

## آرنز منظم نگاشت‌های دو خطی کران‌دار

ابوطالب شیخعلی

دانشگاه پیام نور، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

کاظم حق نژادآذر\*

دانشگاه محقق اردبیلی، دانشکده علوم، گروه ریاضیات و کاربردها

علی عبادیان

دانشگاه پیام نور، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

پذیرش ۹۷/۱۱/۲۸

دریافت ۹۷/۰۷/۲۲

### چکیده

در این مقاله به خواص آرنز منظم نگاشت دو خطی کران‌دار می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که نگاشت دو خطی کران‌دار  $f: X \times Y \rightarrow Z$  آرنز منظم است اگر و تنها اگر نگاشت خطی  $l_2: Y \rightarrow X^*$  با ضابطه  $l_2(y) = f^{r*}(z^*, y)$  ضعیف فشرده باشد. سپس قضیه‌ای را اثبات می‌کنیم که ویژگی ضعیف فشرده‌گی نگاشت دو خطی کران‌دار و آرنز منظم را به یکدیگر مرتبط می‌سازد. هم‌چنین به بررسی آرنز منظم و خاصیت ضعیف فشرده‌گی نگاشت‌های خطی کران‌دار می‌پردازیم و نتایجی مشابه نتایج دیلز، اولگر و آریکان را بیان می‌کنیم. در ادامه ارتباط بین آرنز منظم جبرهای باناخ و انعکاسی بودن را بررسی می‌کنیم.

**واژه‌های کلیدی:** آرنز منظم، جبر باناخ، دوگان دوم، ضرب‌های آرنز، ضعیف فشرده‌گی، نگاشت دو خطی.

### مقدمه

فرض کنیم  $X, Y$  و  $Z$  فضاهای باناخ باشند و  $f: X \times Y \rightarrow Z$  نگاشتی دو خطی کران‌دار<sup>۱</sup> باشد. آرنز<sup>۲</sup> در سال ۱۹۵۱ در [1] نشان داد که توسیع‌های  $f$  به صورت‌های  $f^{***}$  و  $f^{r***}$  از  $X^{**} \times Y^{**}$  به  $Z^{**}$  هستند که هر یک از آن‌ها نگاشت دو خطی کران‌داراند. هنگامی که این توسیع‌ها برابر باشند آن‌گاه  $f$  آرنز منظم نامیده می‌شود. اگر  $A$  یک جبر باناخ و نگاشت ضرب، آرنز منظم باشد آن‌گاه جبر باناخ  $A$  را آرنز منظم می‌نامیم. فرض کنیم  $A^*$  دوگان اول و  $A^{**}$  دوگان دوم  $A$  باشد.  $A^*$  و  $A^{**}$  را می‌توان با جمع و ضرب اسکالر به فضای باناخ تبدیل کرد، اما هیچ‌کدام با ضرب نقطه‌ای جبر باناخ نیستند. ضرب‌های اول و دوم آرنز برای دوگان دوم جبرهای باناخ مطرح شدند و برای فضای توپولوژیک هاسدورف و فشرده  $X$ ، نشان داده شده که این دو ضرب برای دوگان دوم  $C(X)$  (جبر تمامی توابع پیوسته روی  $X$ ) با هم یکی هستند، به عبارتی  $C(X)$  آرنز منظم است. ضرب‌های آرنز<sup>۳</sup> روی  $A^{**}$  آن را تبدیل به

\*نویسنده مسئول Haghnejad@uma.ac.ir

1. Bounded bilinear mapping  
2. R. E. Arens  
3. Arens product

جبر باناخ می‌کند. برای اطلاعات بیشتر تر به [۱]، [۲]، [۳]، [۴]، [۵]، [۹]، [۱۲] مراجعه شود. اولگر<sup>۱</sup> [۱۰] نشان داد که اگر  $m: X \times Y \rightarrow C$  یک فرم دو خطی کران‌دار باشد آن‌گاه  $m$  را می‌توان بدین صورت نمایش داد:

$$m(x, y) = \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$$

که  $u: X \rightarrow Y^*$  و  $v: Y \rightarrow X^*$  عملگرهای خطی پیوسته‌اند و  $\|u\| = \|v\| = \|m\|$ . در آن مقاله اشاره شده است که  $u$  ضعیف فشرده<sup>۲</sup> است اگر و تنها اگر  $v$  ضعیف فشرده باشد. مطالب بالا را برای نگاشت‌های  $l_1$  و  $l_2$  که در ادامه تعریف می‌شوند بررسی می‌کنیم. بدین ترتیب ضعیف فشرده‌گی را برای نگاشت‌های دو خطی کران‌دار تعریف می‌کنیم.

### مفاهیم و مقدمات اولیه

در این بخش خلاصه‌ای از مفاهیم، تعاریف و نتایج اولیه از آرنز منظم نگاشت‌های دو خطی کران‌دار را بیان می‌کنیم:

**تعریف ۱.** فرض کنیم  $X, Y$  و  $Z$  فضاهاى باناخ باشند و  $f: X \times Y \rightarrow Z$  نگاشتی دو خطی کران‌دار باشد. الحاقی<sup>۳</sup>  $f$  که آن را با  $f^*$  نمایش می‌دهیم برای هر  $x \in X$ ،  $y \in Y$ ،  $z^* \in Z^*$  بدین صورت تعریف می‌شود:

$$f^*: Z^* \times X \rightarrow Y^*$$

$$\langle f^*(z^*, x), y \rangle = \langle z^*, f(x, y) \rangle$$

که نگاشتی دو خطی کران‌دار است. پس می‌توان الحاقی  $f^*$  یعنی  $(f^*)^*$  که آن را با  $f^{**}$  نمایش می‌دهیم به صورت  $f^{**}: Y^{**} \times Z^* \rightarrow X^*$  و با ضابطه  $\langle f^{**}(y^{**}, z^*), x \rangle = \langle y^{**}, f^*(z^*, x) \rangle$  تعریف کنیم که  $x \in X$ ،  $y^{**} \in Y^{**}$  و  $z^* \in Z^*$  با ادامه این روند الحاقی مراتب بالاتر نیز تعریف می‌شوند. نگاشت واگرد<sup>۴</sup>  $f^r$  که آن را با  $f^r$  نمایش می‌دهیم به صورت  $f^r: Y \times X \rightarrow Z$  و با ضابطه  $f^r(y, x) = f(x, y)$  تعریف می‌شود، که نگاشتی دو خطی کران‌دار است و می‌توان الحاقی‌های این نگاشت را نیز به دست آورد. نگاشت  $f$  را آرنز منظم می‌نامیم در صورتی که  $f^{***} = f^{r***r}$ .

**تعریف ۲.** نگاشت خطی کران‌دار  $l: X \rightarrow Y$  را ضعیف فشرده می‌نامیم هرگاه  $\overline{l(U_X)}$  در  $Y$  ضعیف فشرده باشد، که  $U_X$  گوی واحد در  $X$  است.

**تعریف ۳.** نگاشت دو خطی کران‌دار  $f: X \times Y \rightarrow Z$  را در نظر بگیرید. در این صورت داریم:

$$\langle z^*, f(x, y) \rangle = \langle z^*, f^r(y, x) \rangle = \langle f^{r*}(z^*, y), x \rangle$$

$$\langle z^*, f(x, y) \rangle = \langle f^*(z^*, x), y \rangle$$

حالا مشابه  $u$  و  $v$  تعریف شده در [10]، برای هر  $z^* \in Z^*$  نگاشت‌های خطی کران‌دار  $l_1: X \rightarrow Y^*$  با ضابطه  $l_1(x) = f^*(z^*, x)$  و  $l_2: Y \rightarrow X^*$  با ضابطه  $l_2(y) = f^{r*}(z^*, y)$  را در نظر می‌گیریم. گوییم نگاشت  $f$  ضعیف فشرده است هرگاه نگاشت  $l_1$  ضعیف فشرده باشد.

**قرارداد ۴.** نگاشت  $\hat{\cdot}: X \rightarrow X^{**}$  را نشان دادن طبیعی می‌نامیم اگر برای هر  $x \in X$  و  $x^* \in X^*$  داشته باشیم:

1. A. Ülger  
2. Weakly compact  
3. Adjoint  
4. Flip map

$$\langle \hat{x}, x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle$$

از آن جا که نشان دادن طبیعی یکرختی طولپا از  $X$  به  $\hat{X}$  است، در این مقاله یک فضای باناخ را با تصویر طبیعی آن در دوگان دومش یکی می‌گیریم.

**قضیه ۵.** فرض کنیم  $f: X \times Y \rightarrow Z$  نگاشتی دو خطی کران‌دار باشد. در این صورت این عبارات معادل هستند:

(الف) نگاشت  $f$  آرنز منظم است.

$$(ب) f^{****} = f^{r****r}$$

$$(پ) f^{****}(\widehat{Z}^*, X^{**}) \subseteq Y^*$$

(ت) نگاشت خطی  $f^*(z^*, x): X \rightarrow Y^*$  برای هر  $x \in X$  و  $z^* \in Z^*$  ضعیف فشرده است.

**برهان.** برای اثبات به [۱]، [۲]، [۸] مراجعه کنید.

**قضیه ۶.** فرض کنیم  $f: X \times Y \rightarrow Z$  نگاشتی دو خطی کران‌دار باشد. در این صورت  $f$  آرنز منظم است اگر و تنها

$$\text{اگر } f^{r****r}(Y^{**}, \widehat{Z}^*) \subseteq X^*$$

**برهان.** برای اثبات به [۲.۲]، [۱۳] مراجعه کنید.

**تعریف ۷.** نگاشت دو خطی کران‌دار  $g_1: X \times Y \rightarrow Y$  را از چپ تقریباً یک‌دار<sup>۱</sup> (تقریباً یک‌دار چپ) می‌نامیم هرگاه

تور کران‌دار  $(e_\alpha) \subseteq X$  موجود باشد که برای هر  $y \in Y$  داشته باشیم  $\lim_\alpha g_1(e_\alpha, y) = y$ . این نگاشت را از چپ

یک‌دار<sup>۲</sup> می‌نامیم اگر  $e \in X$  موجود باشد که برای هر  $y \in Y$  داشته باشیم  $g_1(e, y) = y$ . به‌طریق مشابه از راست

تقریباً یک‌دار (تقریباً یک‌دار راست) و از راست یک‌دار تعریف می‌شوند.

### آرنز منظم نگاشت‌های دو خطی کران‌دار و خاصیت ضعیف فشردگی

در لم ۸ محکی برای آرنز منظم نگاشت‌های دو خطی کران‌دار ارائه می‌دهیم و با استفاده از این محک در ادامه،

نتیجه‌ای به‌دست می‌آوریم که آرنز منظم و ضعیف فشردگی نگاشت دو خطی کران‌دار  $f$  را به‌هم مرتبط می‌سازد.

**لم ۸.** نگاشت دو خطی کران‌دار  $f: X \times Y \rightarrow Z$  آرنز منظم است اگر و تنها اگر نگاشت خطی کران‌دار  $l_2$  ضعیف

فشرده باشد.

**برهان.** فرض کنیم  $f$  آرنز منظم باشد و  $z^* \in Z^*$  و  $y^{**} \in Y^{**}$ . تور  $(y_\beta)$  در  $Y$  وجود دارد که با توپولوژی ضعیف

ستاره به  $y^{**}$  همگراست. برای هر  $x^{**} \in X^{**}$  داریم:

$$\begin{aligned} \langle f^{r****r}(y^{**}, \widehat{z}^*), x^{**} \rangle &= \langle f^{r****}(\widehat{z}^*, y^{**}), x^{**} \rangle = \langle \widehat{z}^*, f^{r****}(y^{**}, x^{**}) \rangle \\ &= \langle f^{r***}(y^{**}, x^{**}), z^* \rangle = \langle y^{**}, f^{r***}(x^{**}, z^*) \rangle \\ &= \lim_\beta \langle f^{r***}(x^{**}, z^*), y_\beta \rangle = \lim_\beta \langle x^{**}, f^{r***}(z^*, y_\beta) \rangle \\ &= \lim_\beta \langle x^{**}, l_2(y_\beta) \rangle = \lim_\beta \langle l_2^*(x^{**}), y_\beta \rangle \\ &= \langle y^{**}, l_2^*(x^{**}) \rangle = \langle l_2^*(y^{**}), x^{**} \rangle. \end{aligned}$$

1. Approximately unital  
2. Unital

بنابراین  $f^{r****r}(y^{**}, \widehat{z^*}) = l_2^{**}(y^{**})$  از آن جاکه  $f$  آرنز منظم است پس بنا به قضیه ۶،  $f^{r****r}(Y^{**}, \widehat{Z^*}) \subseteq X^*$  در نتیجه  $l_2^{**}(Y^{**}) \subseteq X^*$  بنابراین  $l_2$  ضعیف فشرده است. برای برعکس، فرض کنیم  $l_2$  ضعیف فشرده باشد در این صورت  $l_2^{**}(Y^{**}) \subseteq X^*$  پس  $f^{r****r}(Y^{**}, \widehat{Z^*}) \subseteq X^*$  بنابراین  $f$  آرنز منظم است.

**قضیه ۹.** فرض کنیم نگاشت  $f: X \times Y \rightarrow Z$  دو خطی کران‌دار باشد. در این صورت  $l_1$  ضعیف فشرده است اگر و تنها اگر  $l_2$  ضعیف فشرده باشد.

**برهان.** بنا به قضیه ۵ نگاشت  $l_1$  ضعیف فشرده است اگر و تنها اگر  $f$  آرنز منظم باشد. از طرفی بنا به لم ۸  $f$  آرنز منظم است اگر و تنها اگر نگاشت خطی کران‌دار  $l_2$  ضعیف فشرده باشد. بنابراین نتیجه می‌گیریم  $l_1$  ضعیف فشرده است اگر و تنها اگر  $l_2$  ضعیف فشرده باشد.

نتیجه زیر که توسیعی از قضیه اولگر در [۲، ۱۰] است بلافاصله از قضیه ۹ به دست می‌آید.

**نتیجه ۱۰.** نگاشت دو خطی کران‌دار  $f: X \times Y \rightarrow Z$  آرنز منظم است اگر و تنها اگر ضعیف فشرده باشد.

آریکان [۳]، نشان داد که اگر نگاشت‌های  $f: X \times Y \rightarrow Z$  و  $g: X \times W \rightarrow Z$  دو خطی کران‌دار باشند و نگاشت  $h: Y \rightarrow W$  خطی و پیوسته باشد و  $f$  توسط  $g$  تجزیه شود و  $h(U_Y)$  ضعیف فشرده باشد، که  $U_Y$  گوی واحد  $Y$  است. در این صورت  $f$  آرنز منظم است. محمدزاده و ابراهیمی ویشکی نیز با استفاده از قضیه ۵ نتیجه مشابهی بدست آوردند [۳، ۲، ۸]. در ادامه قضیه‌ای مرتبط با مطالب مذکور بررسی می‌کنیم.

**قضیه ۱۱.** فرض کنیم  $f: X \times Y \rightarrow Z$  و  $g: W \times Y \rightarrow Z$  نگاشت‌های دو خطی کران‌دار باشند و نگاشت  $h: X \rightarrow W$  خطی، کران‌دار و ضعیف فشرده باشد و برای هر  $x \in X$  و  $y \in Y$  داشته باشیم  $f(x, y) = g(h(x), y)$  در این صورت نگاشت‌های  $f$  و  $f^*$  آرنز منظم‌اند.

**برهان.** ابتدا ثابت می‌کنیم برای هر  $x^{**} \in X^{**}$  و  $y^{**} \in Y^{**}$  این تساوی برقرار است:

$$f^{r****r}(x^{**}, y^{**}) = g^{r****r}(h^{**}(x^{**}), y^{**})$$

برای این منظور فرض کنیم  $(x_\alpha)$  و  $(y_\beta)$  به ترتیب تورهایی در  $X$  و  $Y$  باشند که با توپولوژی ضعیف ستاره به  $x^{**}$  و  $y^{**}$  همگرایند. در این صورت برای هر  $z^* \in Z^*$  داریم:

$$\begin{aligned} \langle f^{r****r}(x^{**}, y^{**}), z^* \rangle &= \lim_{\beta} \lim_{\alpha} \langle z^*, f(x_\alpha, y_\beta) \rangle = \lim_{\beta} \lim_{\alpha} \langle z^*, g(h(x_\alpha), y_\beta) \rangle \\ &= \lim_{\beta} \lim_{\alpha} \langle z^*, g^r(y_\beta, h(x_\alpha)) \rangle = \lim_{\beta} \lim_{\alpha} \langle g^{r*}(z^*, y_\beta), h(x_\alpha) \rangle \\ &= \lim_{\beta} \lim_{\alpha} \langle h^*(g^{r*}(z^*, y_\beta)), x_\alpha \rangle = \lim_{\beta} \langle x^{**}, h^*(g^{r*}(z^*, y_\beta)) \rangle \\ &= \lim_{\beta} \langle h^{**}(x^{**}), g^{r*}(z^*, y_\beta) \rangle = \lim_{\beta} \langle g^{r**}(h^{**}(x^{**}), z^*), y_\beta \rangle \\ &= \langle y^{**}, g^{r**}(h^{**}(x^{**}), z^*) \rangle = \langle g^{r****r}(y^{**}, h^{**}(x^{**})), z^* \rangle \\ &= \langle g^{r****r}(h^{**}(x^{**}), y^{**}), z^* \rangle. \end{aligned}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \langle f^{r****r}(y^{**}, z^{***}), x^{**} \rangle &= \langle f^{r****r}(z^{***}, y^{**}), x^{**} \rangle = \langle z^{***}, f^{r****r}(y^{**}, x^{**}) \rangle \\ &= \langle z^{***}, f^{r****r}(x^{**}, y^{**}) \rangle = \langle z^{***}, g^{r****r}(h^{**}(x^{**}), y^{**}) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \langle z^{***}, g^{r***}(y^{**}, h^{**}(x^{**})) \rangle = \langle g^{r****}(z^{***}, y^{**}), h^{**}(x^{**}) \rangle \\ &= \langle g^{r****r}(y^{**}, z^{***}), h^{**}(x^{**}) \rangle = \langle h^{***}(g^{r****r}(y^{**}, z^{***})), x^{**} \rangle. \end{aligned}$$

از آن‌جا که  $h$  ضعیف فشرده است پس  $h^*$  نیز ضعیف فشرده است. بنابراین

$$f^{r****r}(Y^{**}, \widehat{Z}^*) \subseteq f^{r****r}(Y^{**}, Z^{***}) = h^{***}(g^{r****r}(Y^{**}, Z^{***})) \subseteq h^{***}(W^{***}) \subseteq X^*$$

پس بنا به قضیه ۶ نگاشت  $f$  آرنز منظم است. از آرنز منظم  $f$  با استفاده از [۱۳، ۲.۱] نتیجه می‌گیریم

$$f^{r****r} = f^{****r} \text{ بنابراین}$$

$$(f^*)^{****}(\widehat{Y}^{**}, Z^{***}) = f^{****}(\widehat{Y}^{**}, Z^{***}) = f^{r****r}(\widehat{Y}^{**}, Z^{***}) \subseteq X^*$$

پس با استفاده از قضیه ۵ نگاشت  $f^*$  نیز آرنز منظم است.

### ارتباط آرنز منظم و خاصیت انعکاسی جبر باناخ

دیلز<sup>۱</sup>، رودریگز<sup>۲</sup> و ولاسکو<sup>۳</sup> [۴، ۱] نشان دادند که برای نگاشت دو خطی کران‌دار  $f: X \times Y \rightarrow Z$  نگاشت‌های  $f$  و  $f^{r*}$  آرنز منظم‌اند اگر و تنها اگر  $f^{r*r**} = f^{****r}$ . در ادامه حالت کلی این قضیه را با روشی متفاوت به اثبات می‌رسانیم.

**قرارداد ۱۲.** برای سهولت در نگارش، از علامت  $f^n$  نیز استفاده می‌کنیم که منظور الحاقی  $n$  ام است. به‌عنوان مثال منظور از  $f^{3r}$  نگاشت  $f^{****r}$  است.

**قضیه ۱۳.** اگر  $f$  و  $f^{rn}$  آرنز منظم باشند آن‌گاه  $f^{rn} = f^{3rn}$

**برهان.** چون  $f$  آرنز منظم است پس  $f^{3r} = f^{r3}$  بنابراین  $f^{3rn} = f^{r(n+3)}$ . از طرفی آرنز منظم  $f^{rn}$  نتیجه

می‌دهد که  $f^{r(n+3)} = f^{rn} = f^{3rn}$  بنابراین  $f^{3rn} = f^{rn}$  که همان حکم مطلوب است.

عکس قضیه ۱۳، برای حالت  $n = 1$  همان‌گونه که اشاره شد در [۴، ۱] به اثبات رسیده است. حالت‌های  $n = 2, 3$  را در قضیه ۱۴ اثبات می‌کنیم.

**قضیه ۱۴.** فرض کنیم  $f: X \times Y \rightarrow Z$  نگاشتی دو خطی کران‌دار باشد. در این صورت،

(الف) اگر  $f^{3r} = f^{r3}$  آن‌گاه نگاشت‌های  $f$  و  $f^{r2}$  آرنز منظم‌اند.

(ب) اگر  $f^{3r} = f^{r3}$  آن‌گاه نگاشت‌های  $f$  و  $f^{r3}$  آرنز منظم‌اند.

**برهان.** الف) برای هر  $x^{**} \in X^{**}, y^{**} \in Y^{**}, z^* \in Z^*$  داریم:

$$\begin{aligned} \langle f^{***}(x^{**}, y^{**}), z^* \rangle &= \langle f^{***r}(y^{**}, x^{**}), z^* \rangle = \langle f^{***r}(z^*, y^{**}), x^{**} \rangle \\ &= \langle f^{***r**}(x^{**}, \widehat{z}^*), y^{**} \rangle = \langle f^{***r**}(\widehat{z}^*, x^{**}), y^{**} \rangle \\ &= \langle f^{r***r}(\widehat{z}^*, x^{**}), y^{**} \rangle = \langle \widehat{z}^*, f^{r***r}(x^{**}, y^{**}) \rangle \\ &= \langle \widehat{x}^{**}, f^{r***r}(y^{**}, z^*) \rangle = \langle y^{**}, f^{r***r}(z^*, x^{**}) \rangle \\ &= \langle y^{**}, f^{r**}(x^{**}, z^*) \rangle = \langle f^{r***}(y^{**}, x^{**}), z^* \rangle \end{aligned}$$

1. H. G. Dales  
2. A. Rodrigues-Palacios  
3. M. V. Velasco

$$= \langle f^{r^{***r}}(x^{**}, y^{**}), z^* \rangle.$$

بنابراین  $f$  آرنز منظم است. حالا نشان می‌دهیم  $f^{r^{**}}$  آرنز منظم است. به عبارتی  $f^{r^{****}} = f^{r^{***r^{***r}}}$  از طرفی  $f^{r^{****}} = f^{r^{***r^{***r}}}$  پس کافی است نشان دهیم  $f^{r^{****}} = f^{r^{***r^{***r}}}$  فرض کنیم  $x^{****} \in X^{****}$  باشد و

$$\begin{aligned} & \langle f^{r^{****}}(x^{****}, z^{***}), y^{**} \rangle = \langle x^{****}, f^{r^{****}}(z^{***}, y^{**}) \rangle = \lim_{\alpha} \\ & \langle f^{r^{****}}(z^{***}, y^{**}), x_{\alpha}^{**} \rangle \\ & = \lim_{\alpha} \langle z^{***}, f^{r^{****}}(y^{**}, x_{\alpha}^{**}) \rangle = \lim_{\alpha} \langle z^{***}, f^{r^{****r}}(x_{\alpha}^{**}, y^{**}) \rangle \\ & = \lim_{\alpha} \langle z^{***}, f^{r^{****}}(x_{\alpha}^{**}, y^{**}) \rangle = \lim_{\alpha} \langle z^{***}, f^{r^{***r}}(y^{**}, x_{\alpha}^{**}) \rangle \\ & = \lim_{\alpha} \langle f^{r^{***r}}(z^{***}, y^{**}), x_{\alpha}^{**} \rangle = \langle x^{****}, f^{r^{***r}}(z^{***}, y^{**}) \rangle \\ & = \langle f^{r^{***r^{***r}}}(x^{****}, z^{***}), y^{**} \rangle. \end{aligned}$$

بنابراین  $f^{r^{**}}$  نیز آرنز منظم است.

(ب) به طریق مشابه اثبات می‌شود.

سوال. آیا برعکس قضیه ۲.۳ برای  $n > 3$  برقرار است؟

لم ۱۵. الف) اگر  $g_1: X \times Y \rightarrow Y$  تقریباً یک‌دار چپ باشد آن‌گاه  $g_1^{r^{****r}}: X^{**} \times Y^{**} \rightarrow Y^{**}$  یک‌دار چپ است.

(ب) اگر  $g_2: X \times Y \rightarrow X$  تقریباً یک‌دار راست باشد آن‌گاه  $g_2^{***}: X^{**} \times Y^{**} \rightarrow X^{**}$  یک‌دار راست است. برهان. ما فقط (الف) را اثبات می‌کنیم. (ب) به طریق مشابه اثبات می‌شود. فرض کنیم  $g_1$  تقریباً یک‌دار چپ باشد.

پس تور کران‌دار  $(e_{\alpha})$  در  $X$  وجود دارد که برای هر  $y \in Y$

$$\lim_{\alpha} g_1(e_{\alpha}, y) = y.$$

چون تور  $(e_{\alpha})$  کران‌دار است پس با رفتن به زیر تور مناسبی می‌توان فرض کرد که  $e^{**} \in X^{**}$  موجود است که این تور با توپولوژی ضعیف ستاره به  $e^{**}$  همگراست. فرض کنیم تور  $(y_{\beta})$  در  $Y$  نیز با توپولوژی ضعیف ستاره به  $y^{**} \in Y^{**}$  همگرا باشد. در این صورت برای هر  $y^* \in Y^*$  داریم:

$$\begin{aligned} \langle g_1^{r^{****r}}(e^{**}, y^{**}), y^* \rangle &= \langle g_1^{r^{****}}(y^{**}, e^{**}), y^* \rangle = \langle y^{**}, g_1^{r^{**}}(e^{**}, y^{**}) \rangle \\ &= \lim_{\beta} \langle g_1^{r^{**}}(e^{**}, y^*), y_{\beta} \rangle = \lim_{\beta} \langle e^{**}, g_1^{r^*}(y^*, y_{\beta}) \rangle \\ &= \lim_{\beta} \lim_{\alpha} \langle g_1^{r^*}(y^*, y_{\beta}), e_{\alpha} \rangle = \lim_{\beta} \lim_{\alpha} \langle y^*, g_1^r(y_{\beta}, e_{\alpha}) \rangle \\ &= \lim_{\beta} \lim_{\alpha} \langle y^*, g_1(e_{\alpha}, y_{\beta}) \rangle = \lim_{\beta} \langle y^*, y_{\beta} \rangle = \langle y^{**}, y^* \rangle. \end{aligned}$$

بنابراین  $g_1^{r^{****r}}(e^{**}, y^{**}) = y^{**}$  که همان حکم مطلوب است.

تبصره ۱۶. در لم ۱۵ اگر  $g_1$  تقریباً یک‌دار چپ باشد آن‌گاه لزوماً  $g_1^{***}$  یک‌دار چپ نیست و اگر  $g_2$  تقریباً یک‌دار راست باشد آن‌گاه لزوماً  $g_2^{r^{****r}}$  یک‌دار راست نیست. لاثو<sup>۱</sup> و اولگر نشان دادند که اگر  $A = k(c_0)$  جبر باناخ از عملگرهای فشرده بر فضای دنباله‌ای  $c_0$  باشد آن‌گاه  $A$  دارای همانی تقریبی کران‌دار است و اگر  $g_1 = \pi$  آن‌گاه

$g_1^{***}$  یک‌دار چپ نیست. همچنین اگر  $g_2 = \pi^r$  آن‌گاه  $g_2^{r***}$  یک‌دار راست نیست. برای اطلاعات بیشتر به [۷، ۲، ۵] مراجعه شود.

در [۶، ۴، ۵] بیان و اثبات شده است که اگر جبر باناخ  $A$  دارای همانی تقریبی کران‌دار باشد، آن‌گاه  $\pi^{r***r} = \pi^{r***r}$  اگر و تنها اگر  $A$  یک فضای باناخ انعکاسی باشد. از آن‌جا که فرض  $\pi^{r***r} = \pi^{r***r}$  بسیار قوی است (با توجه به [۸، ۲، ۲])، معادل با منظم بودن  $\pi$  و  $\pi^*$  است، ما با جای‌گزینی فرض آرنز منظم  $\pi^*$  که به مراتب فرض ضعیف‌تری است، مطلب بالا را نتیجه می‌گیریم.

**قضیه ۱۷.** الف) فرض کنیم  $g: X \times X \rightarrow X$  تقریباً یک‌دار راست باشد، در این صورت  $g^*$  آرنز منظم است اگر و تنها اگر  $X$  انعکاسی باشد.

ب) فرض کنیم  $g: X \times X \rightarrow X$  تقریباً یک‌دار چپ باشد، در این صورت  $g^{r*}$  منظم است اگر و تنها اگر  $X$  انعکاسی باشد.

**برهان.** الف) فرض کنیم  $g^*$  منظم باشد. از آن‌جا که  $g$  تقریباً یک‌دار راست است پس  $g^{***}$  یک‌دار راست است. بنابراین  $e^{**} \in X^{**}$  وجود دارد که برای هر  $x^{**} \in X^{**}$  داریم  $g^{***}(x^{**}, e^{**}) = x^{**}$ . برای هر  $x^{***} \in X^{***}$  داریم

$$\begin{aligned} \langle x^{***}, x^{**} \rangle &= \langle x^{***}, g^{***}(x^{**}, e^{**}) \rangle = \langle g^{***}(x^{***}, x^{**}), e^{**} \rangle \\ &= \langle g^{*r***r}(x^{***}, x^{**}), e^{**} \rangle = \langle g^{*r***}(x^{**}, x^{***}), e^{**} \rangle \\ &= \langle g^{*r***}(x^{***}, e^{**}), x^{**} \rangle. \end{aligned}$$

بنابراین  $g^{*r***}(x^{***}, e^{**}) = x^{***}$  اما چون  $g^{*r***}: X^{***} \times X^{**} \rightarrow X^*$  پس  $x^{***} \in X^*$  در نتیجه  $X$  انعکاسی است. اگر  $X$  انعکاسی باشد آن‌گاه آرنز منظم  $g^*$  بدیهی است. ب) به‌طریق مشابه اثبات می‌شود.

**نتیجه ۱۸.** فرض کنیم  $A$  یک جبر باناخ با همانی تقریبی کران‌دار باشد. در این صورت،  $\pi^*$  آرنز منظم است اگر و تنها اگر  $A$  یک فضای انعکاسی باشد.

**برهان.** کافی است در قضیه ۱۷ را جای‌گزین  $\pi$  و  $A$  را جای‌گزین  $X$  کنیم.

## منابع

1. Arens R., "The adjoint of a bilinear operation", Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951) 839-848.
2. Arikan N., "Arens regularity and reflexivity", Quart. J. Math. Oxford Ser. 32 (1981) 383-388.
3. Arikan N., "A simple condition ensuring the Arens regularity of bilinear mappings", Proc. Amer. Math. Soc. 84 (1982) 525-532.
4. Bonsall F. F., Duncan J., "Complete normed algebras", Springer-Verlag, Berlin (1973).
5. Dales H. G., "Banach algebras and automatic continuity", Oxford (2000).

6. Dales H. G., Rodrigues-Palacios A., Velasco M. V., "The second transpose of a derivation", J. London Math. Soc. 64 (2) (2001) 707-721.
7. Lau A. T., Ülger A., "Topological center of certain dual algebras", Trans. Amer. Math. Soc. 384 (3) (1996) 1191-1212.
8. Mohamadzadeh S., Vishki H. R. E., "Arens regularity of module actions and the second adjoint of a derivation", Bulletin of the Australian Math Soc. 77 (2008) 465-476.
9. Morrison T. J., "Functional analysis, An introduction to Banach space theory", John Wiley & Sons, Inc. (2001).
10. Ülger A., "Weakly compact bilinear forms and Arens regularity", Proc. Amer. Math. Soc. 101 (1987) 697-704.
11. Ülger A., "Some stability properties of Arens regular bilinear operators", Proc. Amer. Math. Soc. 34 (1991) 443-454.
12. Rudin W., "Functional Analysis", McGraw-Hill, New York, Inc. (1973).
13. Sheikhalı A., Kanzi N., "Arens regularity of bilinear mapping and reflexivity", J. Phys. Math. Stat. 5(1) (2018) 65-68.