کاربردهایی از انحنای کازوراتی برای منیفلدهای آماری و ابررویه‌های شبه مرکزی همگن

اعظم اعتماد دهکردی*
دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکدهٔ علوم ریاضی

دریافت ۹۷/۰۸/۲۳ پذیرش ۹۸/۰۷/۱۵

چکیده

در این مقاله در بخش ابتدایی هندسهٔ آفین به‌عنوان زمینهٔ اصلی کار فرض می‌شود. سپس بیان مفصلی از مقدمات لازم در زمینه‌های نسبتاً متفاوت داریم. در این بخش زیرمنیفلدهای آماری از منیفلدهای آماری ساساکین با $\varphi-$ انحنای ثابت به‌عنوان موضوع محوری در نظر می‌گیریم. سپس با یک روند تقریباً مفصل، یک نامساوی بهینه بین انحنای عددی نرمال شده تعمیم یافتهٔ یک زیرمنیفلد، به‌عنوان خاصیت ذاتی و انحنای δ-کازوراتی آن به‌عنوان یک خاصیت بیرونی به‌دست می‌آوریم. در ادامهٔ آن شرط وجود تساوی در نامساوی بین این دو انحنا را هم تعیین می‌کنیم. نتیجهٔ مستقیمی از این مطلب وجود یک نامساوی بهینه بین انحنای عددی نرمال شده و انحنای کازوراتی است. در بخش دوم با استفاده از انحنای کازوراتی با قابلیتی بیش‌تر از انحنای مقطعی، نتایجی در مورد ابررویه‌های شبه مرکزی موضعاً همگن در فضا فرم‌ها با انحنای صفر را به‌دست می‌آوریم. این مطالب به بیانی تحلیلی و جبری برای ابررویه‌های شبه مرکزی موضعاً همگن منجر می‌شود که کارایی مدل‌های آفین را در استفاده از نرم‌افزارها موجب می‌شود.

واژه‌های کلیدی: انحنای کازوراتی، شبه مرکزی، منیفلد آماری، منیفلد ساساکین، موضعاً همگن.

مقدمه

یکی از اهداف مهم در ارائه یک مدل ریاضی برای مسائل مطرح در علوم تجربی و حتی در بعضی از شاخه‌های علوم انسانی، ایجاد امکان بیان مسئله به‌روشی خلاصه از یک سو و استفاده از ابزار ریاضی در جهت دسترسی به نتایج به‌صورت مدلل و با استحکام منطقی بالا از سوی دیگر است. در این بین یکی از موارد با کاربرد زیاد، مدل‌های هندسی است. به‌عنوان شاهدی بر این مسئله، می‌توان هندسهٔ آفین را نام برد. اولین رساله در مورد هندسهٔ آفین در سال ۱۹۲۳ به‌وسیلهٔ بلاشک به نگارش درآمد [۱]. هر چند نگاشت‌های آفین خطی نیستند، اما چون تحت انتقال‌ها پایا می‌مانند، هندسه آفین را می‌توان اصولاً هندسهٔ جبر خطی دانست.

در این هندسه با توجه به نتایج به‌دست آمده، پس از ارائهٔ یک مدل هندسه آفین به‌عنوان یک ابررویه، می‌توان این ابررویه را به‌نحوی با یک چندجمله‌ای متناظر ساخت. البته بدیهی است که اهمیت این تناظر، فراهم‌سازی امکان انجام محاسبات و استفاده از نرم افزارهای ریاضی در دست‌یابی به نتایج است. برای نمونه سه مثال بیان می‌کنیم که در ادامه مقاله به مثال سوم به‌عنوان یکی از اهداف اصلی می‌پردازیم.

*نویسنده مسئول ae110mat@cc.iut.ac.ir

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.215]

در سال ۱۹۷۰ لئون گلاس دیدگاه نظریِ کنترلِ کلاسی از معادلات دیفرانسیل قطعه قطعه آفین را برای الگوسازی ژنتیک شبکه‌های واکنشی و شیمیایی، ارائه کرد [۲]. الگوهای قطعه قطعه آفین در حالتی وارد عمل می‌شوند که دورهٔ تولید و از هم‌پاشیدگی قابل اصلاح باشد.

امروزه یکی از مسائل مورد علاقه، نشاندن فضا–زمان‌ها در فضاهایِ با ابعاد بیش‌تر است. به‌عنوان مثال ثابت شده است که فضا-زمان روبتسون-والکر می‌تواند به‌عنوان ابررویه‌های آفین مرکز و ابررویه‌های نمودار درفضاهای آفین به‌قسمی نشانده شود که مترهای نسبی القایی دقیقاً همان مترهای لورنتزی روی فضا-زمانهای روبرتسون-والکر باشند [۳]. این مطلب موجب می‌شودکه این فضا-زمان‌ها و زیرمنیفلدهای آنها را به‌روشی طبیعی زیرمنیفلدهای آفین در نظر بگیریم. درنتیجهٔ این استنباط، استفاده از ابزار هندسهٔ آفین برای مطالعهٔ فضا-زمان‌های روبرتسون-والکر و زیر منیفلدهای آنها امکان‌پذیر می‌شود.

هندسهٔ منیفلدهای آماری در تلاقی چند زمینه تحقیقاتی نظیر هندسهٔ اطلاعات، هندسه دیفرانسیلِ آفین و هندسهٔ هسیان واقع شده است. اصطلاح منیفلد آماری به‌وسیلهٔ آمَری در سال ۱۹۸۰ و در مبحث جدیدی با نام هندسهٔ اطلاعات تعریف شده است و نقش مهمی در ساختن این رشته جدید تحقیقاتی ایفا کرده است [۴]. فرض کنیم $\mathrm{p}(.,\theta):(\chi,dx)\to(0,\infty)$ یک چگالی احتمال با پارامتری $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_n)\epsilon\Theta\subset\mathbb{R}^n$ باشد. برای هر عدد ثابت $\alpha\in\mathbb{R}$، قرار می‌دهیم:

$$g_\theta=\sum\left\{\int_\chi \frac{\partial\log\mathrm{p}}{\partial\theta^i}(x,\theta)\frac{\partial\log\mathrm{p}}{\partial\theta^j}(x,\theta)\mathrm{p}(x,\theta)\,dx\right\}d\theta^i\,d\theta^j$$

و

$$\Gamma_{ijk}^\alpha(\theta)\coloneqq\sum\left\{\int_\chi \frac{\partial^2\log\mathrm{p}}{\partial\theta^i\partial\theta^j}(x,\theta)+\frac{1-\alpha}{2}\frac{\partial\log\mathrm{p}}{\partial\theta^i}(x,\theta)\frac{\partial\log\mathrm{p}}{\partial\theta^j}(x,\theta)\right\}\frac{\partial\log\mathrm{p}}{\partial\theta^k}(x,\theta)\,\mathrm{p}(x,\theta)\,dx.$$

به‌راحتی ملاحظه می‌شود که g_θ یک فرم درجه دومِ نیم-معین مثبت روی $T_\theta\Theta$ است. اگر g یک متر ریمانی روی Θ باشد، آن‌گاه $(\Theta,\nabla^{(\alpha)},g)$ یک منیفلد آماری است، در حالی که $\nabla^{(\alpha)}$ التصاق آفینی است که به‌وسیلهٔ

$$\Gamma_{ijk}^\alpha=g(\nabla^{(\alpha)}_{\frac{\partial}{\partial\theta^i}}\frac{\partial}{\partial\theta^j},\frac{\partial}{\partial\theta^k})$$

تعریف می‌شود. در واقع g و $\nabla^{(\alpha)}$ به‌ترتیب با نام متریک فیشر و α-التصاق آمَری نسبت بـه $\{\mathrm{p}(.,\theta)|\theta\epsilon\Theta\}$ معـروف هستند. این ابزار برای فهم استنتاج‌های آماری مفید هستند. به‌وسیلهٔ معادله کدآزی، یک زوج متشکل از یـک التصـاق القایی و یک فرم اساسی آفین، یعنی دومین فرم اساسـی، سـاختاری آمـاری روی یـک ابرصـفحهٔ زوال‌ناپـذیر بـه‌وجـود می‌آورد. به همین دلیل گاهی ساختار آماری را ساختار کدآزی نیز گویند.

منیفلدهای آماری از جنبه‌های مختلف قابل بررسی هستند، از این‌رو در سال‌های اخیر مقالات بسیاری در این زمینه به چاپ رسیده است. به‌عنوان یکی از اولین مقالات، می‌توان به [۵] اشاره کرد که به‌وسیلهٔ نوگوچی و با عنوان هندسهٔ منیفلدهای آماری به‌طور عمده بررسی خواصی در مورد التصاق‌های آماری را مورد توجه قرار داده است. هندسه منیفلد آماری با بعد نامتناهی در حالتی که روی فضای هیلبرت مدل شده است [۶]، ساختار منیفلد آماری

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.215]

برای نسبیت عام [۷] یا ساختارهای سیمپلکتیک روی منیفلدهای آماری [۸]، نشان‌دهندهٔ نحوهٔ گستردگی تحقیق روی این موضوع است.

به‌واسطهٔ وجود امکانات خاص، منیفلدهای آماری ساساکین و کنموتسو در مرکز توجه بسیاری از محققان در این زمینه قرار گرفته‌اند. به‌عنوان مثال در [۹] ثابت شده است که شرط پذیرش ساختار ساساکین برای یک ابررویه در یک منیفلد آماری هولومرف معادل با یک شرط روی عملگرهای شکل این ابررویه است. هم‌چنین در [۱۰] دست‌یابی به یک منیفلد آماری کنموتسو تحت یک شرط معین از یک منیفلد کیلری خاص بیان شده است که مثال مهمی از منیفلد آماری هولومرفیک خواهد بود.

موضوع انحنا در هندسه دیفرانسیل، برای منیفلدهای آماری نیز جای بحث دارد و دستاورد بررسی انحناهای مختلف، نتایج قابل تأملی برای این دسته از منیفلدها است. فوروهاتا یکی از افرادی است که رویکرد جدیدی را در بارهٔ این موضوع آغاز کرده است [۱۱]. به‌عنوان مثال وی شرطی روی انحنای یک منیفلد آماری ارائه کرد که آن منیفلد را قادر به پذیرش یک ابررویهٔ استاندارد می‌کند. از موارد دیگر می‌توان به [۱۲] اشاره کرد که در آن پایاهای آماری برای زیرمنیفلدهای آماری از یک منیفلد آماری کنموتسو با ϕ- انحنای برشی ثابت بررسی شده است.

انحنای کازوراتی مفهومی است که به‌وسیلهٔ ریاضی‌دان ایتالیایی، فلس کازوراتی(۱۸۳۵-۱۸۹۰) بر انحنای سنتی گاوسی و انحنای متوسط به این دلیل ترجیح داده شد که تطابق بهتری با شهود عمومی از انحنا داشت [۱۳]. تعبیری هندسی از انحنای کازوراتی زیرمنیفلدها در منیفلدهای ریمانی و مفهوم آن در هندسه و دیگر زمینه‌ها را به‌عنوان مثال می‌توان در[۱۴]، [۱۵]، [۱۶] یافت. یکی از اهداف کلی در هندسهٔ منیفلدها، رسیدن به رابطه‌ای بین خواص بیرونی و خواص ذاتی زیر منیفلدها در منیفلدها و به‌طور خاص فضا فرم‌ها است. از کاربردهای وسیع و مهم انحنای کازوراتی، اثبات وجود یک نامساوی بهینه با نام نامساوی چن بین انحنای کازوراتی به‌عنوان یک خاصیت بیرونی و انحنای اسکالر به‌عنوان خاصیتی ذاتی برای زیرمنیفلدها در فضا فرم‌های مختلف است (برای مثال [۱۷] را ببینید). به‌طور خاص شناسایی زیرمنیفلدهای صادق در حالت تساوی در نامساوی‌های بهینهٔ حاصل، یکی از اهداف مهم است که برای منیفلدهایی رخ می‌دهد که به آنها منیفلدهای ایده‌آل گویند. مزیت زیرمنیفلدهای ایده‌آل در این است که حداقل تنش ممکن را از فضای زمینه خود دریافت می‌کنند.

قسمت عمده‌ای از این مقاله به اثبات نامساوی‌های بهینه‌ای اختصاص دارد که با استفاده از انحنای کازوراتی، در مورد زیرمنیفلدهای آماری در منیفلدهای آماری ساساکین با انحنای خاص ثابت انجام می‌شود.

در بخش پایانی این مقاله، با استفاده از تعدادی نامساوی بهینه مشابه با نامساوی‌های بخش قبلی و نتایج آن در مورد بطور پایا شبه نافی بودن در حالت تساوی، دسته‌بندی‌هایی برای ابررویه‌های موضعاً همگن در فضاهای اقلیدسی ارائه می‌شود.

پیشنیازها

در این‌جا M نمایش یک منیفلد ریمانی هموار از بعد m است و همهٔ اشیا هموار فرض می‌شوند. مجموعه میدان‌های برداری هموار روی M را با نماد $\Gamma(TM)$ و مجموعه همهٔ میدان‌های تانسوری هموار از نوع (p,q) روی M را با نماد $\Gamma(TM^{(p,q)})$ نشان می‌دهیم. فرض کنیم ∇ یک التصاق آفین روی M و $g \in \Gamma(TM^{(0,2)})$ یک متریک ریمانی باشد. التصاق لوی-چیویتا مربوط به g را با ∇^g یا فقط $\widehat{\nabla}$ نمایش می‌دهیم. با فرض $\varphi \in \Gamma(TM^{(1,1)})$ و $\xi \in \Gamma(TM)$، به‌ترتیب مروری بر ساختار آماری و ساختار ساساکین می‌کنیم.

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.215]

تعریف ۱. زوج (∇, g) را یک ساختار آماری روی M نامند، هرگاه التصاق ∇ بدون تاب باشد و معادله کدآزی برای هر $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$، به صورت زیر برقرار باشد.

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = (\nabla_Y g)(X, Z).$$

برای ساختار آماری (∇, g)، ∇^* را به صورت (۱) تعریف می‌کنیم:

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X^* Z). \tag{۱}$$

در این‌صورت به‌راحتی ملاحظه می‌شود که ∇^* یک التصاق آفین است که به آن التصاق دوگان ∇ نسبت به g گویند و به‌علاوه (∇^*, g) نیز یک ساختار آماری است. هم‌چنین داریم $\widehat{\nabla} = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^*)$. برای هر ساختار آماری (∇, g)و برای هر $X, Y \in \Gamma(TM)$، قرار می‌دهیم: $K_X Y = \nabla_X Y - \widehat{\nabla}_X Y$، در نتیجه K عضوی از $\Gamma(TM^{(1,2)})$ است و در روابط (۲) صدق می‌کند.

$$K_X Y = K_Y X, \qquad g(K_X Y, Z) = g(Y, K_X Z). \tag{۲}$$

برعکس برای یک متر ریمانی g، اگر $K \in \Gamma(TM^{(1,2)})$ در شرط (۲) صدق کند، آن‌گاه زوج $\nabla := (\widehat{\nabla} + K, \mathrm{g})$ یک ساختار آماری تعریف می‌کند. به‌علاوه داریم: $K = \widehat{\nabla} - \nabla^* = \frac{1}{2}(\nabla - \nabla^*)$. غالباً $K_X Y$ را با $K(X; Y)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۲. فرض کنیم (∇, g) یک ساختار آماری روی M باشد تانسور انحنای نظیر ∇ را با R^∇ یا به اختصار با R نشان می‌دهیم و به‌همین طریق R^{∇^*} را با R^* نمایش می‌دهیم. برای $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$، تعریف می‌کنیم:

$$S(X, Y)Z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{R(X, Y)Z} + \mathrm{R}^*(X, Y)Z\right).$$

و S میدان تانسور انحنای آماری (∇, g) نامیده می‌شود. به‌سادگی ملاحظه می‌شود که $S(X, Y)Z$ همهٔ خواص تانسور انحنا را دارد، بنابراین S عضوی از $\Gamma(TM^{(1,3)})$ است. به‌ویژه برای هر $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ داریم:

$$g(S(X, Y)Z, W) = -g(S(X, Y)W, Z).$$

تعریف ۳. یک منیفلد آماری (M, ∇, g) را از انحنای آماری ثابت $c \in \mathbb{R}$ گویند اگر برای هر $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$، این رابطه برقرار باشد:

$$S(X, Y)Z = c\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}.$$

اگر میدان تانسوری انحنای نظیر التصاق لوی-چیویتای $\widehat{\nabla}$ برای یک ساختار آماری (∇, g) را با $\widehat{R}$ نشان دهیم، آن‌گاه برای $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ این رابطه برقرار است:

$$\mathrm{R}(X, Y)Z = S(X, Y)Z - [K_X - K_Y]\mathrm{Z}.$$

تأکید می‌شود که انحنای برشی (∇, g) می‌تواند با استفاده از میدان تانسوری S و نه R تعریف شود، چون R تقارن‌های کافی میدان تانسوری انحنا از یک التصاق لوی-چویتا را ندارد [۱۸].

اگر $(\widetilde{M}, \tilde{g}, \widetilde{\nabla})$ یک منیفلد آماری و M یک زیرمنیفلد $\widetilde{M}$ باشد، آن‌گاه (M, g, ∇) با التصاق القایی ∇ و متریک القایی g، نیز یک منیفلد آماری است.

تعریف ۴. فرض کنیم $\pi = span_{\mathbb{R}}\{v, w\}$ یک زیرفضای دو بعدی از $T_P M$ در نقطه $p \epsilon M$ باشد. انحنای برشی M برای π بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$\sigma(\pi) = \frac{g(s(v, w)w, v)}{g(v, v)g(w, w) - g^2(v.w)}.$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.215]

برای $p\epsilon M$، هرگاه $\{e_1,\cdots.,e_{m+1}\}$ یک پایه متعامد یکه برای فضای مماس T_PM باشد و $\{e_{m+2},\cdots,e_n\}$ یک پایه متعامد یکه برای $T_p^{\perp}M$ باشد، آن‌گاه انحنای اسکالر τ در p با رابطهٔ (۳) بیان می‌شود,

$$\tau(p)=\sum_{1\le i.j\le m+1}\sigma(e_i,e_j)=\sum_{1\le i.j\le m+1}g(S(e_i,e_j)e_j,e_i) \tag{۳}$$

هم‌چنین انحنای اسکالر نرمال شده ρ از M به‌صورت (۴) تعریف می‌شود.

$$\rho=\frac{2\tau}{m(m+1)}. \tag{۳}$$

میدان برداری انحناهای متوسط M نیز به‌ترتیب با نمادهای H بدین‌صورت بیان می‌شوند:

$$H=\frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{m+1}h(e_i,e_i),\qquad H^*=\frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{m+1}h^*(e_i,e_i).$$

از این‌رو مربع طول میدان‌های برداری انحنای متوسط برای زیر منیفلد M از $\widetilde{M}$ بدین‌صورت محاسبه می‌شود:

$$\|H\|^2=\frac{1}{(m+1)^2}\sum_{\alpha=m+2}^{2n+1}\left(\sum_{i=1}^{m+1}h_{ii}^{\alpha}\right)^2,\qquad \|H^*\|^2=\frac{1}{(m+1)^2}\sum_{\alpha=m+2}^{2n+1}\sum_{i=1}^{m+1}(h_{ii}^{*\alpha})^2.$$

که در آن $i,j\in\{1,\cdots,m+1\}$ و $\alpha\in\{m+2,\cdots,2n+1\}$،

$$,h_{ij}^{\alpha}=\tilde{g}\big(h(e_i,e_j),e_\alpha\big),\qquad h_{ij}^{*\alpha}=\tilde{g}\big(h^*(e_i,e_j)e_\alpha\big).$$

با توجه به $2\widehat{\nabla}=(\nabla+\nabla^*)$، برای دومین فرم‌های اساسی نسبت به ∇ و ∇^* روی M داریم: $2\hat{h}=h+h^*$ که از آن نتیجه می‌شود که $2\widehat{H}=H+H^*$، در حالی‌که $\hat{h}$ و $\widehat{H}$ به‌ترتیب دومین فرم اساسی و میدان برداری انحنای متوسط متناظر با التصاق لوی-چویتای $\widehat{\nabla}$ روی M هستند.

یادآوری می‌شود که یک زیرمنیفلد آماری (M,∇,g) در $(\widetilde{M},\tilde{g},\widetilde{\nabla})$، تماماً ژئودزی نسبت به التصاق $\widetilde{\nabla}$ نامیده می‌شود اگر دومین فرم اساسی h روی M همه جا صفر باشد (برای نمونه [۱۸] را ببینید).

انحنای کازوراتی که تعریف آن از [۱۴] در ادامه می‌آید، برتری‌هایی بر انحنای سنتی گاوسی یا انحنای متداول برشی دارد که به‌عنوان نمونه به یکی از آنها اشاره می‌شود. انحنای کازوراتی برای یک رویه صفراست اگر و فقط اگر انحناهای اصلی آن، هر دو به‌طور هم‌زمان صفر باشند، درحالی که برای صفر شدن انحنای گاوسی رویه کافی است یکی از انحناهای اصلی صفر باشد. برای مثال با انحنای گاوسی نمی‌توان تمایزی بین صفحه و استوانه قائل شد، درحالی‌که انحنای کازوراتی این دو را تفکیک می‌کند. بنابراین انحنای کازوراتی شهود بهتری در این‌گونه مسائل ایجاد می‌کند.

فرض کنیم M یک زیرمنیفلد $(m+1)$–بعدی هموار از منیفلد هموار $(2n+1)$– بعدی $\widetilde{M}$ باشد. یک پایه متعامد یکه $\{e_1.\dots.e_{m+1}\}$ برای فضای مماس $\mathrm{T_pM}$ در $p\in M$ و یک پایه متعامد یکه $\{e_{m+2}.\dots.e_{2n+1}\}$ برای فضای قائم $T_p^{\perp}M$، اختیار می‌کنیم.

تعریف ۵. انحناهای کازوراتی با نمادهای $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}^*$ برای زیرمنیفلد M از $\widetilde{M}$، در نقطه $p\in M$ بدین‌صورت تعریف می‌شوند:

$$\mathcal{C}_p=\frac{1}{m+1}\|h\|^2=\frac{1}{m+1}\sum_{\alpha=m+2}^{2n+1}\sum_{i.j=1}^{m+1}(h_{ij}^{\alpha})^2.$$

$$\mathcal{C}_p^*=\frac{1}{m+1}\|h^*\|^2=\frac{1}{m+1}\sum_{\alpha=m+2}^{2n+1}\sum_{i.j=1}^{m+1}(h_{ij}^{*\alpha})^2.$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.215]

فرض کنیم L یک زیر فضای r-بعدی از T_pM، $r \geq 2$ و $\{e_1, \cdots, e_r\}$ یک پایه متعامد یکه برای L باشد. انحنای کازوراتی $\mathcal{C}(L)$ و $\mathcal{C}^*(L)$ برای L بدین‌صورت بیان می‌شود:

$$\mathcal{C}(L) = \frac{1}{r}\sum_{\alpha=m+2}^{2n+1}\sum_{i,j=1}^{r}(h_{ij}^{\alpha})^2, \quad \mathcal{C}^*(L) = \frac{1}{r}\sum_{\alpha=m+2}^{2n+1}\sum_{i,j=1}^{r}(h_{ij}^{*\alpha})^2.$$

انحناهای δ -کازوراتی نرمال‌شده $\delta_{\mathcal{C}}(m)$ و $\hat{\delta}_{\mathcal{C}}(m)$ برای زیرمنیفلد M بدین‌صورت تعریف می‌شود:

$$[\delta_{\mathcal{C}}(m)]_p = \frac{1}{2}\mathcal{C}_p + \frac{m+2}{2(m+1)}\inf\{\mathcal{C}(L) \mid L \text{ یک ابرصفحه از } T_pM \text{ است}\}.$$

$$[\hat{\delta}_{\mathcal{C}}(m)]_p = 2\mathcal{C}_p - \frac{2m+1}{2(m+1)}\sup\{\mathcal{C}(L) \mid L \text{ یک ابرصفحه از } T_pM \text{ است}\}.$$

به‌طور مشابه می‌توان انحناهای δ^*-کازوراتی نرمال‌شده $\delta^*_{\mathcal{C}}(m)$ و $\hat{\delta}^*_{\mathcal{C}}(m)$ برای زیرمنیفلد M از $\widetilde{M}$ را فقط با جای‌گذاری $\mathcal{C}^*$ به جای $\mathcal{C}$ بدین‌صورت تعریف کرد:

$$[\delta^*_{\mathcal{C}}(m)]_p = \frac{1}{2}\mathcal{C}^*_p + \frac{m+2}{2(m+1)}\inf\{\mathcal{C}^*(L) \mid L \text{ یک ابرصفحه از } T_pM \text{ است}\}.$$

$$[\hat{\delta}^*_{\mathcal{C}}(m)]_p = 2\mathcal{C}^*_p - \frac{2m+1}{2(m+1)}\sup\{\mathcal{C}^*(L) \mid L \text{ یک ابرصفحه از } T_pM \text{ است}\}.$$

تعریف ۶. اگر برای هر عدد حقیقی مثبت r مخالف با $m(m+1)$ قرار دهیم:

$$a(r) = \frac{m(r+m+1)(m^2+m-r)}{r(m+1)}$$

آن‌گاه انحنای δ -کازوراتی نرمال‌شده تعمیم یافته $\delta_{\mathcal{C}}(r;m)$ برای زیرمنیفلد M از $\widetilde{M}$، برای هر $p \in M$ و $0 < r < m(m+1)$، بدین‌صورت تعریف شده است:

$$[\delta_{\mathcal{C}}(r;m)]_p = r\mathcal{C}_p + a(r)\inf\{\mathcal{C}(L) \mid L \text{ یک ابرصفحه از } T_pM \text{ است}\}.$$

انحناهای δ -کازوراتی نرمال‌شده تعمیم یافته با نماد $\hat{\delta}_{\mathcal{C}}(r;m)$ نیز به‌صورت زیر برای هر $r > m(m+1)$ در مرجع [۶] بیان شده است.

$$[\hat{\delta}_{\mathcal{C}}(r;m)]_p = r\mathcal{C}_p + a(r)\sup\{\mathcal{C}(L) \mid L \text{ یک ابرصفحه از } T_pM \text{ است}\}.$$

به‌علاوه، انحناهای δ^*-کازوراتی نرمال شده دوگان $\delta^*_{\mathcal{C}}(r;m)$ و $\hat{\delta}^*_{\mathcal{C}}(r;m)$ برای زیرمنیفلد M از $\widetilde{M}$، در هر نقطه $p \in M$، به‌ترتیب برای $0 < r < m(m+1)$ و $r > m(m+1)$ بدین‌صورت تعریف شده است:

$$[\delta^*_{\mathcal{C}}(r;m)]_p = r\mathcal{C}^*_p + a(r)\inf\{\mathcal{C}^*(L) \mid L \text{ یک ابرصفحه از } T_pM \text{ است}\}.$$

$$[\hat{\delta}^*_{\mathcal{C}}(r;m)]_p = r\mathcal{C}^*_p + a(r)\sup\{\mathcal{C}^*(L) \mid L \text{ یک ابرصفحه از } T_pM \text{ است}\}.$$

به‌وضوح انحناهای $\delta -$ و δ^*-کازوراتی نرمال‌شده تعمیم یافته (دوگان)، تعمیمی طبیعی از انحناهای $\delta -$ و δ^*-کازوراتی نرمال‌شده (دوگان) هستند به دلیل این‌که $\delta_{\mathcal{C}}(m)$، $\hat{\delta}_{\mathcal{C}}(m)$، $\delta^*_{\mathcal{C}}(m)$ و $\hat{\delta}^*_{\mathcal{C}}(m)$ می‌توانند با قرار دادن مقادیر خاصی به‌جای r به‌ترتیب از $\delta_{\mathcal{C}}(r;m)$، $\hat{\delta}_{\mathcal{C}}(r;m)$، $\delta^*_{\mathcal{C}}(r;m)$ و $\hat{\delta}^*_{\mathcal{C}}(r;m)$ بدین‌صورت بازیافت شوند:

$$\delta_{\mathcal{C}}(m) = \frac{\delta_{\mathcal{C}}\left(\frac{m(m+1)}{2};m\right)}{m(m+1)}, \qquad \hat{\delta}_{\mathcal{C}}(m) = \frac{\hat{\delta}_{\mathcal{C}}\left(\frac{m(m+1)}{2};m\right)}{m(m+1)}.$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.215]

$$\delta^*_{\mathcal{C}}(\mathrm{m}) = \frac{\delta^*_{\mathcal{C}}\left(\frac{m(m+1)}{2}; m\right)}{m(m+1)}, \qquad \hat{\delta}^*_{\mathcal{C}}(\mathrm{m}) = \frac{\hat{\delta}^*_{\mathcal{C}}\left(\frac{m(m+1)}{2}; m\right)}{m(m+1)} .$$

انحنای کازوراتی و منیفلد های آماری ساساکین

یرای ورود به نتایج این بخش، ابتدا لازم است، تعاریف مربوط به منیفلد ساساکین بیان شود.

تعریف ۷. سه‌تایی (g,φ,ξ) را یک ساختار تقریباً تماسی روی M گویند هرگاه برای هر $X,Y\in\Gamma(TM)$، این تساوی‌ها برقرار باشد:

$$\varphi\xi = 0, \quad g(\xi,\xi) = 1, \quad \varphi^2 X = -X + g(X,\xi)\xi, \quad g(\varphi X, Y) + g(X, \varphi Y) = 0.$$

برای هر $X,Y\in\Gamma(TM)$، $\eta\in\Gamma(TM^*)$ و $\omega\in\Gamma(TM^{(0,2)})$ را بدین‌صورت درنظر می‌گیریم:

$$\eta(X) = g(X,\xi), \qquad \omega(X,Y) = g(X,\varphi Y) .$$

به‌سادگی نتیجه می‌شود که،

$$\eta o\varphi = 0.$$

به‌طور تاریخی یک ساختار متریک تقریباً تماسی به‌وسیلهٔ چهارتایی (φ,ξ,η,g) نمایش داده می‌شود. چنان‌که ملاحظه شد η به‌وسیلهٔ دیگر مقادیر تعیین می‌شود، به‌همین دلیل در تعریف ۸، η آورده نشده است.

تعریف ۸. یک ساختار متریک تقریباً تماسی روی M یک ساختار ساساکین نامیده می‌شود، اگر تساوی زیر برای هر $X,Y\in\Gamma(TM)$، برقرار باشد.

$$\left(\widehat{\nabla}_X\varphi\right)Y = g(Y,\xi)X - g(X,Y)\xi.$$

یک چهارتایی (φ,ξ,η,g) را یک ساختار آماری ساساکین رویM گویند هرگاه (∇,g) یک ساختار آماری و (g,φ,ξ) یک ساختار ساساکین باشد و به‌علاوه برای هر $X,Y\in\Gamma(TM)$، این رابطه برقرار باشد:

$$K(X,\varphi Y) + \varphi K(X,Y) = 0.$$

تعریف ۹. فرض کنیم چهارتایی (φ,ξ,η,g) یک ساختار آماری ساساکین روی M و $c\epsilon\mathbb{R}$. ساختار ساساکین آماری را از انحنای φ- برشی ثابت c گویند، هرگاه برای هر $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$، این رابطه برقرار باشد:

$$\begin{aligned} S(X,Y)Z &= \frac{c+3}{4}\{\mathrm{g(Z,Y)X - g(Z,X)Y}\} \\ &+ \tfrac{c-1}{4}\{\omega(Z,\mathrm{Y})\varphi\mathrm{X} - \omega(\mathrm{Z,X})\varphi\mathrm{Y} - 2\omega(\mathrm{Y,X})\varphi\mathrm{Z} - \eta(Y)\eta(Z)X + \eta(X)\eta(Z)Y + \\ &\eta(Y)g(Z,X)\xi - \eta(X)g(Z,Y)\xi\}. \end{aligned} \tag{۵}$$

یک منیفلد آماری ساساکین از انحنای φ-برشی ثابت است اگر و فقط اگر انحنای برشی دارای همان مقدار برای هر φ-برش در هر نقطه باشد. در هر نقطه $p\in M$، بنا بر تعریف، یک φ-برش به معنی یک صفحه تولید شده به‌وسیلهٔ بردارهای یکهٔ مماس X وφX است که این صفحه عمود بر ξ_p است.

تعریف ۱۰. فرض کنیم M یک زیرمنیفلد $(m+1)$-بعدی از یک منیفلد آماری ساساکین $(2\mathrm{n}+1)$ -بعدی $(\widetilde{M},\tilde{g})$ باشد و g متریک القایی روی M باشد. در این‌صورت فرمول‌های گاوس برای $X,Y\in\Gamma(TM)$، برای $\widetilde{\nabla}$ و $\widetilde{\nabla}^*$ را بدین‌صورت داریم:

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.215]

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y), \qquad \widetilde{\nabla}^*{}_X Y = \nabla^*_X Y + h^*(X,Y).$$

درحالی که h و h^*، (0و2)-تانسورهای متقارن هستند که گاهی به آنها به‌ترتیب تانسور انحنای نشانده M در $\widetilde{M}$ برای $\widetilde{\nabla}$ و تانسور انحنای نشانده M در $\widetilde{M}$ برای $\widetilde{\nabla}^*$ گویند. میدان‌های تانسوری انحنا نسبت به ∇ و $\widetilde{\nabla}$ را به‌ترتیب با R و $\widetilde{\mathrm{R}}$ نمایش می‌دهیم. بنابراین معادله گاوس برای زیرمنیفلد M از $\widetilde{M}$ نسبت به التصاق $\widetilde{\nabla}$ برای هر $X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$، عبارت است از:

$$\tilde{g}\big(\tilde{R}(X,Y)Z,W\big) = g(R(X,Y)Z,W) + \tilde{g}(h(X,Z),h^*(Y,W) - \tilde{g}(h(Y,Z),h^*(X,W).$$

به‌طور مشابه اگر R^* و $\tilde{R}^*$ به‌ترتیب نمایش میدان‌های تانسوری متناظر با التصاق‌های ∇^* و $\widetilde{\nabla}^*$ باشد، آن‌گاه معادلهٔ گاوس نسبت به التصاق $\widetilde{\nabla}^*$ برای هر $X.Y.Z,W \in \Gamma(TM)$ بدین‌صورت است:

$$\tilde{g}\big(\tilde{R}^*(X,Y)Z,W\big) = g(R^*(X,Y)Z,W) + \tilde{g}(h^*(X,Z),h(Y,W) - \tilde{g}(h^*(Y,Z),h(X,W).$$

گزاره ۱۱ را که اثبات ساده‌ای دارد، برای بیان مثالی از یک منیفلد آماری ساساکین بیان می‌کنیم [۹].

گزارهٔ ۱۱. اگر چهارتایی $(\nabla,\ \mathrm{g},\ \varphi,\xi)$ یک ساختار آماری ساساکین روی M و $\lambda\epsilon C^\infty(M)$ و $\nabla^\lambda = \widehat{\nabla} + \lambda K$، آن‌گاه $(\nabla^\lambda,\ \mathrm{g},\ \varphi,\xi)$ یک ساختار آماری ساساکین است. به‌ویژه $(\nabla^*,\ \mathrm{g},\ \varphi,\xi)$ نیز یک ساختار آماری ساساکین است.

در این‌جا برای آشنایی بیش‌تر دو مثال مطرح می‌شود.

مثال ۱۲. فرض کنیم $(\mathrm{g},\ \varphi,\xi)$ یک ساختار ساساکین روی M باشد و برای هر $X,Y \in \Gamma(TM)$، قرار دهیم:

$$K(X,Y) = \eta(X)\eta(Y)\xi,$$

بنابراین K در (۲) و $K(X,\varphi Y) + \varphi K(X,Y) = 0$ صدق می‌کند. هم‌چنین برای $\lambda\epsilon C^\infty(M)$، یک ساختار آماری ساساکین $(\nabla^\lambda = \widehat{\nabla} + \lambda K,\ \mathrm{g},\varphi,\xi)$ روی M داریم. در این حالت میدان تانسور انحنای آماری S با میدان تانسور انحنای ریمانی $\widehat{\mathrm{R}}$ برابر است.

مثال ۱۳. فرض کنید S^{2n+1} یک ابرکره یکه در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^{2n+2}$ و J یک ساختار تقریباً مختلط استاندارد روی $\mathbb{R}^{2n+2}$ به‌عنوان $\mathbb{C}^{n+1}$ باشد. هرگاه N میدان برداری قائم یکه روی S^{2n+1} باشد، قرار می‌دهیم $\xi = -JN$ و φ را به‌وسیلهٔ $\pi \circ J$ تعریف می‌کنیم، درحالی‌که π تصویر طبیعی فضای مماس $\mathbb{R}^{2n+2}$ به روی فضای مماس بر S^{2n+1} است. متریک استاندارد ابرکره را با g نمایش می‌دهیم. دراین‌صورت $(\mathrm{g},\ \varphi,\xi)$ یک ساختار آماری ساساکین روی S^{2n+1} است. بنابر مثال ۱۲، می‌توان ساختارهای آماری ساساکین روی S^{2n+1} با انحنای برشی آماری ثابت برابر با یک ساخت. به‌علاوه انحنای φ-برشی نیز ثابت یک است.

فرض کنیم M یک زیرمنیفلد $(m+1)$–بعدی از منیفلد $(2n+1)$–بعدی آماری ساساکین $(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\ \tilde{g}\ ,\varphi,\xi)$ باشد. آن‌گاه هر میدان برداری مماس φX به M می‌تواند به‌طور یگانه به مؤلفه‌های مماس PX و مولفه قائم FX تجزیه شود، یعنی $\varphi X = PX + FX$. هم‌چنین مربع طول P بر اساس پایه مماس بیان شده برای M عبارت است از:

$$\|P\|^2 = \sum_{i,j=1}^{m+1} g^2\left(Pe_i,e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{m+1} g^2\left(\varphi e_i,e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{m+1} \omega^2\left(e_i,e_j\right).$$

از آن‌جاکه قضیه‌ای که در ادامه اثبات می‌شود به یک مسئله اکسترمم مقید مربوط می‌شود، ابتدا لازم است قضیهٔ ۱۴ را از [۱۹] بیان کنیم.

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.215]

قضیهٔ ۱۴. فرض کنیم زیر منیفلد M از $(\widetilde{M},\tilde{g})$، تام و همبند باشد و گرادیان تابع f که روی M تعریف می‌شود، در هر نقطه $p\in M$ بر M عمود باشد. هرگاه فرم دوخطی $A: T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$، برای هر $\mathrm{X,Y}\epsilon T_pM$ که با ضابطهٔ

$$A(X,Y)=\mathrm{Hess}(f)(X,Y)+\tilde{g}\ (\hat{h}(X,Y),\mathrm{grad}\ (f)). \qquad (۶)$$

تعریف می‌شود، در p معین مثبت باشد، آن‌گاه p یک جواب بهینه برای مسئله اکسترمم مقید $\min_{x\in M} f(x)$ است.
یادآوری می‌شود که در این‌جا منظور از $Hess(f)$، تانسوری از نوع $(0,2)$ با تعریف زیر برای هر $\mathrm{X,Y}\epsilon T_pM$ است.

$$\mathrm{Hess}(f)(X,Y)=\mathrm{X}\big(\mathrm{Y(f)}\big)-\big(\widehat{\nabla}_X Y\big)f.$$

که در آن $\widehat{\nabla}$ التصاق لوی-چیویتا روی $\widetilde{M}$ است.

بنا به [۱۹]، اگر فرم دوخطی A در معادلهٔ (۶) روی زیرمنیفلد M نیم-معین مثبت باشد، آن‌گاه آن نقاط بحرانی $f|_M$، که میدان برداری گرادیان f در آنها بر M عمود است (یعنی نقاط اکسترمم)، جواب‌های بهینه کلی مسئله اکسترمم مقید $\min_{x\in M} f(x)$ هستند.

قضیهٔ ۱۵، در واقع اثبات وجود نامساوی‌هایی بین انحناهای اسکالر، متوسط و انحنای کازوراتی برای زیرمنیفلدهای آماری از یک منیفلد آماری ساساکین با φ−انحنای ثابت و نیز بررسی شرط تساوی در آنها است.

قضیهٔ ۱۵. فرض کنیم M یک زیر منیفلد $(m+1)$−بعدی آماری از یک منیفلد $(2n+1)$−بعدی آماری ساساکین $(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\tilde{g}\ ,\varphi,\xi)$ با φ−انحنای ثابت c باشد. آن‌گاه

الف) برای هر عدد r که $0<r<m(m+1)$، انحناهای δ -کازوراتی نرمال‌شده تعمیم یافته $\delta_{\mathcal{C}}(r;\mathrm{m})$ و $\delta^*_{\mathcal{C}}(r;\mathrm{m})$ در نامساوی (۷) صدق می‌کند:

$$\rho\leq\frac{1}{m(m+1)}\bar{\delta}_{\mathcal{C}}(r;m)+\frac{1}{m}\hat{\mathcal{C}}-\frac{2(m+1)}{m}\big\|\widehat{H}\big\|^2+\frac{(m+1)}{m}\tilde{g}(H.H^*)\ \ +\frac{3(c-1)}{4m(m+1)}\|P\|^2\ \ +\frac{1}{4(m+1)}[c(m-1)\ \ +3m\ \ +5]. \qquad (۷)$$

در حالی‌که $\bar{\delta}_{\mathcal{C}}(r;m)$ و $\hat{\mathcal{C}}$ به‌ترتیب به‌صورت $2\bar{\delta}_{\mathcal{C}}(r;m)=\delta_{\mathcal{C}}(r;\mathrm{m})+\delta^*_{\mathcal{C}}(r;\mathrm{m})$ و $2\hat{\mathcal{C}}=\mathcal{C}+\mathcal{C}^*$ تعریف می‌شوند.

ب) برای هر عدد r که $r>m(m+1)$، انحناهای δ -کازوراتی نرمال‌شده تعمیم یافته $\hat{\delta}_{\mathcal{C}}(r;\mathrm{m})$ و $\hat{\delta}^*_{\mathcal{C}}(\mathrm{r;m})$ در نامساوی (۸) صدق می‌کند:

$$\rho\leq\frac{1}{m(m+1)}\bar{\delta}^*_{\mathcal{C}}(r;m)+\frac{1}{m}\hat{\mathcal{C}}-\frac{2(m+1)}{m}\big\|\widehat{H}\big\|^2+\frac{(m+1)}{m}\tilde{g}(H.H^*)\ \ +\frac{3(c-1)}{4m(m+1)}\|P\|^2\ \ +\frac{1}{4(m+1)}[c(m-1)\ \ +3m\ \ +5]. \qquad (۸)$$

در حالی که $\bar{\delta}^*_{\mathcal{C}}(r;m)$ به‌صورت $2\bar{\delta}^*_{\mathcal{C}}(r;m)=\hat{\delta}_{\mathcal{C}}(r;\mathrm{m})+\hat{\delta}^*_{\mathcal{C}}(\mathrm{r;m})$ تعریف می‌شود.

به‌علاوه حالت تساوی در (۷) و (۸) در نقطه $p\in M$ برقرار است، اگر و فقط اگر تانسورهای انحنای نشاننده h و h^* متناظر با التصاق‌های دوگان $\widetilde{\nabla}$ و $\widetilde{\nabla}^*$، برای هر α و هر $i\neq j$، در شرط $h^\alpha_{ij}=-h^{*\alpha}_{ij}$ صدق کنند.

اثبات: با توجه به معادلات گاوس نسبت به التصاق‌های $\widetilde{\nabla}$ و $\widetilde{\nabla}^*$ و هم‌چنین تعریف میدان تانسور انحنای آماری داریم:

$$\begin{aligned}2\tilde{g}\big(\tilde{S}(X.Y)Z,W\big)\ &=\tilde{g}\big(\tilde{R}(X.Y)Z,W\big)+\tilde{g}\big(\tilde{R}(X.Y)Z,W\big)\\&=\{g(R(X,Y)Z,W)+\tilde{g}(h(X,Z),h^*(Y,W)-\tilde{g}(h(Y,Z),h^*(X,W)\}\\&\quad+\{g(R^*(X,Y)Z,W)+\tilde{g}(h^*(X,Z),h(Y,W)-\tilde{g}(h^*(Y,Z),h(X,W)\}\end{aligned}$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.215]

$$= 2\, g(S(X,Y)Z,W) + \tilde{g}(h(X,Z),h^*(Y,W) - \tilde{g}(h(Y,Z),h^*(X,W)$$
$$+\tilde{g}(h^*(X,Z),h(Y,W) - \tilde{g}(h^*(Y,Z),h(X,W)\,. \qquad (۹)$$

در حالی‌که $X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$ فرض شده است. پایه متعامد یکه $\{e_1.\dots.e_{m+1}\}$ برای فضـای ممـاس $\mathrm{T_pM}$ در $p \in M$ و پایه متعامد یکه $\{e_{m+2}.\dots.e_{2n+1}\}$ را برای فضای قائم $T_p^{\perp}M$ اختیار مـی‌کنـیم. بـرای i,j در مجموعـهٔ $\{1,\cdots,m+1\}$، در (۹) قرار می‌دهیم $X = Z = e_i,\ Y = W = e_j$. اما از آن‌جاکـه M دارایφ–انحنـای ثابـت است، بنا بر (۵) داریم:

$$\sum_{i.j=1}^{m+1} \tilde{g}\big(\tilde{S}(e_i.e_j)e_i,e_j)\big) = -\sum_{i.j=1}^{m+1} \tilde{g}\big(\tilde{S}(e_i.e_j)e_j,e_i)\big)$$
$$= -\sum_{i,j=1}^{m+1}\Big[\frac{c+3}{4}\{\tilde{g}\big(\mathrm{g}(e_i,e_j)e_i,e_j\big) - \tilde{g}\big(\mathrm{g}(e_i,e_i)e_j,e_j\big)\}$$
$$+\frac{c-1}{4}\{\tilde{g}(\omega\big(e_i,e_j\big)\varphi e_i,e_j) - \tilde{g}(\omega\big(e_i,e_i\big)\varphi e_j,e_j)$$
$$-2\tilde{g}(\omega\big(e_j,e_i\big)\varphi e_i,e_j\,) \ - \tilde{g}(\eta\big(e_j\big)\eta(e_i)e_i,e_j) + \tilde{g}(\eta(e_i)\eta(e_i)e_j,e_j)$$
$$+\tilde{g}(\eta\big(e_j\big)g(e_i,e_i)\xi,e_j) - \tilde{g}(\eta(e_i)g\big(e_i,e_j\big)\xi,e_j\}\Big]$$
$$= -\frac{c+3}{4}\sum_{i,j=1}^{m+1}(\delta_{ij}^2 - \delta_{ii}\delta_{jj})$$
$$-\frac{c-1}{4}\Big\{-3\sum_{i,j=1}^{m+1}\omega^2\big(e_i,e_j\big) - \sum_{i,j=1}^{m+1}\omega(e_i,e_i)\omega\big(e_j,e_j\big)$$
$$+2m\sum_{i=1}^{m+1}\eta^2(e_i)\Big\}.$$

کـه در حـالی‌کـه δ_{ij} همـان دلتـای کرونکـر اسـت. امـا بـا توجـه بـه مفروضـات، $\omega(e_i,e_i) = 0$ ، هـم‌چنـین $\sum_{i=1}^{m+1}\eta^2(e_i) = 1$ و بنا بر تعریف $\|P\|^2 = \sum_{i,j=1}^{m+1}\omega^2\big(e_i,e_j\big)$ از این‌رو داریم:

$$\sum_{i.j=1}^{m+1}\tilde{g}\big(\tilde{S}(e_i.e_j)e_i,e_j)\big) = -\frac{c+3}{4}\big(-m(m+1)\big) + \frac{c-1}{4}(3\|P\|^2 - 2m). \qquad (۱۰)$$

به‌علاوه،

$$\sum_{i.j=1}^{m+1}\tilde{g}\big(h(e_i.e_i),\ h^*(e_j,e_j)\big) = \tilde{g}\left(\sum_{i=1}^{m+1}h(e_i.e_i)\,,\sum_{j=1}^{m+1}\ h^*(e_j,e_j)\right)$$
$$= \tilde{g}\big((m+1)H,(m+1)H^*\big)$$
$$= (m+1)^2\tilde{g}(H,H^*). \qquad (۱۱)$$

به‌کمک محاسبات (۱۰) و (۱۱)، جمع کردن جملات (۹) برای $1 \le i,j \le m+1$ و استفاده از تعریف τ نتیجه می‌گیریم:

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.215]

$$\frac{m}{4}(c(m-1)+3\,m+5)+\frac{3(c-1)}{4}\ \|P\|^2$$
$$=2\tau-(m+1)^2\tilde{g}(H,H^*)+\sum_{i.j=1}^{m+1}\tilde{g}\big(h(e_i.e_j),\ h^*(e_j,e_j)\big).$$

بنابراین از این که $2\tau=m(m+1)\rho$ داریم:

$$\rho=\frac{m+1}{m}\tilde{g}(H,H^*)-\frac{1}{m(m+1)}\sum_{i.j=1}^{m+1}\tilde{g}\big(h(e_i.e_j),\ h^*(e_j,e_j)\big)$$
$$+\frac{1}{4(m+1)}(c(m-1)+3\,m+5)+\frac{3(c-1)}{4m(m+1)}\ \|P\|^2. \qquad (۱۲)$$

با توجه به $\hat{\nabla}=\frac{1}{2}(\nabla+\nabla^*)$، $\hat{\tilde{\nabla}}=\frac{1}{2}(\tilde{\nabla}+\tilde{\nabla}^*)$ و معادلات گاوس ملاحظ $2\hat{h}=\mathrm{h}+\mathrm{h}^*$. در نتیجه با استفاده از تعریف داریم: $\hat{H}=\mathrm{H}+\mathrm{H}^*$ و $\hat{\mathcal{C}}=\mathcal{C}+\mathcal{C}^*$. اکنون در مورد جملهٔ اول سمت راست (۱۲) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}4\big\|\hat{H}\big\|^2&=\tilde{g}\big(2\hat{H},2\hat{H}\big)\\&=\tilde{g}(H+\mathrm{H}^*,H+\mathrm{H}^*)\\&=\tilde{g}(H,H)+2\,\tilde{g}(H,\mathrm{H}^*)+\tilde{g}(\mathrm{H}^*,\mathrm{H}^*).\end{aligned}$$

بنابراین $\tilde{g}(H,\mathrm{H}^*)=2\big\|\hat{H}\big\|^2-\frac{1}{2}\|\mathrm{H}\|^2-\frac{1}{2}\|\mathrm{H}^*\|^2$. با استدلال مشابه در مورد جمله دوم سمت راست (۱۲) داریم:

$$\sum_{i.j=1}^{m+1}\tilde{g}\big(h(e_i.e_j),\ h^*(e_j,e_j)\big)\ =2\sum_{i.j=1}^{m+1}\tilde{g}\big(\hat{h}(e_i.e_j),\hat{h}(e_j,e_j)\big)$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i.j=1}^{m+1}\tilde{g}\big(h(e_i.e_j),h(e_j,e_j)\big)-\frac{1}{2}\sum_{i.j=1}^{m+1}\tilde{g}\big(\ h^*(e_i.e_j),\ h^*(e_j,e_j)\big).$$

از طرفی

$$\begin{aligned}\sum_{i.j=1}^{m+1}\tilde{g}\big(h(e_i.e_j),h(e_j,e_j)\big)&=\sum_{i,j=1}^{m+1}\tilde{g}\Big(\sum_{\alpha=m+2}^{2n+1}\tilde{g}(h(e_i.e_j),\mathrm{e}_\alpha)\mathrm{e}_\alpha,\sum_{\beta=m+2}^{2n+1}\tilde{g}(h(e_i.e_j),e_\beta)e_\beta\Big)\\&=\sum_{\alpha,\beta=m+2}^{2n+1}\sum_{i,j=1}^{m+1}h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\beta}\,\delta_{\alpha\beta}\\&=\sum_{\alpha=m+2}^{2n+1}\sum_{i,j=1}^{m+1}(h_{ij}^{\alpha})^2=(m+1)\mathcal{C}.\end{aligned}$$

بنابراین با جای‌گذاری این روابط در (۱۲) تساوی (۱۳) حاصل می‌شود.

$$\rho=\frac{2(m+1)}{m}\big\|\hat{H}\big\|^2-\frac{m+1}{2m}(\|H\|^2+\|H^*\|^2)-\frac{2\hat{\mathcal{C}}}{m}+\frac{\mathcal{C}+\mathcal{C}^*}{2\,m}$$
$$+\frac{1}{4(m+1)}(c(m-1)+3\,m+5)\ +\frac{3(c-1)}{4\,m(m+1)}\ \|P\|^2. \qquad (۱۳)$$

اکنون برای اثبات نامساوی‌های مورد نظر، بر اساس تساوی (۱۳)، به معرفی یک چند جمله‌ای درجهٔ دوم بر حسب مؤلفه‌های دومین صورت اساسی می‌پردازیم.

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.215]

$$Q=\frac{1}{m(m+1)}\left(r\hat{\mathcal{C}}+a(r)\hat{\mathcal{C}}(L)\right)-\frac{m+1}{2m}(\|H\|^2+\|H^*\|^2)+\frac{\mathcal{C}+\mathcal{C}^*}{2\,m}-\rho$$
$$+\frac{1}{4(m+1)}(c(m-1)+3\,m+5)\ \ +\frac{3(c-1)}{4\,m(m+1)}\ \|P\|^2. \qquad (۱۴)$$

در (۱۴) برای $p\in M$، L یک ابرصفحه از T_pM است. از طرفی از (۱۳) نتیجه می‌شود که

$$\frac{m+1}{2\,m}(\|H\|^2+\|H^*\|^2)+\frac{(c(m-1)+3\,m+5)}{4(m+1)}+\frac{3(c-1)}{4m(m+1)}\ \|P\|^2-\ \rho$$
$$=\ -\frac{2(m+1)}{m}\left\|\hat{H}\right\|^2+\frac{\hat{\mathcal{C}}}{m}.$$

بنابراین Q در این حالت به‌صورت (۱۵) نیز قابل بیان است.

$$Q=\frac{1}{m(m+1)}\left(r\hat{\mathcal{C}}+a(r)\hat{\mathcal{C}}(L)\right)-\frac{2(m+1)}{m}\left\|\hat{H}\right\|^2+\frac{2\hat{\mathcal{C}}}{m}. \qquad (۱۵)$$

بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم ابرصفحه L به‌وسیلهٔ $\{e_1.\dots.e_m\}$ تولید شده باشد، در این‌صورت با استفاده از تعریف انحنای کازوراتی ابرصفحه، جای‌گذاری معادل‌های $\hat{\mathcal{C}}$ و $\left\|\hat{H}\right\|^2$ در (۱۵) داریم:

$$Q=\sum_{\alpha=m+2}^{2n+1}\left[\frac{r+2m+2}{m(m+1)^2}\sum_{i,j=1}^{m+1}(\hat{h}_{ij}^{\alpha})^2+\frac{a(r)}{m^2(m+1)}\sum_{i,j=1}^{m}(\hat{h}_{ij}^{\alpha})^2-\frac{2}{m(m+1)}\left(\sum_{i=1}^{m+1}\hat{h}_{ii}^{\alpha}\right)^2\right]. \qquad (۱۶)$$

اکنون به باز کردن عبارات جمعی (۱۶) می‌پردازیم تا به‌کمک آنها یک نامساوی مناسب نتیجه بگیریم.

$$\sum_{i,j=1}^{m+1}(\hat{h}_{ij}^{\alpha})^2=\sum_{1\le i<j\le m}2(\hat{h}_{ij}^{\alpha})^2+2\sum_{i=1}^{m}(\hat{h}_{i(m+1)}^{\alpha})^2\ +\sum_{i=1}^{m}(\hat{h}_{ii}^{\alpha})^2+(\hat{h}_{(m+1)(m+1)}^{\alpha})^2.$$

$$\sum_{i,j=1}^{m}(\hat{h}_{ij}^{\alpha})^2=\sum_{1\le i<j\le m}2(\hat{h}_{ij}^{\alpha})^2+\sum_{i=1}^{m}(\hat{h}_{ii}^{\alpha})^2\,.$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m+1}\hat{h}_{ii}^{\alpha}\right)^2=\sum_{i=1}^{m}(\hat{h}_{ii}^{\alpha})^2+(\hat{h}_{(m+1)(m+1)}^{\alpha})^2+2\sum_{1\le i<j\le m}\hat{h}_{ii}^{\alpha}\,\hat{h}_{jj}^{\alpha}.$$

با جای‌گذاری این مقادیر برای Q در (۱۶) داریم:

$$Q=\sum_{\alpha=m+2}^{2n+1}\left[2\sum_{1\le i<j\le m}(\hat{h}_{ij}^{\alpha})^2+\frac{2(r+2\,m+2)}{m(m+1)^2}\sum_{i=1}^{m}(\hat{h}_{i(m+1)}^{\alpha})^2+\frac{rm+\ a(r)(m+1)}{m^2(m+1)^2}\sum_{i=1}^{m}(\hat{h}_{ii}^{\alpha})^2\right.$$
$$\left.-\frac{4}{m(m+1)}\sum_{1\le i<j\le m+1}\hat{h}_{ii}^{\alpha}\,\hat{h}_{jj}^{\alpha}+\frac{r}{m(m+1)^2}(\hat{h}_{(m+1)(m+1)}^{\alpha})^2\right]$$
$$\ge\sum_{\alpha=m+2}^{2n+1}\left[\frac{rm+\ a(r)(m+1)}{m^2(m+1)^2}\sum_{i=1}^{m}(\hat{h}_{ii}^{\alpha})^2-\frac{4}{m(m+1)}\sum_{1\le i<j\le m}\hat{h}_{ii}^{\alpha}\,\hat{h}_{jj}^{\alpha}\right.$$
$$\left.+\frac{r}{m(m+1)^2}(\hat{h}_{(m+1)(m+1)}^{\alpha})^2\right].$$

اکنون برای $\alpha\in\{m+2,\cdots,2n-1\}$، یک فرم مربعی $q_\alpha:\mathbb{R}^{m+1}\longrightarrow\mathbb{R}$ را به‌عنوان تعمیمی از عبارت سمت راست نامساوی آخر در مذکور، با ضابطهٔ (۱۷) تعریف می‌کنیم:

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.215]

$$q_\alpha\left(\hat{\mathrm{h}}_{11}^{\alpha}, \hat{\mathrm{h}}_{22}^{\alpha}, \cdots, \hat{\mathrm{h}}_{(m+1)(m+1)}^{\alpha}\right) = \frac{\mathrm{rm} + \mathrm{a(r)(m+1)}}{\mathrm{m}^2(\mathrm{m}+1)^2}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}}(\hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{ii}}^{\alpha})^2 - \frac{4}{\mathrm{m(m+1)}}\sum_{1\leq \mathrm{i}<j\leq m}\hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{ii}}^{\alpha}\hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{jj}}^{\alpha} + \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{m(m+1)}^2}(\hat{\mathrm{h}}_{(m+1)(m+1)}^{\alpha})^2. \quad (۱۷)$$

سپس مسئله اکسترمم مقید $\min q_\alpha$ را تحت قید $\mathfrak{E}: \hat{\mathrm{h}}_{11}^{\alpha} + \hat{\mathrm{h}}_{22}^{\alpha} + \cdots + \hat{\mathrm{h}}_{(m+1)(m+1)}^{\alpha} = d^{\alpha}$ و برای عدد حقیقی ثابت d^α (یعنی مجموع عناصر قطری برای هر α) را بررسی می‌کنیم. می‌دانیم برای یافتن نقاط بحرانی باید گرادیان q_α را برابر صفر قرار دهیم، بنابراین برای هر $i \in \{1, \cdots, m+1\}$ و $\alpha \in \{m+2, \cdots, 2n-1\}$، از (۱۷) دستگاه مشتقات جزئی مرتبهٔ اول زیر را داریم.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q_\alpha}{\partial \hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{ii}}^{\alpha}} = \dfrac{2(\mathrm{rm} + \mathrm{a(r)(m+1)})}{\mathrm{m}^2(\mathrm{m}+1)^2}\hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{ii}}^{\alpha} - \dfrac{4}{\mathrm{m(m+1)}}(\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}}\hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{jj}}^{\alpha} - \hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{ii}}^{\alpha}) = 0. \\ \dfrac{\partial q_\alpha}{\partial \hat{\mathrm{h}}_{(\mathrm{m}+1)(\mathrm{m}+1)}^{\alpha}} = \dfrac{2\,r}{\mathrm{m(m+1)}^2}\hat{\mathrm{h}}_{(\mathrm{m}+1)(\mathrm{m}+1)}^{\alpha} - \dfrac{4}{\mathrm{m(m+1)}}\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}}\hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{jj}}^{\alpha} = 0. \end{cases}$$

به‌سادگی ملاحظه می‌شود که جواب دستگاه بالا که در قید $\mathfrak{E}$ صدق می‌کند، برای هر $i \in \{1, \cdots, m+1\}$ و $\alpha \in \{m+2, \cdots, 2n-1\}$ بدین‌صورت است:

$$\begin{cases} \hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{ii}}^{\alpha} = \dfrac{2\mathrm{m}(\mathrm{m}+1)}{(\mathrm{r}+\mathrm{a(r)})\mathrm{m} + \mathrm{a(r)} + 2)}d^{\alpha}. \\ \hat{\mathrm{h}}_{(\mathrm{m}+1)(\mathrm{m}+1)}^{\alpha} = \dfrac{2(\mathrm{m}+1)}{r}d^{\alpha}. \end{cases}$$

فرض کنیم $p\epsilon Q$، نقطه‌ای دلخواه باشد و دو فرم $A: T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ در (۶) را برای q_α با این ضابطه در نظر می‌گیریم:

$$A(X, Y) = \mathrm{Hess}(q_\alpha)(X, Y) + < II(X, Y), \mathrm{grad}\ (q_\alpha)(p) >.$$

در حالی که II نمایش دومین فرم اساسی Q در $\mathbb{R}^{m+1}$ است و $<,>$ نمایش ضرب داخلی استاندارد در $\mathbb{R}^{m+1}$ است. حاصل محاسبه هسیان q_α با نماد $\mathrm{Hess}(q_\alpha)$ بدین‌صورت است:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{2(\mathrm{rm} + \mathrm{a(r)(m+1)})}{\mathrm{m}^2(\mathrm{m}+1)^2} & -\dfrac{4}{\mathrm{m(m+1)}} & \cdots & -\dfrac{4}{\mathrm{m(m+1)}} & -\dfrac{4}{\mathrm{m(m+1)}} \\ -\dfrac{4}{\mathrm{m(m+1)}} & \dfrac{2(\mathrm{rm} + \mathrm{a(r)(m+1)})}{\mathrm{m}^2(\mathrm{m}+1)^2} & & -\dfrac{4}{\mathrm{m(m+1)}} & -\dfrac{4}{\mathrm{m(m+1)}} \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ -\dfrac{4}{\mathrm{m(m+1)}} & -\dfrac{4}{\mathrm{m(m+1)}} & \cdots & \dfrac{2(\mathrm{rm} + \mathrm{a(r)(m+1)})}{\mathrm{m}^2(\mathrm{m}+1)^2} & -\dfrac{4}{\mathrm{m(m+1)}} \\ -\dfrac{4}{\mathrm{m(m+1)}} & -\dfrac{4}{\mathrm{m(m+1)}} & & -\dfrac{4}{\mathrm{m(m+1)}} & \dfrac{2\,r}{\mathrm{m}^2} \end{pmatrix}.$$

چون $\mathfrak{E}$، به‌عنوان یک ابرصفحه در $\mathbb{R}^{m+1}$ تماماً ژئودزی است، با فرض یک میدان برداری $X \in T_p\mathfrak{E}$ که $\sum_{i=1}^{m+1} X_i = 0$، به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} A(X,X) &= \frac{2(\mathrm{rm}+\ \mathrm{a(r)(m+1)})}{\mathrm{m}^2(\mathrm{m}+1)^2}\sum_{i=1}^{m} X_i^2 + \frac{2r}{\mathrm{m(m+1)}^2}X_{m+1}^2 - 8\sum_{i,j=1(i\neq j)}^{m+1} X_iX_j \\ &= \frac{2(\mathrm{rm}+\ \mathrm{a(r)(m+1)})}{\mathrm{m}^2(\mathrm{m}+1)^2}\sum_{i=1}^{m} X_i^2 + \frac{2r}{\mathrm{m(m+1)}^2}X_{m+1}^2 + 4\left(\sum_{i=1}^{m+1} X_i\right)^2 \\ &\quad - 8\sum_{i,j=1(i\neq j)}^{m+1} X_iX_j \\ &= \frac{2(\mathrm{rm}+\ \mathrm{a(r)(m+1)})}{\mathrm{m}^2(\mathrm{m}+1)^2}\sum_{i=1}^{m} X_i^2 + \frac{2r}{\mathrm{m(m+1)}^2}X_{m+1}^2 + 4\left(\sum_{i=1}^{m+1} X_i\right)^2 \ \geq\ 0. \end{aligned}$$

حال بنا به توضیح بعد از قضیهٔ ۱۴، از آن‌جا که ملاحظه شد A نیم-معین مثبت است، پس تنها جواب بهینه یعنی نقطه کمینه کلی مسئله، نقطهٔ بحرانی $\left(\hat{\mathrm{h}}_{11}^{\alpha}, \hat{\mathrm{h}}_{22}^{\alpha}, \cdots, \hat{\mathrm{h}}_{(m+1)(m+1)}^{\alpha}\right)$ است. به‌علاوه

$$q_\alpha\left(\hat{\mathrm{h}}_{11}^{\alpha}, \hat{\mathrm{h}}_{22}^{\alpha}, \cdots, \hat{\mathrm{h}}_{(m+1)(m+1)}^{\alpha}\right) = 0.$$

بنابراین $\mathcal{Q} \geq 0$ که برای هر ابرصفحه L از T_pM نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} \rho \leq \frac{1}{m(m+1)}\left(r\hat{\mathcal{C}} + a(r)\hat{\mathcal{C}}(L)\right) - \frac{m+1}{2m}\left(\|H\|^2 + \|H^*\|^2\right) + \frac{(\mathcal{C}+\mathcal{C}^*)}{2m} \\ + \frac{1}{4(m+1)}\left(c(m-1) + 3\,m + 5\right) \quad + \frac{3(c-1)}{4\,m(m+1)}\ \|P\|^2. \end{aligned}$$

در نتیجه با گرفتن اینفیمم و بیشینه از نامساوی بالا روی همه ابرصفحه‌های L از T_pM، به‌ترتیب نامساوی‌های (۷) و (۸) به‌دست می‌آید. اکنون حالت تساوی را در نامساوی‌های (۷) و (۸) در نظر می‌گیریم. ابتدا نقاط بحرانی

$$h^{\mathrm{c}} = \left(\hat{\mathrm{h}}_{11}^{\mathrm{m+2}}, \hat{\mathrm{h}}_{12}^{\mathrm{m+2}}, \cdots, \hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{(m+1)(m+1)}}^{\mathrm{m+2}}, \cdots, \hat{\mathrm{h}}_{11}^{\mathrm{2n+1}}, \cdots, \hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{(m+1)(m+1)}}^{\mathrm{2n+1}}\right)$$

از $\mathcal{Q}$ را به‌عنوان جواب دستگاه معادلات همگن خطی زیر را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{ii}}^{\alpha}} = 2\left[\dfrac{\mathrm{rm}+\ \mathrm{a(r)(m+1)}}{\mathrm{m}^2(\mathrm{m}+1)^2}\right]\hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{ii}}^{\alpha} - \dfrac{4}{\mathrm{m(m+1)}}\displaystyle\sum_{\mathrm{j=1,j\neq i}}^{\mathrm{m+1}} \hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{jj}}^{\alpha} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{(m+1)(m+1)}}^{\alpha}} = \dfrac{2\mathrm{r}}{\mathrm{m(m+1)}^2}\hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{(m+1)(m+1)}}^{\alpha} - \dfrac{4}{\mathrm{m(m+1)}}\displaystyle\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{m}} \hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{jj}}^{\alpha} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \hat{\mathrm{h}}_{ij}^{\alpha}} = \dfrac{4\left(\mathrm{m(r+2\,m+2)+a(r)(m+1)}\right)}{\mathrm{m}^2(\mathrm{m}+1)^2}\hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{ij}}^{\alpha} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{i(m+1)}}^{\alpha}} = \dfrac{4(r+2\,m+2)}{\mathrm{m(m+1)}^2}\displaystyle\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{m}} \hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{i(m+1)}}^{\alpha} = 0 \end{cases}$$

از این دستگاه نتیجه می‌شود $\hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{ij}}^{\alpha} = 0$ برای هر $i \in \{1, \cdots, m+1\}$ که $i \neq j$ و هر $\alpha \in \{m+2, \cdots, 2n-1\}$ و برای $i \neq m+1$، $\hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{i(m+1)}}^{\alpha} = ۰$. هم‌چنین با فرض $d^\alpha := \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{m}} \hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{jj}}^{\alpha}$، معادلهٔ اول و دوم دستگاه به‌ترتیب نتیجه می‌دهند:

$$\hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{(m+1)(m+1)}}^{\alpha} = \frac{2\mathrm{(m+1)}d^\alpha}{\mathrm{r}} \qquad \text{و} \qquad \hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{ii}}^{\alpha} = \frac{2m\mathrm{(m+1)}d^\alpha}{\mathrm{rm+\ a(r)(m+1)+2m(m+1)}}. \qquad (۱۸)$$

پس اگر قرار دهیم: $b \coloneqq \mathrm{rm} + \mathrm{a(r)(m+1)} + 2m(m+1)$، بنابراین

$$\hat{\mathrm{h}}^{\alpha}_{\mathrm{ii}} = \frac{\mathrm{rm}}{b}\hat{\mathrm{h}}^{\alpha}_{\mathrm{(m+1)(m+1)}} \cdot \tag{۱۹}$$

در نتیجه با استفاده از این جواب‌ها داریم:

$$\mathcal{Q}(h^{\mathrm{c}}) = \sum_{\alpha=m+2}^{2\mathrm{n}+1}\left(\hat{\mathrm{h}}^{\alpha}_{\mathrm{(m+1)(m+1)}}\right)^2\left[\frac{\mathrm{rm} + \mathrm{a(r)(m+1)}}{\mathrm{m}^2(\mathrm{m}+1)^2}\left(\frac{\mathrm{rm}}{b}\right)^2 - \frac{4}{\mathrm{m}+1}\left(\frac{\mathrm{rm}^2}{b} + \frac{m(m+1)}{2}\left(\frac{\mathrm{rm}}{b}\right)^2\right) + \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{m(m+1)^2}}\right] = 0.$$

بنابراین با توجه به این‌که $\mathcal{Q} \geq 0$، نتیجه می‌گیریم که نقطه بحرانی h^{c} برای $\mathcal{Q}$ یک نقطه کمینه است. بالعکس چون هر نقطه کمینه برای $\mathcal{Q}$، یک نقطه بحرانی برای آن است، باید در دستگاه بالا و بنابراین در (۱۸) و (۱۹) صدق کند. پس $\hat{\mathrm{h}}^{\alpha}_{\mathrm{ij}} = 0$ برای هر $i.j \in \{1,\cdots,m+1\}$ که $i \neq j$ و هر $\alpha \in \{m+2,\cdots,2n-1\}$ و به‌علاوه برای هر $i \neq m+1$، خواهیم داشت: $\hat{\mathrm{h}}^{\alpha}_{\mathrm{i(m+1)}} = 0$.

در نتیجه حالت تساوی در نامساوی‌های (۷) و (۸) رخ می‌دهد، اگر و فقط $h^{\alpha}_{ij} = -h^{*\alpha}_{ij}$، برای هر $i \neq j$ و هر α .
این مطلب اثبات قضیه را کامل می‌کند.

نتیجه‌ای فوری از این قضیه با توجه به تعریف انحنای عددی نرمال شده و ارتباط بین $\delta_{\mathcal{C}}(r;\mathrm{m})$، $\hat{\delta}_{\mathcal{C}}(r;\mathrm{m})$، $\delta^{*}_{\mathcal{C}}(r;\mathrm{m})$ و $\hat{\delta}^{*}_{\mathcal{C}}(\mathrm{r};\mathrm{m})$ بدین‌صورت است:

نتیجهٔ ۱۶. فرض کنیم M یک زیرمنیفلد $(m+1)$–بعدی آماری از یک منیفلد $(2n+1)$–بعدی آماری ساساکین $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{g}, \varphi, \xi)$ با φ–انحنای ثابت c باشد. آن‌گاه

الف) انحناهای δ -کازوراتی نرمال‌شده $\delta_{\mathcal{C}}(r)$ و $\delta^{*}_{\mathcal{C}}(r)$ در نامساوی زیر صدق می‌کند.

$$2\tau \leq m(m+1)\bar{\delta}_{\mathcal{C}}(m) + (m+1)\hat{\mathcal{C}} - 2(m+1)^2\left\|\hat{H}\right\|^2 + (m+1)^2\tilde{g}(H.H^*) + \frac{3(c-1)}{4}\|P\|^2 + \frac{m}{4}[c(m-1) + 3m + 5]$$

در حالی‌که $\bar{\delta}_{\mathcal{C}}(r;m)$ و $\hat{\mathcal{C}}$ به‌ترتیب به‌صورت $2\bar{\delta}_{\mathcal{C}}(r;m) = \delta_{\mathcal{C}}(r;\mathrm{m}) + \delta^{*}_{\mathcal{C}}(r;\mathrm{m})$ و $2\hat{\mathcal{C}} = \mathcal{C} + \mathcal{C}^*$ تعریف می‌شوند.

ب) انحناهای δ -کازوراتی نرمال‌شده $\hat{\delta}_{\mathcal{C}}(m)$ و $\hat{\delta}^{*}_{\mathcal{C}}(m)$ در نامساوی زیر صدق می‌کند.

$$2\tau \leq m(m+1)\hat{\delta}_{\mathcal{C}}(m) + (m+1)\bar{\hat{\mathcal{C}}} - 2(m+1)^2\left\|\hat{H}\right\|^2 + (m+1)^2\tilde{g}(H.H^*) + \frac{3(c-1)}{4}\|P\|^2 + \frac{m}{4}[c(m-1) + 3m + 5]$$

در حالی‌که $\bar{\hat{\delta}}_{\mathcal{C}}(m)$ به‌صورت $2\hat{\delta}_{\mathcal{C}}(m) = \hat{\delta}_{\mathcal{C}}(m) + \hat{\delta}^{*}_{\mathcal{C}}(m)$ تعریف می‌شود.

انحنای کازوراتی و ابررویه‌های موضعاً همگن

یادآوری می‌شود که یک التصاق روی منیفلد هموار M را آفین نامند، هرگاه نسبت به مؤلفهٔ اول $C^{\infty}(M)$– خطی باشد و نسبت به مؤلفهٔ دوم به‌طور لایبنیتزی عمل کند. بنابراین التصاق لوی-چویتا یک التصاق آفین است. هم‌چنین برای منیفلد m–بعدی M، غوطه‌وری $\varphi: M \to \mathbb{R}^{m+1}$ رایک غوطه‌وری آفین نامند هرگاه میدان برداری قائم ζ بر تصویر M، در $\mathbb{R}^{m+1}$ موجود باشد که نسبت به غوطه‌وری تراگرد باشد، یعنی برای هر $p \in M$،

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.215]

$$\mathrm{T}_{\varphi(\mathrm{P})}\mathbb{R}^{m+1} = \varphi_*\big(\mathrm{T_pM}\big) + \mathrm{Span}\{\zeta_{\varphi(\mathrm{p})}\}$$

این مطلب معادل است با این‌که برای هر دومیدان برداری مماس X و Y در یک همسایگی p فرمول گاوس را داریم که در بخش پیشنیازها به آن اشاره شد. در این بخش فرض کنیم D و ∇ به‌ترتیب نمایش مشتق همورد در $\mathbb{R}^{m+1}$ و التصاق آفین یا القایی روی M باشند و h نمادی برای دومین فرم اساسی (آفین) باشد. فرم دوخطی متقارن h را متر آفین نیز گویند. به‌علاوه در این حالت ζ را میدان برداری قائم آفین و M را یک ابررویهٔ آفین نامند. هم‌چنین با فرض S به‌عنوان عملگر شکل(آفین)، فرمول وینگارتن به‌صورت $D_X\,\zeta = -SX$ را داریم.

تعریف ۱۷. فرض کنیم (M^m, g) و $(\widetilde{\mathrm{M}}^{m+1}, \tilde{\mathrm{g}})$ منیفلدهای ریمانی به‌ترتیب با التصاق‌های لوی-چویتای ∇ و $\widetilde{\nabla}$ باشند و $f\colon (M.g) \longrightarrow (\widetilde{M}\ .\ \tilde{g})$ یک غوطه‌وری طولپا باشد. دراین‌صورت $f\colon (M.\nabla) \to (\widetilde{M}.\widetilde{\nabla})$ یک غوطه‌وری آفین به این معنا است که دارای یک میدان برداری قائم یکهٔ ζ تراگرد نسبت به غوطه‌وری با این شرط است که برای هر $p \in M$، مشتق همورد ζ در هر $X \in T_pM$، در جهت X بر M مماس است (به‌عنوان مثال به صفحهٔ ۳۷ از [۲۰] مراجعه شود).

تعریف ۱۸. یک ابررویهٔ M^m از $\mathbb{R}^{m+1}$ را موضعاً همگن گویند، هرگاه برای هر دو نقطهٔ p و q در M، یک همسایگی U_p از p در M و یک تبدیل A در حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم $SL(m+1) \ltimes \mathbb{R}^{m+1}$ موجود باشد بقسمی که $A(U_p) \subset M$ و $A(p) = q$. هم‌چنین ابررویهٔ آفین M را موضعاً به‌طور قوی محدب گویند، هرگاه متر آفین مربوط به آن معین باشد. در صورت لزوم با تغییر علامت میدان برداری قائم آفین، متر آفین معین مثبت فرض می‌شود.

برای بیان هدف این بخش با جزئیات بیش‌تر، قضیهٔ A از [۲۱] را یادآوری می‌کنیم که یک دسته‌بندی کلی برای هر عدد طبیعی m در حالت $\mathrm{rank}(S) = 1$، را بدین‌صورت ارائه می‌دهد.

قضیهٔ ۱۹. فرض کنیم M^m یک ابررویهٔ آفین، موضعاً همگن و موضعاً به‌طور قوی محدب در $\mathbb{R}^{m+1}$ با $\mathrm{rank}(S) = 1$ باشد. اگر $r+s = m-1$، $k+l = m-1$ و $(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots,\ y_s, z, w)$ نمایش مختصات در $\mathbb{R}^{m+1}$ باشد، آن‌گاه M با قسمت محدب ابررویهٔ زیر هم ارز آفین است.

$$(z - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} x_i^2)^{k+1}(w - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l} y_j^2)^{l+1} = 1.$$

ابتدا تعریف ۲۰ را بیان می‌کنیم که مطالب این بخش را با انحنای کازوراتی مربوط می‌سازد.

تعریف ۲۰. فرض کنیم M یک زیر منیفلد m بعدی هموار از منیفلد هموار n-بعدی $\widetilde{M}$ باشد، آن‌گاه M^m را تماماً شبه مرکزی (نافی) در نقطهٔ $p \in M$ گویند، هرگاه $n-m$ بردار دو به دو متعامد یکهٔ قائم ζ_1 و ... و ζ_{n-m} موجود باشد که عملگر شکل نسبت به همهٔ جهت‌های ζ_α مقدار ویژه‌ای با تکرار $m-1$ داشته باشد و راستاهای ویژهٔ متمایز برای هر ζ_α یکسان باشد. درصورتی که n برابر با $m+1$، یعنی M یک ابررویه از $\widetilde{M}$ باشد، بردار یکهٔ قائم را با ζ و مقدارهای ویژهٔ عملگر شکل برای این جهت، با تکرار $\mathrm{m}-1$ و 1 را به‌ترتیب با λ و μ نمایش می‌دهیم.

هم‌چنین در حالتی که جهت‌های ویژهٔ متناظر با مقادیر ویژهٔ با تکرار یک از ماتریس A_α برای همهٔ ζ_αها یکسان باشد، زیر منیفلد تماماً شبه مرکزی (نافی) را به‌طور پایدار شبه نافی گویند.

قضیه‌ای اثبات شده در مورد ارتباط وجود بعضی از شرایط بر انحنای کازوراتی و شبه مرکزی بودن ابررویه‌ها بدین‌صورت وجود دارد.

قضیهٔ ۲۱. ([۲۲]، قضیهٔ ۴.۱) فرض کنیم M^m یک زیرمنیفلد از یک فضا فرم حقیقی $m+p$-بعدی $\widetilde{M}^{m+p}(\tilde{c})$ با انحنای برشی ثابت $\tilde{c}$ باشد و ρ نمایش انحنای عددی نرمال شدهٔ M^m باشد. آن‌گاه $\rho = \delta_{\mathcal{C}}(m-1) + \tilde{c}$ اگر و فقط اگر M^m یک زیرمنیفلد شبه مرکزی با التصاق قائم بدیهی در $\widetilde{M}^{m+p}(\tilde{c})$ باشد.

برای بیان نتایج این بخش به بیان لمی از [۱۴] نیاز داریم.

لم ۲۲. فرض کنیم M^m یک ابررویهٔ آفین موضعاً همگن، موضعاً به‌طور قوی محدب و شبه مرکزی در $\mathbb{R}^{m+1}$ با $\mathrm{rank}(S) > 1$. در این‌صورت یک پایهٔ h-متعامد یکهٔ $\{E_1, U_1, V_1, \dots, V_r, W_1, \dots, W_s\}$ با شرط $r+s = m-2$ وجود دارد که برای اعداد ثابت a و b که $a = \frac{2b^2(r+3)}{1+s+\frac{r}{2}}$ و توابع موضعی w_{ij}^k و c_{ij}^k داریم:

$$\nabla_{U_1}E_1 = bE_1, \qquad \nabla_{E_1}U_1 = \nabla_{E_1}V_i = \nabla_{E_1}W_j = \nabla_{V_i}E_1 = \nabla_{W_j}E_1 = 0,$$

$$\nabla_{U_1}U_1 = \left(2b + \frac{a}{2b}\right)U_1, \qquad \nabla_{U_1}V_i = \frac{1}{2}\left(2b + \frac{a}{2b}\right)V_i,$$

$$\nabla_{U_1}W_j = \nabla_{W_j}U_1 = \frac{a}{2b}W_j, \qquad \nabla_{V_i}V_j = 2b\delta_{ij}U_1,$$

$$\nabla_{W_j}V_i = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k V_k, \qquad \nabla_{V_i}W_j = \sum_{k=1}^{r}(c_{ji}^k + c_{jk}^i)V_k,$$

$$\nabla_{E_1}E_1 = 2bU_1, \qquad \nabla_{V_i}U_1 = \frac{a}{2b}V_i, \qquad \nabla_{W_i}W_j = \frac{a}{2b}\delta_{ij}U_1 + \sum_{k=1}^{s} w_{ij}^k W_k.$$

با توجه به نمادهای این لم، قضایای مطرح شده در [۲۳] و قضیهٔ ۲۱ در مورد انحنای کازوراتی، نتایجی حاصل می‌شود که در ادامه بیان واثبات می‌شوند. قبل از بیان این نتایج از این‌جا تا پایان مقاله، بخاطر رعایت اختصار و عدم تکرار، در همهٔ موارد فرض می‌شود که ابررویه‌ها به‌طور طولپایی غوطه‌ور شده و موضعاً همگن هستند و به‌علاوه انحنای عددی نرمال‌شدهٔ آنها با انحنای δ- کازوراتی نرمال‌شده، مساوی است.

قضیهٔ ۲۳. فرض کنیم M^m یک ابررویه در $\mathbb{R}^{m+1}$باشد.

الف) هرگاه $rank(S) > 1$ و $\left(x, y, z, u_1, \dots, u_{m-2}\right)$ نمایش مختصات در $\mathbb{R}^{m+1}$ باشد، آن‌گاه برای حالت $r = m-2$ و $s = 0$ در لم فوق، M هم ارز آفین با قسمت محدب ابررویهٔ زیر است.

$$\left(y - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-2}\frac{u_i^2}{z}\right)^{m+1} z^m = 1.$$

ب) اگر $m = 3$ و $(x.y.z.w)$ نمایش مختصات در $\mathbb{R}^4$ باشد، آن‌گاه M هم ارز آفین با قسمتی محدب از یکی از ابررویه‌های زیر است.

1. $(y - \frac{1}{2}(x^2 + z^2))^4 w^2 = 1,$
2. $(y - \frac{1}{2}x^2)^3 (z - \frac{1}{2}w^2)^3 = 1,$
3. $(y - \frac{1}{2}x^2)^3 z^2 w^2 = 1,$
4. $(y - \frac{1}{2}x^2 - \frac{w^2}{2z})^4 z^3 = 1.$

ج) اگر $m = 4$ و (x, y, z, w, u) نمایش مختصات در $\mathbb{R}^5$ باشد، آن‌گاه M با قسمتی محدبِ یکی از ابررویه‌های زیر هم ارز آفین است.

1. $(y - \frac{1}{2}(x^2 + z^2 + u^2))^5 w^2 = 1,$

2. $(y-\frac{1}{2}(x^2+u^2))^4(z-\frac{1}{2}w^2)^3=1,$
3. $(y-\frac{1}{2}x^2)^3z^2u^2w^2=1,$
4. $(y-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}(\frac{u^2}{z}+\frac{w^2}{z}))^5z^4=1,$
5. $(y-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}\frac{w^2}{z})^4z^3u^2=1\,,$
6. $\left(y-\frac{1}{2}x^2\right)(z^2-(u^2+w^2)=1.$

اثبات: با توجه به قضیهٔ ۲۱، از تساوی انحنای عددی و انحنای کازوراتی نتیجه می‌شود M^n یک زیرمنیفلد به‌طور پایدار شبه نافی در $\mathbb{R}^{n+1}$ است.

این مطلب همراه با مفروضات قضیه، شرایط کافی برای قضیهٔ ۳٫۱ از [۲۳] را فراهم می‌سازد که منجر به اثبات قسمت الف می‌شود. هم‌چنین به‌طور پایدار شبه نافی بودن و قضیهٔ A از [۲۴]، قسمت ب را نتیجه می‌دهد. در نهایت فرض‌های موجود همراه با قضیهٔ ۳ از [۲۱] قسمت ج را اثبات می‌کند.

در این‌جا فرض می‌کنیم $n=5$، $\mathrm{rank}(S)>1$، $\{E_1,U_1,V_1,\dots,V_r,W_1,\dots,W_s\}$ با $r+s$ برابر ۳ و کنج $h-$متعامد یکهٔ موضعی روی M نیز همانند لم ۲۲ با شد. چهار حالت در نظر می‌گیریم:

الف) $r=3$، $s=0$.

ب) $r=2$، $s=1$.

ج) $r=1$، $s=2$.

د) $r=0$، $s=3$.

بنابراین یک نتیجهٔ مستقیم از قسمت الف در قضیهٔ ۲۳ بدین‌صورت است.

گزارهٔ ۲۴. فرض کنیم M^5 یک ابررویه در $\mathbb{R}^6$ باشد. هرگاه $\mathrm{rank}(S)>1$ و حالت الف رخ دهد، آن‌گاه برای مختصات (x,y,z,u,v,w) از $\mathbb{R}^6$، M هم ارز آفین با قسمت محدب ابررویهٔ زیر است.

$$(y-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}(\frac{u^2}{z}+\frac{v^2}{z}+\frac{w^2}{z}))^6z^5=1.$$

درحالت ب نیز فوراً نتیجهٔ ۲۵ از گزارهٔ ۴۰۲ از [۲۲] حاصل می‌شود.

گزارهٔ ۲۵. فرض کنیم M^5 یک ابررویه در $\mathbb{R}^6$ باشد. هرگاه $\mathrm{rank}(S)>1$ و حالت ب رخ دهد، آن‌گاه برای مختصات (x,y,z,u,v,w) از $\mathbb{R}^6$، M هم ارز آفین با قسمت محدب یکی از دو ابر رویهٔ زیر است.

1. $(y-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}(\frac{v^2}{z}+\frac{w^2}{z}))^5z^4u^2=1,$
2. $(y-\frac{x^2}{2}-\frac{u^2}{2z}-\frac{w^2}{v})^6z^3v^3=1\,.$

به‌طور مشابه، با استفاده از گزارهٔ ۴۰۳ در [۲۲]، در حالت ج نتیجهٔ ۲۶ به‌دست می‌آید.

گزارهٔ ۲۶. فرض کنیم M^5 یک ابررویه در $\mathbb{R}^6$ باشد. هرگاه $\mathrm{rank}(S)>1$ و حالت ج رخ دهد، آن‌گاه برای مختصات (x,y,z,u,v,w) از $\mathbb{R}^6$. M هم ارز آفین با قسمت محدب یکی از دو ابررویهٔ زیر است.

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.215]

$$1.\ (y-\frac{x^2}{2}-\frac{u^2}{2z})^4(v-\frac{w^2}{2z})^3z^4=1, \qquad 2.\ (y-\frac{x^2}{2}-\frac{u^2}{2z})^4z^3w^2v^2=1.$$

در نهایت برای ۵ $m=$ و حالت د، به‌کمک گزارهٔ ۴۰۴ در [۲۲]، گزارهٔ ۲۷ نتیجه می‌شود.

گزارهٔ ۲۷. فرض کنیم M^5 یک ابررویه در $\mathbb{R}^6$ باشد. هرگاه $\operatorname{rank}(S)>1$ و حالت د رخ دهد، آن‌گاه برای مختصات (x,y,z,u,v,w) از $\mathbb{R}^6$، M هم ارز آفین با قسمت محدب یکی از سه ابررویهٔ زیر است.

$$1.\ (y-\frac{1}{2}x^2)^3(z^2-(u^2+v^2+w^2))^4=1,$$
$$2.\ (y-\frac{1}{2}x^2)^3z^2u^2v^2w^2=1,$$
$$3.\ (y-\frac{1}{2}x^2)^3(u^2-(v^2+w^2))^3z^2=1.$$

جمع‌بندی گزاره‌های ۲۴ تا ۲۷ و قسمت الف قضیهٔ ۲۳ برای حالت $m=5$ منجر به بیان قضیهٔ ۲۸ می‌شود.

قضیهٔ ۲۸. فرض کنیم M^5 یک ابررویه در $\mathbb{R}^6$ و (x,y,z,u,v,w) نمایش مختصات در $\mathbb{R}^6$ باشد. آن‌گاه M هم ارز آفین با قسمت محدب یکی از ابررویه‌های زیر است.

$$1.\ (y-\frac{1}{2}(x^2+z^2+u^2+v^2))^6w^2=1,$$
$$2.\ (y-\frac{1}{2}(x^2+z^2+u^2))^5(v-\frac{1}{2}w^2)^3=1,$$
$$3.\ (y-\frac{1}{2}(x^2+z^2))^4(y-\frac{1}{2}(x^2+z^2))^4=1,$$
$$4.\ (y-\frac{1}{2}x^2)^3z^2u^2v^2w^2=1,$$
$$5.\ (y-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}(\frac{u^2}{z}+\frac{v^2}{z}+\frac{w^2}{z}))^6z^5=1,$$
$$6.\ (y-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}(\frac{v^2}{z}+\frac{w^2}{z}))^5z^4u^2=1,$$
$$7.\ (y-\frac{x^2}{2}-\frac{u^2}{2z}-\frac{w^2}{v})^6z^3v^3=1,$$
$$8.\ (y-\frac{1}{2}x^2)^3(z^2-(u^2+v^2+w^2))^4=1,$$
$$9.\ (y-\frac{x^2}{2}-\frac{u^2}{2z})^4z^3w^2v^2=1,$$
$$10.\ (y-\frac{x^2}{2}-\frac{u^2}{2z})^4(v-\frac{w^2}{2z})^3z^4=1,$$
$$11.\ (y-\frac{1}{2}x^2)^3(u^2-(v^2+w^2))^3z^2=1.$$

مطلب قابل توجه دیگری که از قضیهٔ ۱ از مرجع [۲۱] و هم ارزی شرط تساوی انحنای عددی با انحنای کازوراتی با شرط شبه نافی سره بودن حاصل می‌شود، در قضیهٔ ۲۹ بیان شده است.

قضیهٔ ۲۹. اگر M^m یک ابررویه در $\mathbb{R}^{m+1}$ باشد، آن‌گاه $\det S$ برابر با صفر است.

فرض کنیم نتایج قضایای ۱۹، ۲۱ و ۲۳ را به‌ترتیب T_1، T_2 و T_3 و نتایج گزاره‌های ۲۴ الی۲۷ را به‌ترتیب G_1،...، G_4 بنامیم. برای عدد r، $a(r)$ را همانند تعریف ۶ فرض می‌کنیم. در این صورت قضیهٔ ۳۰ حاصل می‌شود.

قضیهٔ ۳۰. اگر M^m یک ابررویه در $\mathbb{R}^{m+1}$ باشد که انحنای عددی نرمال شدهٔ M^n برای هر $p \in M^n$، یعنی ρ_p، در یکی از شرایط زیر صدق کند، آن‌گاه همهٔ نتایج T_1، T_2، T_3 و G_1 الی G_4 برای M برقرار است.

الف) اگر برای $0 < r < m(m-1)$ رابطهٔ $\rho_p = [\delta_{\mathcal{C}}(r; m-1)]_p$ صادق باشد.

ب) هرگاه برای $\mathrm{r} > m(m-1)$ رابطهٔ $\rho_p = [\hat{\delta}_{\mathcal{C}}(r; m-1)]_p$ برقرار باشد.

ج) هرگاه تساوی $\rho_p = [\delta_{\mathcal{C}}(m-1)]_p$ برقرار باشد.

اثبات. قسمت‌های الف وب هردو از قضیهٔ ۴ در [۲۰] و مراجع اشاره شده در هر مورد T_1، T_2، T_3 و G_1 الی G_4 حاصل می‌شوند. قسمت ج از قضیهٔ ۵ در [۲۰] و مراجع بیان شده، همانند الف وب حاصل می‌شوند.

نتیجه‌گیری

از یک دیدگاه ابتدایی، اشیایی پیوسته مانند منیفلدها که در مباحث پیشرفتهٔ هندسه مطرح می‌شوند، بسیار دور از مفاهیم ظاهراً گسستهٔ آمار به‌نظر می‌رسند. اما در اوایل دههٔ هشتاد میلادی، استفاده از منیفلدهای آماری برای استنتاج‌های مربوط به آمار در موضوع جدیدی به‌نام نظریه اطلاعات، پایه‌گذاری شد. در این مقاله با اثبات نامساوی‌های بهینه بین مشخصهٔ داتی انحنای عددی و مشخصهٔ بیرونی انحنای کازوراتی برای زیرمنیفلدهای آماری از منیفلدهای آماری ساساکین خاص، شناسایی زیر منیفلدهایی با کم‌ترین تنش در آنها امکان‌پذیر می‌شود. به‌علاوه یک دسته‌بندی برای ابررویه‌های فضاهای حقیقی بر اساس تساوی‌ها در این نامساوی‌های بهینه ارائه می‌شود که مقدمه‌ای برای استفاده از نرم‌افزارها برای حل مسائل در این زمینه است.

منابع

1. Blaschke W., "Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Affine Differentialgeometrie", Springer, Berlin (1923).
2. Farcot E., Gouzé. J. L., "How to control a biological switch: a mathematical framework for the control of piecewise affine models of gene networks", Research Report RR-5979.INRIA Sophia-Antipolis, (2006) 1-8.
3. Chen B. Y., "Realization of Robertson-Walker spacetimes as affine hypersurfaces", J. Phy A: Math. Theor., 40 (15) (2007) 4241-4250.
4. Amari S., "Differential-Geometrical Methods in Statistics", Lecture Notes in Statistics, Springer, Berlin, Germany, 28(1985).
5. Noguchi M., "Geometry of statistical manifolds", Differential Geometry and its Applications 3 (2) (1992) 197-222.
6. Netwon N. J, "An infinite-dimensional statistical manifold modelled on Hilbert space", Journal of Functional Analysis, 263 (6) (2012) 1661-1681.
7. Dodson C. T. J., "Geometry for stochastically in homogeneous space-times", Non linear Analysis, 47 (2001) 2951-2958.

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.215]

8. Noda T., "Symplectic structures on statistical manifolds", J. Aust. Math. Soc. 90 (2011) 371-384.

9. Furuhata H., Hesegawa I., Okuyama Y., Sato K., Shahid M. H., "Sasakian statistical manifolds", Journal of Geometry and Physics, 117, (2017) 179-186.

10. Furuhata H., Hesegawa I., Okuyama Y., Sato K., "Kenmotsu Statistical manifolds and warped product", Journal of Geometry, 108 (3) (2017) 1175-1191.

11. Furuhata H., "Hypersurfaces in statistical manifolds", Differential Geometry and its Applications, 27 (3) (2009) 420-429.

12. Decu S., Haesen S., Verstraelen L., Vilcu G. E., "Curvature invariants of statistical submanifolds in Kenmotsu statistical manifolds of ϕ-sectional curvature", Entropy, 20 (529) (2018) 1-15.

13. Casorati F., "Nuova de_nizione della curvatura delle super_cie e suo confront con quella di Gauss (New definition of the curvature of the surface and its comparison with that of Gauss)", Rend. Inst. Matem. Accad. Lomb, Series II, 22 (8) (1889) 335-346.

14. Decu S., Haesen S., Verstraelen L., "Optimal inequalities characterising quasi umbilical submanifolds", J. Inequal. Pure. Appl. Math**.,** 9 (2008) 1-7.

15. Verstraelen L., "Geometry of submanifolds I, The first Casorati curvature Indicatrices", Kragujev, J. Math., 37 (1) (2013) 5-23. MR3073694.

16. Kowalczyk D., "Casorati curvatures", Bull, Transilvania Univ., Brasov Ser. III, 1 (50) (2008) 2009-2013. MR2478021 (2009k:53149).

17. Lee J. W., Lee C. W., Yoon D. W., "Inequalities for generalized δ-Casorati curvatures of submanifolds in real space forms endowed with a semi-symmetric metric connection", Revista Dela union Matem atica Argentin*a,* 57(2), (2016) 53-62.

18. Furuhata H., Hasegawa I., "Submanifold theory in holomorphic statistical manifolds", in: S. Dragomir, M. H. Shahid, F. R. Al-Solamy (Eds.), Geometry of Cauchy-Riemann Submanifolds, Springer, 39 (2016) 179-215.

19. Oprea T., "Constrained Extremum Problems in Riemannian Geometry", University of Bucharest Publishing House, Bucharest, Romania, (2006).

20. Tripathii M. M., "Inequalities for algebraic Casorati curvatures and their applications", Note di Matematica, 37 (suppl. 1) (2017) 161-186.

21. Dillen F., Vrancken L., "Quasi-umbilical.locally strongly convex homogeneous affine hypersurfaces", J. Math. Soc. Jpn., 46 (1994) 477-502.

22. Zhang P., Zhang L., "Inequalities for Casorati curvatures of submanifolds in real space forms", Advances in Geometry, 16(3) (2016) 329-335.
23. Hu Z., Li C., Zhang C., "On quasi-umbilical locally strongly convex homogeneous affine hypersurfaces", Differ. Geom. Appl., 33 (2014) 46-74.
24. Oguri M., "The classification of 3-dimensional quasi-umbilical locally homogeneous Blaschke hypersurfaces", Differential Geometry and its Applications, 25 (2007) 56-77.

[DOI: 10.52547/mmr.7.2.215]