در این‌جا

$$K_{11}(\xi_1,x_1)=\frac{i}{2\pi\alpha_1(\xi_1)}\cdot\frac{\alpha_1(\xi_1)-\alpha_1(x_1)}{x_1-\xi_1}+\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1-i\gamma'_1(\sigma_1(x_1,\xi_1))}\cdot\frac{\gamma'_1(x_1)-\gamma'_1(\sigma_1(x_1,\xi_1))}{x_1-\xi_1}$$

$$+\frac{\alpha_2(\xi_1)}{2\pi\alpha_1(\xi_1)}\cdot\frac{1-i\gamma'_1(x_1)}{\gamma_1(x_1)-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)}$$

و

$$K_{12}(\xi_1, x_1) = \frac{i}{2\pi\alpha_1(\xi_1)} \cdot \frac{\alpha_2(\xi_1) - \alpha_2(x_1)}{x_1 - \xi_1} + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - \gamma'_2(x_1)}{\gamma_2(x_1) - \gamma_1(\xi_1) + i(x_1 - \xi_1)} \cdot \frac{\gamma'_1(x_1) - \gamma'_1(\sigma_1(x_1, \xi_1))}{x_1 - \xi_1}$$
$$+ \frac{\alpha_2(\xi_1)}{2\pi\alpha_1(\xi_1)} \cdot \frac{1}{1 - \gamma'_2(\sigma_2(x_1, \xi_1))} \cdot \frac{\gamma'_2(x_1) - \gamma'_2(\sigma_1(x_1, \xi_1))}{x_1 - \xi_1}$$

و

$$K_{21}(\xi_1, x_1) = -\frac{i}{2\pi\alpha_2(\xi_1)} \cdot \frac{\alpha_1(\xi_1) - \alpha_1(x_1)}{x_1 - \xi_1} - \frac{\alpha_1(\xi_1)}{2\pi\alpha_2(\xi_1)} \cdot \frac{1}{1 - i\gamma'_1(\sigma_1(x_1, \xi_1))} \cdot \frac{\gamma'_1(x_1) - \gamma'_1(\sigma_1(x_1, \xi_1))}{x_1 - \xi_1}$$
$$- \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - i\gamma'_1(x_1)}{\gamma_1(x_1) - \gamma_2(\xi_1) + i(x_1 - \xi_1)}$$

و

$$K_{22}(\xi_1, x_1) = -\frac{i}{2\pi\alpha_2(\xi_1)} \cdot \frac{\alpha_2(\xi_1) - \alpha_2(x_1)}{x_1 - \xi_1} - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1 - i\gamma'_2(\sigma_2(x_1, \xi_1))} \cdot \frac{\gamma'_2(x_1) - \gamma'_2(\sigma_2(x_1, \xi_1))}{x_1 - \xi_1}$$
$$- \frac{\alpha_1(\xi_1)}{2\pi\alpha_2(\xi_1)} \cdot \frac{1 - i\gamma'_2(x_1)}{\gamma_2(x_1) - \gamma_1(\xi_1) + i(x_1 - \xi_1)}$$

دستگاه معادلات انتگرال (۱۷) در واقع تبدیل یافته مسئله مقدار مرزی به دستگاه معادلات انتگرالی نوع دوم فردهلم با هسته‌های منظم‌سازی شده می‌باشد اکنون دنبال این هستیم با تخمین‌های مناسب روی عبارت‌های مربوط به هسته‌های فوق و ارائه شرایط کافی روی منحنی‌های γ_1 و γ_2 و توابع $\alpha_1(x_1)$ و $\alpha_2(x_1)$ نشان دهیم که معادلات انتگرال مرزی فوق در شرایط نگاشت انقباضی صدق می‌کنند تا از این موضوع یگانگی نقطهٔ ثابت این عملگر و در نهایت یگانگی جواب این معادلات را نتیجه بگیریم. به این منظور ابتدا از شرط مرزی استفاده کرده معادلهٔ اول دستگاه به صورت زیر در می‌آید:

$$u(\xi_1, \gamma_1(\xi_1)) = \int_{a_1}^{b_1} \left[K_{11}(\xi_1, x_1) - \frac{\alpha_1(x_1)}{\alpha_2(x_1)} K_{12}(\xi_1, x_1)\right] u(x_1, \gamma_1(x_1)) dx_1$$

با فرض عبارت داخل کروشه انتگرال بالا به صورت زیر داریم:

(۱۸)

$$K(\xi_1, x_1) = K_{11}(\xi_1, x_1) - \frac{\alpha_1(x_1)}{\alpha_2(x_1)} K_{12}(\xi_1, x_1)$$

$$|K(\xi_1, x_1)| = \left|K_{11}(\xi_1, x_1) - \frac{\alpha_1(x_1)}{\alpha_2(x_1)}K_{12}(\xi_1, x_1)\right| \le |K_{11}(\xi_1, x_1)| + \frac{|\alpha_1(x_1)|}{|\alpha_2(x_1)|}|K_{12}(\xi_1, x_1)|$$

$$\le \frac{1}{2\pi|\alpha_1(\xi_1)|}\cdot\left|\alpha_1{}'(\tilde{\sigma}(x_1.\xi_1))\right| + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1+\gamma'_1{}^2(\sigma_1(x_1.\xi_1))}}\cdot\frac{\left|\gamma''_1(\tilde{\tilde{\sigma}}_1(x_1,\xi_1))\right|}{|x_1-\xi_1|}\cdot|x_1-\sigma_1(x_1,\xi_1)|$$

$$+\frac{|\alpha_2(\xi_1)|}{2\pi|\alpha_1(\xi_1)|}\cdot\frac{\sqrt{1+\gamma'_1{}^2(x_1)}}{\sqrt{(\gamma_1(x_1)-\gamma_2(\xi_1))^2+(x_1-\xi_1)^2}}$$

$$+\frac{|\alpha_1(x_1)|}{|\alpha_2(x_1)|}\left\{\frac{1}{2\pi|\alpha_1(\xi_1)|}\cdot\left|\alpha_2{}'(\tilde{\sigma}_2(x_1.\xi_1))\right| + \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{1+\gamma'_2{}^2(x_1)}}{\sqrt{(\gamma_2(x_1)-\gamma_1(\xi_1))^2+(x_1-\xi_1)^2}}\right.$$

$$\left.+\frac{|\alpha_2(\xi_1)|}{2\pi|\alpha_1(\xi_1)|}\frac{1}{\sqrt{1+\gamma'_2{}^2(\sigma_2(x_1.\xi_1))}}\cdot\frac{\left|\gamma''_2(\tilde{\tilde{\sigma}}_2(x_1,\xi_1))\right|}{|x_1-\xi_1|}\cdot|x_1-\sigma_2(x_1,\xi_1)|\right\}$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\tilde{C}_1{}'}{C_1}+\frac{1}{2\pi}C_1{}''+\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\tilde{C}_2}{C_1}\cdot\frac{\hat{C}_1}{C_{12}}+\frac{\tilde{C}_1}{C_2}\left\{\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\tilde{C}_2{}'}{C_1}+\frac{1}{2\pi}\frac{\hat{C}_2}{C_{21}}+\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\tilde{C}_2}{C_1}\cdot C_2{}''\right\}$$

$$=\frac{\tilde{C}_1{}'C_{12}+C_1{}''C_1C_{12}+\tilde{C}_2\hat{C}_1}{2\pi C_1C_{12}}+\frac{\tilde{C}_1}{C_2}\cdot\frac{\tilde{C}_2{}'C_{21}+\hat{C}_2C_1+\tilde{C}_2C_2{}''}{2\pi C_1C_{21}}<1$$

در زیر دلایل تخمین‌های بکار رفته برای اجزای هر کدام از هسته‌های مربوطه را ملاحظه می‌کنیم:

$$|\alpha_1(\xi_1)|>C_1\,,\quad |\alpha_2(\xi_1)|>C_2 \qquad (A)$$

نامساوی (A) به خاطر این‌که توابع فوق مخالف صفر فرض شده‌اند.

$$\left|\alpha_1{}'(\tilde{\sigma}_1(x_1.\xi_1))\right|\le\tilde{C}_1{}'\quad,\quad\left|\alpha_2{}'(\tilde{\sigma}_2(x_1.\xi_1))\right|\le\tilde{C}_2{}' \qquad (B)$$

تخمین‌های (B) به خاطر این‌که توابع فوق یک بار مشتق‌پذیرند.

$$\frac{1}{\sqrt{1+\gamma'_1{}^2(\sigma_1(x_1,\xi_1))}}<1\,,\qquad\frac{1}{\sqrt{1+\gamma'_2{}^2(\sigma_2(x_1,\xi_1))}}<1 \qquad (C)$$

و نیز روابط (C) به خاطر این‌که مخرج آنها از واحد بزرگتر می‌باشد

$$\left|\frac{x_1-\sigma_2(x_1,\xi_1)}{x_1-\xi_1}\right|<1\qquad,\qquad\left|\frac{x_1-\sigma_1(x_1,\xi_1)}{x_1-\xi_1}\right|<1 \qquad (D)$$

تخمین‌های (D) برقرار هستند به خاطر این که نقاط $\sigma_1(x_1.\xi_1)$ و $\sigma_2(x_1.\xi_1)$ در داخل بازهٔ $x_1 - \xi_1$ می‌باشند.

$$\left|\gamma''_1(\tilde{\tilde{\sigma}}_1(x_1,\xi_1))\right| < C_1'' \quad , \quad \left|\gamma''_2(\tilde{\tilde{\sigma}}_2(x_1,\xi_1))\right| < C_2'' \qquad (E)$$

روابط برقرار هستند چون توابع دوبار مشتق‌پذیر پیوسته هستند.

$$|\alpha_2(\xi_1)| < \tilde{C}_2 \ , \ \sqrt{1+{\gamma'}_1^2(x_1)} < \tilde{C}_1 \ , \ \sqrt{(\gamma_1(x_1)-\gamma_2(\xi_1))^2+(x_1-\xi_1)^2} > C_{12} \ ,$$
$$\sqrt{(\gamma_2(x_1)-\gamma_1(\xi_1))^2+(x_1-\xi_1)^2} > C_{21} \qquad \text{(F)}$$

نامساوی‌های را می‌توانیم به طور بدیهی داشته باشیم.

از مجموع روابط (A) ، (B)، (C) ، (D) ، (E) و(F) رابطهٔ (۱۸) نتیجه می‌شود.

بنابراین با توجه به قضیهٔ نگاشت انقباض قضیه زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

قضیهٔ ۲:

اگر در دستگاه معادلات (۱۷) توابع درگیر در هسته‌های $i,j = 1,2 \quad K_{ij}(x,\xi);$ در شرایط زیر صدق کنند:

الف) $\alpha_k(x_1) \in C^{(1)}(a_1,b_1)\,, \quad k=1,2\ , \quad \gamma_k(x_1) \in C^{(1)}(a_1,b_1)\,, \quad k=1,2$

ب) $\gamma_k(x_1) \in C^{(2)}(a_1,b_1)\,, \quad k=1,2$

ج) توابع $\alpha_1(x_1)$ و$\alpha_2(x_1)$ در بازه $[a_1,b_1]$ پیوسته بوده و غیرصفر هستند.

د) تخمین (۱۸) برقرار باشد.

آن‌گاه دستگاه معادلات (۱۷) دارای جواب یگانه است.

References

1. V.S.Vladimirov, “ Equations of Mathematical Physics” Mir Publishers Moscow 1984.

2. L. Evance, partial differential equations, American Mathematical society, second edition, 2010.

3. J. Kondo, Integral equations, Oxford University Press (1991).

4. *H.* Ted Davis and Kendall T. Thomson, Linear algebra and linear operators in engineering: with applications in Mathematica, Academic press, 2000.

5. M. Jahanshahi and M. Sajjadmanesh, Analytical solutions for the Stepjen's inverse problem with local boundary conditions including a first order hyperbolic equation, Bulletin of the Iranian Mathematical Society Vol 39, No5, 2013.

6. M. Sajjadmanesh, M. Jahanshahi and N. Aliev, Inverse problem of the kind of Tikhonov-Lavrentev including the Cauchy-Riemann equation,Azerbaijan Journal of Mathematics(2013), no. 1.

7. M. Jahanshahi, M. Fatehi, Analytic solution for the Cauchy – Riemann equation with nonlocal boundary conditions in the first quarter, International Journal of Pure and Applied Mathematics Volume 46, No.2, page 245-249, 2008.

8. M. Jahanshahi, N. Aliev, Determining of an Analytic Function on Analytic Domain by Cauchy – Riemann Equation with Special Kind of Boundary Conditions, Southeast Asian Bulletin of Mathematics; Vol. 28 Issue 1,p33, 2004

9. M. Jahanshahi. J. Ebadpour Golanbar , N. Aliev, Spectral problem for an initial- boundary value problems involving first order two dimensional generalized non homogeneous Cauchy – Riemann equation with general non-local boundary conditions, Proceedings of the 6th international conference on control and optimization with industrial applications, Vol 1, page 212-215,11-13 July, 2018, Baku, Azerbaijan.

10. A. B. Rasulov, A. P. Soldatov, Boundary value problem for a generalized Cauchy–Riemann equation with singular coefficients, Differential equations, May 2016, Volume 52, Issue 5, pp 616–629

۱۱. محمد جهانشاهی، مجتبی سجادمنش، روش جدید برای بررسی و تشخیص خود الحاق بودن مسائل مقدار مرزی شامل معادلات دیفرانسیل عادی، نشریه علوم دانشگاه خوارزمی، سال دوازدهم، شماره ۱، بهار ۱۳۹۱.

۱۲. نهان علی‌اف، محمد حسین فاتحی، محمد جهانشاهی، ارائه جواب تحلیلی برای معادلهٔ کوشی– ریمان با شرایط مرزی غیرموضعی در ناحیه نصف ربع اول، نشریهٔ علوم دانشگاه خوارزمی، سال دهم، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۸۸.