

مطالعه حدسی از اردوش روی اعداد رمزی گراف‌ها

غلامرضا امیدی، لیلا ماهرانی*

دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده علوم ریاضی

پژوهشگاه دانش‌های بنیادین (IPM)

دریافت ۹۷/۰۸/۲۳

پذیرش ۹۹/۰۳/۱۰

چکیده

عدد رمزی $R(H, G)$ به ازای گراف‌های داده شده H و G ، کوچکترین عدد طبیعی n تعریف می‌شود به طوری که در هر 2 -رنگ‌آمیزی یالی گراف کامل از مرتبه n با دو رنگ قرمز و آبی، بتوان زیرگراف تک‌رنگ یک‌ریخت با H از رنگ قرمز یا زیرگراف تک‌رنگ یک‌ریخت با G از رنگ آبی یافت. در سال ۱۹۸۳ اردوش حدس زد که ثابت $C > 0$ موجود است به طوری که برای هر گراف m یالی و بدون رأس تنهای G ، داریم $R(G, G) \leq 2^{C\sqrt{m}}$. این حدس در سال ۲۰۱۱ توسط سوداگو اثبات شد. ما در این مقاله با قرار دادن شرایط مناسب، نتیجه سوداگو را به گراف‌های G_1 و G_2 تعمیم می‌دهیم. همچنین با قرار دادن $G_1 = Kn$ و $G_2 = Kl + H$ که در آن H یک گراف تنک است، نتیجه‌ی مشابهی برای $R(G_1, G_2)$ به دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: عدد رمزی، عدد رمزی قطری، حدس اردوش

۱- مقدمه

عدد رمزی $R(H, G)$ به ازای گراف‌های داده شده H و G ، کوچکترین عدد طبیعی n تعریف می‌شود به طوری که در هر 2 -رنگ‌آمیزی یالی گراف کامل از مرتبه n با دو رنگ قرمز و آبی، بتوان زیرگراف یک‌ریخت با H از رنگ قرمز یا زیرگراف یک‌ریخت با G از رنگ آبی یافت. $R(G, G)$ را عدد رمزی قطری گراف G یا به اختصار عدد رمزی گراف G می‌گوییم و با $R(G)$ نمایش می‌دهیم. وجود این عدد طبق قضیه‌ی کلاسیک رمزی تضمین شده است [۹]. تعداد رئوس گراف را مرتبه‌ی گراف می‌گوییم. مکمل گراف G را با نماد G^c نشان می‌دهیم.

* نویسنده مسئول: maherani@ipm.ir

در سال ۱۹۳۵ اردوش و زکرس برای اولین بار از قضیه‌ی رمزی در نظریه‌ی گراف استفاده کردند [۶]. نتایج و تکنیک‌های آن در شاخه‌های دیگر ریاضی مانند نظریه مجموعه‌ها، توپولوژی، هندسه، منطق، نظریه اطلاعات و ... به کار می‌روند [۱۰].

نظریه‌ی رمزی شاخه‌ای از ریاضیات است که به افتخار منطق‌دان انگلیسی، فرنک رمزی، به این نام نامگذاری شده است. پایه‌ی این نظریه، مطالعه‌ی وجود زیرساختار مشخص در یک کلاس افراز، به ازای هر افراز یک ساختار به اندازه‌ی کافی بزرگ است. به طور کلی این قضیه بیان می‌کند که، هرگاه زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعه‌ی به اندازه‌ی کافی بزرگ S را به q کلاس افراز کنیم، یک زیرمجموعه‌ی p عضوی از S وجود دارد که تمام زیرمجموعه‌های r عضوی آن در یک کلاس قرار گیرند. این قضیه تعمیمی از اصل لانه کبوتری نیز است.

با این که تعیین مقدار دقیق اعداد رمزی دشوار است ولی تاکنون اعداد رمزی کلاس‌های مختلفی از گراف‌ها تعیین شده است [۸]. برای بسیاری از گراف‌هایی که هنوز مقدار دقیق اعداد رمزی محاسبه نشده، حدس‌ها و کران‌های زیادی وجود دارد. یکی از مسأله‌های جالب در نظریه رمزی، محاسبه‌ی اعداد رمزی قطری گراف‌ها است. در تعیین عدد رمزی قطری گراف‌ها، شاید پیچیده‌ترین مسأله، تعیین عدد رمزی $R(K_n)$ است. این عدد اولین بار توسط اردوش و زکرس در سال ۱۹۳۵ مطالعه شد که در این میان می‌توان به قضیه‌ی زیر اشاره کرد.

$$\text{قضیه ۱ [۶] برای هر عدد صحیح و مثبت } n, R(K_n) \leq 2^{2n}.$$

اگرچه در نگاه اول این کران بسیار بزرگ به نظر می‌رسد ولی اردوش در سال ۱۹۴۷ موفق شد با روش‌های احتمالاتی یک کران پایین‌نمایی نیز برای $R(K_n)$ ارائه کند [۳].

$$\text{قضیه ۲ [۳] اگر } n > 2, R(K_n) > 2^{\frac{n}{3}} \text{ باشد، آن‌گاه}$$

تلاش‌های بسیار زیادی برای بهتر کردن این دو کران انجام شده است ولی بهترین کران توسط کنلن در سال ۲۰۱۰ به دست آمده است [۲].

$$\text{قضیه ۳ [۲] عدد ثابت و مثبت } c \text{ وجود دارد به طوری که } R(K_{n+1}) \leq n^{-c \frac{\log n}{\log \log n}} \binom{2n}{n}$$

مسأله‌ی جالب دیگر در رابطه با عدد رمزی قطری گراف‌ها، تعیین عدد رمزی گراف‌های m یالی است. مسأله‌ی مورد نظر در این زمینه توسط اردوش و گراهام مطرح شد [۵]. هدف آن‌ها یافتن گرافی با بیشترین عدد رمزی در بین تمام گراف‌های m یالی بود. آن‌ها حدس زدند این گراف، گراف کامل با $m = \binom{n}{2}$ یال است ولی نتوانستند ادعای خود را ثابت کنند. طبق قضیه‌ی ۲، عدد رمزی گراف کامل m یالی از مرتبه‌ی n ، نمایی و طبق قضیه‌ی ۱، حداکثر برابر 2^{2^n} است. از طرفی برای n های به اندازه‌ی کافی بزرگ، n به طور تقریبی مضربی از \sqrt{m} است. در نتیجه اردوش حدس زیر را مطرح کرد.

حدس ۴ [۴] ثابت $c > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر گراف G با m یال و بدون رأس تنها داریم، $R(G) \leq 2^{c\sqrt{m}}$.

الون و همکارانش در سال ۲۰۰۳ با اثبات قضیه‌ی زیر، درستی حدس را برای گراف‌های دوبخشی ثابت کردند.

قضیه ۵ [۱] فرض کنید G گراف دوبخشی با m یال و بدون رأس تنها است. در این صورت خواهیم داشت، $R(G) \leq 2^{16\sqrt{m}+1}$.

هم‌چنین آن‌ها در مقاله‌ی خود حکم زیر را برای هر گراف دلخواه اثبات کردند. در این مقاله تابع $\log x$ در مبنای ۲ است.

قضیه ۶ [۱] اگر G گراف m یالی و بدون رأس تنها باشد، آنگاه $R(G) \leq 2^{c\sqrt{m} \log m}$ که در آن c ثابتی مثبت است.

آن‌ها در اثبات‌هایشان از روش انتخاب تصادفی وابسته استفاده کرده‌اند که یک تکنیک قدرتمند مبتنی بر روش‌های احتمالاتی است. برای مطالعه‌ی بیشتر در مورد این تکنیک می‌توان به [۷] رجوع کرد.

در نهایت سوداگو موفق شد در سال ۲۰۱۱ درستی حدس ۴ را اثبات کند [۱۱].

قضیه ۷ [۱۱] فرض کنید G گرافی m یالی و بدون رأس تنها باشد. در این صورت داریم، $R(G) \leq 2^{250\sqrt{m}}$.

هدف در این مقاله اثبات دو قضیه‌ی زیر است. قضیه‌ی ۸ تعمیمی از قضیه‌ی ۷ است. قضیه‌ی ۹ را از قضیه‌ی ۸ و نتیجه‌ای در [۱] که در مورد اعداد رمزی گراف‌های با درجه ماکزیمم محدود و گراف کامل است، به دست می‌آوریم. اثبات قضیه‌های ۸ و ۹ در بخش آخر آورده شده‌اند.

قضیه ۸ فرض کنید G_1 و G_2 گراف‌هایی به ترتیب از مرتبه‌ی n_1 و n_2 و بدون رأس تنها هستند. هم‌چنین فرض کنید $n = \max\{n_1, n_2\}$ و m عدد صحیح و مثبتی است که در شرط $2 \frac{1.6\sqrt{m}}{\log m} \geq n - 27\sqrt{m}$ صدق می‌کند. اگر برای هر $27 \leq \alpha \leq \frac{\log^3 m}{8}$ دو شرط زیر برقرار باشند:

۱. برای هر $1 \leq i \leq 2$ ، زیرمجموعه‌ی $T_i \subseteq V(G_i)$ وجود دارد به طوری که، $|T_i| \leq \alpha\sqrt{m}$ و $\Delta(G_i - T_i) \leq \frac{2\sqrt{m}}{\alpha}$

۲. رای هر $1 \leq i \leq 2$ ، زیرمجموعه‌ی $R_i \subseteq V(G_i)$ وجود دارد به طوری که، $|R_i| \leq m^{\frac{1}{4}}$ و با فرض $G_i'' = G_i - R_i$ داشته باشیم، $\max\{R(G_1'', G_2), R(G_1, G_2'')\} \leq 2^{26}\sqrt{m}$.

آنگاه، $R(G_1, G_2) \leq 2^{250}\sqrt{m}$.

برای دو گراف دلخواه G و H ، $G + H$ گرانی با مجموعه رأس‌های $V(G \cup H)$ و مجموعه یال‌های

$$E(G \cup H) \cup \{uv | u \in V(G), v \in V(H)\}$$

است.

قضیه ۹ فرض کنید $G_1 = K_{n_1}$ ، $m > 27$ ، $n_1 \leq 27\sqrt{m} + \frac{16\sqrt{m}}{\log^3 m}$ و $G_2 = K_\ell + H$ و $n_2 \leq 27\sqrt{m}$ که $\ell \leq 27\sqrt{m}$ و H گرانی با $n(H) \leq 2 \frac{1.6\sqrt{m}}{\log m}$ و $\Delta(H) \leq \frac{16\sqrt{m}}{\log^3 m}$ است. هم‌چنین فرض کنید مجموعه‌ی $S \subseteq V(H)$ وجود دارد به طوری که $|S| \leq m^{\frac{1}{4}} - 27\sqrt{m}$ و $\Delta(H - S) < \frac{\log m}{4}$ ، در این صورت داریم، $R(G_1, G_2) \leq 2^{250}\sqrt{m}$.

در ادامه‌ی این بخش، نتایج مهمی را که از قضیه‌های ۸ و ۹ استخراج می‌شوند، ارائه می‌کنیم.

نتیجه ۱۰ فرض کنید G_i ، $1 \leq i \leq 2$ ، گرافی m_i یالی و بدون رأس تنها است. اگر $m = \max\{m_1, m_2\}$ آن‌گاه $R(G_1, G_2) \leq 2^{250\sqrt{m}}$.

اثبات. چون G_i ، $1 \leq i \leq 2$ ، گرافی m_i یالی است پس حداکثر $2m$ رأس دارد. طبق قضیه ۱، داریم $R(G_1, G_2) \leq R(K_{2m}) \leq 2^{4m}$. اگر فرض کنیم $m \leq 60^2$ ، آن‌گاه $250\sqrt{m} \geq 4m$ و به راحتی نتیجه می‌شود که $R(G_1, G_2) \leq 2^{250\sqrt{m}}$. پس می‌توان فرض کرد که $m > 60^2$. با قرار دادن $n = \max\{n_1, n_2\}$ که n_i تعداد رأس‌های G_i ، $1 \leq i \leq 2$ است، آن‌گاه چون G_1 و G_2 رأس تنها ندارند، واضح است که $m^{\frac{2}{3}} \geq 2m \geq n$ و

$$2 \frac{106\sqrt{m}}{\log m} \geq 2m - 27\sqrt{m} \geq n - 27\sqrt{m}.$$

از طرف دیگر، اگر به‌ازای هر $27 \leq \alpha \leq \frac{\log^{\frac{2}{3}} m}{8}$ ، به تعداد $\alpha\sqrt{m}$ رأس با درجه‌ی ماکزیمم از رأس‌های G_i را حذف کنیم و زیرگراف القایی روی رأس‌های باقی‌مانده را G'_i بنامیم، آن‌گاه خواهیم داشت $\Delta(G'_i) \leq \frac{2m}{\alpha\sqrt{m}} \leq \frac{2\sqrt{m}}{\alpha}$. بنابراین شرط ۱ در قضیه ۸ برقرار است. از طرفی چون $m^{\frac{2}{3}} \geq n$ ، با قرار دادن $R_i = G_i$ ، برای $1 \leq i \leq 2$ ، شرط ۲ در قضیه ۸ نیز برقرار است. بنابراین با استفاده از قضیه ۸ نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌گردد. ■

نتیجه ۱۱ فرض کنید G_i ، $1 \leq i \leq 2$ ، گرافی از مرتبه‌ی n_i و بدون رأس تنها است. اگر $n = \max\{n_1, n_2\}$ و زیرمجموعه‌ی $T_i \subseteq V(G_i)$ ، $1 \leq i \leq 2$ ، موجود باشد چنان‌که داشته باشیم $|T_i| \leq 27\sqrt{n}$ و $\Delta(G_i - T_i) \leq 54 \frac{\sqrt{n}}{\log^{\frac{2}{3}} n}$ ، آن‌گاه $R(G_1, G_2) \leq 2^{250\sqrt{n}}$.

اثبات. با قرار دادن $m = n^{\frac{2}{3}}$ در قضیه ۸ خواهیم داشت

$$\Delta(G_i - T_i) \leq 54 \frac{\sqrt{n}}{\log^{\frac{2}{3}} n} = 54 \frac{\sqrt{m^{\frac{3}{2}}}}{\log^{\frac{2}{3}} m^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\sqrt{m}}{\log^{\frac{2}{3}} m} \leq \frac{2\sqrt{m}}{\alpha}.$$

بنابراین شرط ۱ در قضیه ۸ برقرار است. هم‌چنین با قرار دادن $R_1 = G_1$ و $R_2 = G_2$

شرط ۲ نیز در قضیه‌ی ۸ برقرار می‌شود و نتیجه‌ی مطلوب به دست می‌آید. ■

نتیجه ۱۲ فرض کنید $G_1 = K_{n_1}$ ، $m > 27$ ، $G_2 = K_{\ell_1} + K_{\ell_2}^c$ و $n_1 \leq 27\sqrt{m} + \frac{16\sqrt{m}}{\log^{\frac{1}{4}} m}$ ، به طوری که شرایط $\ell_1 \leq 27\sqrt{m}$ و $\ell_2 \leq 2^{106} \frac{\sqrt{m}}{\log m}$ برقرار باشند. در این صورت داریم،
 $R(G_1, G_2) \leq 2^{250} \sqrt{m}$.

اثبات. به وضوح، $n = \max\{n_1, \ell_1 + \ell_2\} \leq 27\sqrt{m} + 2^{106} \frac{\sqrt{m}}{\log m}$ ، هم‌چنین به راحتی دیده می‌شود که شرط ۱ در قضیه‌ی ۸ برقرار است. از طرف دیگر چون $m > 27$ ، رابطه‌های $n_1 \leq m^{\frac{1}{4}}$ و $\ell_1 \leq m^{\frac{1}{4}}$ به دست می‌آیند. با قرار دادن $R_1 = G_1$ و $R_2 = K_{\ell_1}$ ، شرط ۲ در قضیه‌ی ۸ برقرار می‌شود و نتیجه حاصل می‌گردد.

نتیجه ۱۳ به‌ازای اعداد صحیح و مثبت p و q ، $q \leq 2^{\frac{52p}{27 \log^{\frac{1}{4}} p}}$ داریم،

$$R(K_p, K_{p,q}) \leq R(K_p, K_p + K_q^c) \leq 2^{\frac{250}{4} p}.$$

اثبات. قرار می‌دهیم $n_1 = \ell_1 = p = 27\sqrt{m}$ و از نتیجه‌ی ۱۲ استفاده می‌کنیم.

۲- لم‌های کاربردی

در این بخش، تعاریف، نمادها و لم‌هایی که برای اثبات قضیه‌های ۸ و ۹ مورد نیاز هستند، ارائه شده‌اند.

فرض کنید $G = (V, E)$ گراف دلخواهی است. برای $U \subseteq V$ زیرگراف القایی G روی U را با $G[U]$ نشان می‌دهیم. چگالی یالی $G[U]$ را با $d(U)$ نمایش می‌دهیم و برابر با $d(U) = \frac{e(G[U])}{\binom{|U|}{2}}$ است که در آن $e(G[U])$ تعداد یال‌های $G[U]$ است. فرض کنید X و Y دو زیرمجموعه‌ی مجزای $V(K_n)$ هستند. در یک رنگ آمیزی یالی گراف K_n ، زوج مرتب (X, Y) را زوج تک‌رنگ گوئیم اگر به‌ازای هر $v \in X$ ، تمام یال‌های $X \cup Y$ واقع بر v تک‌رنگ باشند. منظور از یال‌های $X \cup Y$ ، یال‌های واقع در X ، یال‌های واقع در Y و یال‌های با یک انتها در X و یک انتها در Y است.

در ادامه‌ی این بخش، نتایج مهمی را که از قضیه‌های ۸ و ۹ استخراج می‌شوند، ارایه می‌کنیم.

نتیجه ۱۰ فرض کنید G_i ، $1 \leq i \leq 2$ ، گرافی m_i یالی و بدون رأس تنها است. اگر $m = \max\{m_1, m_2\}$ آن‌گاه $R(G_1, G_2) \leq 2^{250\sqrt{m}}$.

اثبات. چون G_i ، $1 \leq i \leq 2$ ، گرافی m_i یالی است پس حداکثر $2m$ رأس دارد. طبق قضیه‌ی ۱، داریم $R(G_1, G_2) \leq R(K_{2m}) \leq 2^{4m}$. اگر فرض کنیم $m \leq 60^2$ ، آن‌گاه $250\sqrt{m} \geq 4m$ و به راحتی نتیجه می‌شود که $R(G_1, G_2) \leq 2^{250\sqrt{m}}$. پس می‌توان فرض کرد که $m > 60^2$. با قرار دادن $n = \max\{n_1, n_2\}$ که n_i تعداد رأس‌های G_i ، $1 \leq i \leq 2$ است، آن‌گاه چون G_1 و G_2 رأس تنها ندارند، واضح است که $m^{\frac{2}{3}} \geq 2m \geq n$ و

$$2^{\frac{106\sqrt{m}}{\log m}} \geq 2m - 27\sqrt{m} \geq n - 27\sqrt{m}.$$

از طرف دیگر، اگر به‌ازای هر $27 \leq \alpha \leq \frac{\log^{\frac{2}{3}} m}{8}$ ، به تعداد $\alpha\sqrt{m}$ رأس با درجه‌ی ماکزیمم از رأس‌های G_i را حذف کنیم و زیرگراف القایی روی رأس‌های باقی‌مانده را G'_i بنامیم، آن‌گاه خواهیم داشت $\Delta(G'_i) \leq \frac{2m}{\alpha\sqrt{m}} \leq \frac{2\sqrt{m}}{\alpha}$. بنابراین شرط ۱ در قضیه‌ی ۸ برقرار است. از طرفی چون $m^{\frac{2}{3}} \geq n$ ، با قرار دادن $R_i = G_i$ ، برای $1 \leq i \leq 2$ ، شرط ۲ در قضیه‌ی ۸ نیز برقرار است. بنابراین با استفاده از قضیه‌ی ۸ نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌گردد. ■

نتیجه ۱۱ فرض کنید G_i ، $1 \leq i \leq 2$ ، گرافی از مرتبه‌ی n_i و بدون رأس تنها است. اگر $n = \max\{n_1, n_2\}$ و زیرمجموعه‌ی $T_i \subseteq V(G_i)$ ، $1 \leq i \leq 2$ ، موجود باشد چنان‌که داشته باشیم $|T_i| \leq 27\sqrt{n}$ و $\Delta(G_i - T_i) \leq 54 \frac{\sqrt{n}}{\log^{\frac{2}{3}} n}$ ، آن‌گاه $R(G_1, G_2) \leq 2^{250\sqrt{n}}$. اثبات. با قرار دادن $m = n^{\frac{2}{3}}$ خواهیم داشت

$$\Delta(G_i - T_i) \leq 54 \frac{\sqrt{n}}{\log^{\frac{2}{3}} n} = 54 \frac{\sqrt{m^{\frac{3}{2}}}}{\log^{\frac{2}{3}} m^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\sqrt{m}}{\log^{\frac{2}{3}} m} \leq \frac{2\sqrt{m}}{\alpha}.$$

بنابراین شرط ۱ در قضیه‌ی ۸ برقرار است. هم‌چنین با قرار دادن $R_1 = G_1$ و $R_2 = G_2$

با جایگذاری $\epsilon = 2^{-2\alpha^{\frac{1}{2}}}$ و $t = 2^{2\alpha^{\frac{1}{2}}}\sqrt{m}$ خواهیم داشت $2^{\alpha^{\frac{1}{2}}} \leq \sqrt{m}$ و $42\alpha^{\frac{1}{2}}2^{-\alpha^{\frac{1}{2}}} \leq 48\alpha^{-\frac{1}{2}}, t \geq \epsilon^{-1}$

$$2^{5\alpha^{-\frac{1}{2}}}\sqrt{m} \geq 2^{10\frac{\sqrt{m}}{\log m}} \geq m^{\frac{2}{3}} \geq 2^{2\alpha^{\frac{1}{2}}}\sqrt{m} = t.$$

با قرار دادن $G = G'$ و $H = F_r[Y]$ ، زیرگراف القایی از $F[Y]$ روی یال‌های با رنگ قرمز: در لم ۱۶ مجموعه‌ی $S \subseteq Y$ وجود دارد چنان که

$$\begin{aligned} |S| &\geq \epsilon^{-4\Delta(G')\log \epsilon}|Y| \geq (2^{-2\alpha^{\frac{1}{2}}})^{-4 \times (2\alpha^{-1}\sqrt{m}) \times (-2\alpha^{\frac{1}{2}})}|Y| \\ &= 2^{-22\alpha^{-\frac{1}{2}}}\sqrt{m}|Y| \geq 2^{52\alpha^{-\frac{1}{2}}}\sqrt{m} \geq 2^{\frac{106\sqrt{m}}{\log m}} \geq n - 27\sqrt{m} \end{aligned}$$

و چگالی زیرگراف القایی از رنگ قرمز در $F[S]$ حداکثر ϵ است. هم‌چنین با توجه به نامساوی‌های بالا می‌توان دید $|Y| \geq \epsilon^{4\Delta(G')\log \epsilon}(n - 27\sqrt{m})$. با جایگذاری مقادیر t و ϵ داریم

$$\begin{aligned} |S| &\geq 2^{52\alpha^{-\frac{1}{2}}}\sqrt{m} \geq 2^{5\alpha^{-\frac{1}{2}}}\sqrt{m} \times 2^{47\alpha^{-\frac{1}{2}}}\sqrt{m} \geq t2^{42\alpha^{\frac{1}{2}}2^{-\alpha^{\frac{1}{2}}}}\sqrt{m} \\ &= t(2^{-2\alpha^{\frac{1}{2}}})^{-14 \times (2^{-\alpha^{\frac{1}{2}}}\sqrt{m})} = t\epsilon^{-14\epsilon t}. \end{aligned}$$

اکنون با جایگذاری $H = F[S]$ در لم ۱۵ به راحتی می‌توان دید که گراف H شامل زوج تک‌رنگ (X', Y') با شرایط $|X'| \geq t$ و $|Y'| \geq \epsilon^{14\epsilon t}|S|$ است. یادآوری می‌کنیم که $|S| \geq 2^{-22\alpha^{-\frac{1}{2}}}\sqrt{m}|Y|$ است و در نتیجه،

$$|Y'| \geq \epsilon^{14\epsilon t}|S| \geq 2^{-48\alpha^{-\frac{1}{2}}}\sqrt{m}|S| \geq 2^{-120\alpha^{-\frac{1}{2}}}\sqrt{m}|Y|.$$

بنابراین (X', Y') همان زوج مطلوب‌اند. ■

۳- اثبات قضیه‌های اصلی

در این بخش به اثبات قضیه‌های ۸ و ۹ می‌پردازیم.

اثبات قضیه‌ی ۸. قرار دهید $N = 2^{250\sqrt{m}}$ و به تناقض فرض کنید یک ۲-رنگ آمیزی از یال‌های گراف $H = K_N$ با دو رنگ قرمز و آبی وجود دارد به طوری که شامل زیرگراف قرمز یک‌ریخت با G_1 و زیرگراف آبی یک‌ریخت با G_2 نیست. از آنجا که گراف‌های G_1 و G_2 حداکثر n رأس دارند، طبق قضیه‌ی ۱ داریم

$$R(G_1, G_2) \leq R(K_n) \leq 2^{2n}.$$

بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که $n \geq 125\sqrt{m}$.

با قرار دادن $k = \ell = 27\sqrt{m}$ در لم ۱۴ می‌توان نتیجه گرفت که زوج تک‌رنگ (X_1, Y_1) با شرایط $|X_1| \geq 27\sqrt{m}$ و

$$|Y_1| \geq \binom{k+\ell}{k}^{-1} N - k - \ell \geq 4^{-27\sqrt{m}} N = 2^{196\sqrt{m}}$$

وجود دارد. حال دنباله‌ی $\alpha_1 = 27$ و $\alpha_{i+1} = 2^2 \alpha_i^{\frac{1}{3}}$ را در نظر می‌گیریم. به سادگی می‌توان دید که رابطه‌ی $\alpha_{i+1} \geq (\frac{4}{3})^3 \alpha_i$ به ازای هر i برقرار است و در نتیجه داریم

$$\sum_{j=1}^i \alpha_j^{-\frac{1}{3}} \leq \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{i-1} (\frac{3}{4})^j \leq \frac{1}{3} \sum_{j \geq 0} (\frac{3}{4})^j = \frac{4}{3}.$$

از آنجا که فرض کردیم در این رنگ آمیزی زیرگراف قرمز یک‌ریخت با G_1 و زیرگراف آبی یک‌ریخت با G_2 نداریم، با تکرار لم ۱۷ به طور متوالی می‌توان دید که بعد از i مرحله، زوج تک‌رنگ (X_{i+1}, Y_{i+1}) با شرایط $|X_{i+1}| \geq \alpha_{i+1} \sqrt{m}$ و

$$|Y_{i+1}| \geq 2^{-120\alpha_i^{-\frac{1}{3}} \sqrt{m}} |Y_i| \geq 2^{-120\sqrt{m} \sum_{j=1}^i \alpha_j^{-\frac{1}{3}}} |Y_1|$$

$$\geq 2^{-120\sqrt{m}(\frac{1}{4})} \cdot 2^{196\sqrt{m}} = 2^{36\sqrt{m}}$$

یافت می‌شود. لم ۱۷ را تکرار می‌کنیم تا اولین اندیس i با شرط $\alpha_i \geq \frac{1}{\lambda} \log^3 m$ به دست آید. سپس قرار می‌دهیم $\alpha = \frac{1}{\lambda} \log^3 m$ ، $X = X_i$ و $Y = Y_i$. حال زوج تک‌رنگ (X, Y) ای داریم که در آن شرایط $|X| \geq \alpha_i \sqrt{m} \geq \alpha \sqrt{m}$ و

$$|Y| \geq 2^{36\sqrt{m}} \geq 2^{125\alpha^{-\frac{1}{3}}\sqrt{m}}$$

برقرار هستند. اکنون با استفاده دوباره از لم ۱۷ می‌توان زوج تک‌رنگ (X', Y') را پیدا کرد که در آن $|X'| \geq 2^{2\alpha^{\frac{1}{3}}\sqrt{m}} = m^{\frac{2}{3}}$ و $|Y'| \geq 2^{36\sqrt{m}}$. ابتدا فرض می‌کنیم زوج (X', Y') قرمز است. طبق فرض چون $R(G''_1, G_2) \leq 2^{36\sqrt{m}}$ و این که فرض کردیم زیرگراف آبی یک‌ریخت با G_2 نداریم، بنابراین زیرگراف القایی از رنگ قرمز در $H[Y']$ شامل زیرگراف یک‌ریخت با G''_1 است. در نتیجه $H[X'] + G''_1$ شامل زیرگراف قرمز یک‌ریخت با G_1 است و این یک تناقض است.

حال اگر فرض کنیم که زوج (X', Y') آبی است، چون $R(G_1, G''_1) \leq 2^{36\sqrt{m}}$ و این که فرض کردیم زیرگراف قرمز یک‌ریخت با G_1 نداریم، زیرگراف القایی از رنگ آبی در $H[Y']$ شامل زیرگراف یک‌ریخت با G''_1 می‌شود. بنابراین $H[X'] + G''_1$ شامل زیرگراف آبی یک‌ریخت با G_2 است که این یک تناقض است. بنابراین در هر ۲-رنگ آمیزی یالی گراف K_N با دو رنگ قرمز و آبی، می‌توان زیرگراف قرمز یک‌ریخت با G_1 و یا زیرگراف آبی یک‌ریخت با G_2 یافت. ■

برای اثبات قضیه‌ی ۹ از قضیه‌ی زیر استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱۸ [۱] فرض کنید H گرافی h رأسی با عدد رنگی $k \geq 2$ و درجه‌ی ماکزیمم حداکثر r است. در این صورت به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت m داریم،

$$R(H, K_m) \leq \left(\frac{100m}{\ln m}\right)^{\frac{(r-k+2)(k-1)}{2}} (\ln m) h^r.$$

اثبات قضیه‌ی ۹. قرار می‌دهیم $G''_1 = H - S$ ، $n''_1 = n(G''_1)$ و $r = \Delta(G''_1)$. از آن‌جا که

$m > 27$ ، به سادگی می‌توان دید که $n_1 \leq 40\sqrt{m}$. دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول: $r = 0$.

در این صورت یک یال e به G''_r اضافه می‌کنیم. با قرار دادن $H = G''_r + e$ در قضیه ۱۸ داریم،

$$\begin{aligned} R(G''_r, G_1) &\leq R(G''_r + e, G_1) \leq \left(\frac{100n_1}{\ln n_1}\right) \times \ln n_1 \times n(G''_r + e) = \\ &< 100n_1 \times n(G''_r + e) < 100(40\sqrt{m}) \times 2^{106} \frac{\sqrt{m}}{\log m} \\ &= 4000\sqrt{m} \times 2^{\frac{106\sqrt{m}}{\log m}} = 2^{\log 4000\sqrt{m} + 106} \frac{\sqrt{m}}{\log m} \\ &\leq 2^{13 + \frac{1}{2} \log m + 106} \frac{\sqrt{m}}{\log m} < 2^{36} \sqrt{m}. \end{aligned}$$

از آن جا که $n(G_1) - 27\sqrt{m} \leq \frac{16\sqrt{m}}{\log^r m}$ با فرض $T_1 \subseteq V(G_1)$ ، به طوری که $|T_1| = 27\sqrt{m}$ ، واضح است که $\Delta(G_1 - T_1) \leq \frac{16\sqrt{m}}{\log^r m}$ و با فرض $T_2 = V(K_\ell)$ ، واضح است که $\Delta(G_2 - T_2) = \Delta(H) \leq \frac{16\sqrt{m}}{\log^r m}$. بنابراین شرط ۱ قضیه ۸ برقرار است. از طرف دیگر از آن جا که $n(G_1) \leq m^{\frac{r}{2}}$ و طبق روابط بالا، با قرار دادن $R_1 = G_1$ و $R_2 = G''_r$ ، شرط ۲ قضیه ۸ نیز برقرار است. پس می‌توان از قضیه ۸ نتیجه گرفت که $R(G_1, G_2) \leq 2^{250} \sqrt{m}$.

حالت دوم: $r \geq 1$.

طبق قضیه ۱۸،

$$\begin{aligned} R(G''_r, G_1) = R(G''_r, K_{n_1}) &\leq \left(\frac{100n_1}{\ln n_1}\right)^{\frac{(r-k+2)(k-1)}{2}} (\ln n_1) (n''_r)^r \\ &\leq \left(\frac{100n_1}{\ln n_1}\right)^{\frac{r^2+2r}{2}} (\ln n_1) (27\sqrt{m} + 2^{106} \frac{\sqrt{m}}{\log m} - \sqrt{m^2})^r \\ &\leq \frac{(100n_1)^{\frac{r^2+2r}{2}} 2^{106} \frac{\sqrt{m}}{\log m} r}{(\ln n_1)^{\frac{r^2+2r-2}{2}}} \\ &= (100n_1)^{\frac{r^2+2r}{2}} 2^{106} \frac{\sqrt{m}}{\log m} r \times y \\ &\leq (4000\sqrt{m})^{\frac{r^2+2r}{2}} \times 2^{106} \frac{\sqrt{m}}{\log m} r \times y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ۲ \left(\frac{r^۲+۲r}{۲} \log ۴۰۰۰\sqrt{m} + ۱۰۶ \frac{\sqrt{m}}{\log m} r \right) \times y \\
&\leq ۲۳۶\sqrt{m}.
\end{aligned}$$

لازم به ذکر است نامساوی آخر برقرار است زیرا

$$y = \frac{1}{(\ln n_1)^{\frac{r^۲+r-۲}{۲}}} \leq 1,$$

و داریم،

$$\begin{aligned}
&\frac{r^۲+۲r}{۲} \log ۴۰۰۰\sqrt{m} + ۱۰۶ \frac{\sqrt{m}}{\log m} r = \\
&\frac{r^۲+۲r}{۲} (\log ۴۰۰۰ + \log \sqrt{m}) + ۱۰۶ \frac{\sqrt{m}}{\log m} r \\
&\leq ۶(r^۲+۲r) + \frac{r^۲+۲r}{۲} \log \sqrt{m} + ۱۰۶ \frac{\sqrt{m}}{\log m} r \\
&\leq ۱۸(\log^۲ \sqrt{m}) + ۲ \log^۲ \sqrt{m} \log \sqrt{m} + ۲۶/۵\sqrt{m} \\
&= \frac{۱۸}{۱۶} \log^۲ m + \frac{۲}{۳۲} \log^۲ m + ۲۶/۵\sqrt{m} \\
&\leq ۹/۵\sqrt{m} + ۲۶/۵\sqrt{m} = ۳۶\sqrt{m}.
\end{aligned}$$

■ اکنون با استفاده‌ی دوباره از قضیه‌ی ۸ نتیجه‌ی مورد نظر حاصل می‌شود.

References

- [1] N. Alon, M. Krivelevich and B. Sudakov, Turán numbers of bipartite graphs and related Ramsey-type questions, *Combin. Probab. Comput.* **12** (2003), 477-494.
- [2] D. Conlon, A new upper bound for diagonal Ramsey numbers, *Ann. of Math.* **170** (2009), 941-960.
- [3] P. Erdős, Some remarks on the theory of graphs, *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (1947), 292-294.

- [4] P. Erdős, On some problems in graph theory, combinatorial analysis and combinatorial number theory, *Graph Theory and Combinatorics*, Cambridge, (1983), *Academic Press, London*, (1984), 1-17.
- [5] P. Erdős and R. Graham, On partition theorems for finite graphs, *in: Infinite and Finite Sets*, vol. I, Colloq., Keszthely, (1973), *in: Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai*, vol. 10, North-Holland, Amsterdam, (1975), 515-527.
- [6] P. Erdős and G. Szekeres, A Combinatorial problem in geometry, *Compos. Math.* **2** (1935), 463-470.
- [7] J. Fox and B. Sudakov, Dependent Random Choice, *Random Struct. Algorithms* **38** (2011), 68-99.
- [8] S. P. Radziszowski, Small Ramsey numbers, *Electron. J. Combin.* **1** (1994), Dynamic Surveys, DS1.12 (August 4, 2009).
- [9] F. P. Ramsey, On a problem of formal logic, *Proc. London Math. Soc.* **2** 30 (1930), 264-286.
- [10] V. Rosta, Ramsey Theory Applications, *Electron. J. Combin.* (2004), 1-43.
- [11] B. Sudakov, A Conjecture of Erdős on graph Ramsey numbers, *Advances In Math.* **227** (2011), 601-609.