پایهٔ مرزی ایده‌آل نقاط و کاربرد آن در مسئلهٔ طرح آزمایش‌ها و رگرسیون

سمیرا پورخواجویی، ساره گلی، امیر هاشمی*
دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکدهٔ علوم ریاضی

دریافت ۹۷/۰۸/۲۷ پذیرش ۹۷/۱۲/۱۱

چکیده

موضوع اصلی این مقاله، بررسی پایهٔ مرزی برای یک ایده‌آل نقاط است. برای این منظور ابتدا الگوریتمی برای محاسبهٔ ایده‌آل مرتب و پایهٔ مرزی نظیر آن برای یک ایده‌آل نقاط (که دارای چندگانگی هستند) می‌پردازیم. ایده‌آل نقاط از کاربردهای مختلفی در علوم و مهندسی برخوردار است که در این مقاله ما به کاربرد آن در یافتن مدل آماری بهینه اشاره می‌کنیم. در پایان، پس از بیان مطالب مورد نیاز، با استفاده از روش‌های ارائه شده در این مقاله، به محاسبهٔ مدل‌های مختلف برای مثالی بر مبنای داده‌های واقعی و توضیح کارآیی مدل‌های ارائه شده می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: پایهٔ مرزی، ایده‌آل نقاط، الگوریتم بوخبرگر-مولر، طرح آزمایش‌ها، رگرسیون
رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 13P10، 14Q99 ، 68W30.

مقدمه

بسیاری از مسائلی که در موضوعات مختلف علمی مطرح می‌شوند، می‌توانند به‌وسیلهٔ ایده‌آل‌های چندجمله‌ای مدل شوند که این امر بررسی ایده‌آل‌های چندجمله‌ای را به موضوعی بسیار مهم در ریاضیات تبدیل کرده است. پایهٔ گربنر همواره به‌عنوان یکی از ابزارهای محاسباتی قوی برای بررسی ایده‌آل‌های چندجمله‌ای مطرح بوده است. امروزه، ایده‌های اصلی پایهٔ گربنر در بسیاری از زمینه‌های دیگر مانند مدول‌ها، حلقه‌های موضعی، جبرهای لی، جبرهای دیفرانسیلی و در برخی ساختارهای جبری دیگر توسیع یافته است. بوخبرگر اولین بار در سال ۱۹۶۵ برای محاسبهٔ پایهٔ گربنر، الگوریتم بوخبرگر را در رسالهٔ دکترایش در [۴] ارائه داد. او در رسالهٔ خود محکی به نام محک بوخبرگر را معرفی کرد که نقش اساسی در ساختار این الگوریتم دارد. هم‌چنین در سال ۱۹۷۹ با ارائهٔ دو محک مناسب توانست الگوریتم خود را قوی‌تر و از لحاظ اجرائی سریع‌تر کند [۳]. پس از بوخبرگر دانشمندانی از جمله لازارد، مولر، مورا و تراورسو به تحقیق در این زمینه پرداختند و الگوریتم بوخبرگر را بهبود دادند [۱۷]، [۲۰]. فوژر با استفاده از ارتباط پایهٔ گربنر و جبرخطی در سال ۱۹۹۹ الگوریتم F_4 را طراحی کرد [۸] و در سال ۲۰۰۲ الگوریتم افزایشی F_5 (که سریع‌ترین الگوریتم موجود برای محاسبهٔ پایهٔ گربنر است) را ارائه داد [۹]. از مهم‌ترین کاربردهای پایهٔ گربنر می‌توان به مسئلهٔ عضویت در ایده‌آل و حل و آنالیز دستگاه‌های چندجمله‌ای اشاره کرد. حل و تحلیل دستگاه‌های چندجمله‌ای از موضوعات مطرح در هندسه جبری است. بنابراین آنالیز و طراحی الگوریتم هایی برای حل دستگاه‌های چندجمله‌ای

*نویسنده مسئول amir.hashemi@cc.iut.ac.ir

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-02-14]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.14.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.549]

همواره مورد توجه ریاضیدانان بوده است. هر چند پایهٔ گربنر نقش مهمی در حل دستگاه‌های چندجمله‌ای دارد اما به‌دلیل برخی ضعف‌هایی که دارد، در همهٔ موارد کارآیی لازم را ندارد. برای مثال برخی از ایده‌آل‌هایی که در عمل با آنها سر و کار داریم، دارای ضرایب اعشاری هستند. پایهٔ گربنر ابزار مناسبی برای بررسی این ایده‌آل‌ها نیست و پایداری لازم برای حل مسائل مربوط را ندارد. در نتیجه مفهوم جدیدی به نام پایهٔ مرزی معرفی شد که در برخی موارد بهتر از پایهٔ گربنر رفتار می‌کند. این پایه خواصی شبیه به پایهٔ گربنر دارد و یک ویژگی بارز آن داشتن پایداری بهتر نسبت به پایهٔ گربنر است. بررسی چالش‌های نظری و محاسباتی پایه‌های مرزی موضوعی است که در دو دههٔ اخیر مورد توجه قرار گرفته است. مفهوم پایهٔ مرزی برای ایده‌آل‌های چندجمله‌ای (صفر و غیر صفر بعدی) به شیوه‌های مختلف بررسی و توسیع یافته است [۱۲]، [۱۳]، [۱۴]، [۱۶]، [۱۸]، [۲۲]، [۲۳]، [۲۴]، [۲۵]، [۲۸]. بررسی کارآمدی الگوریتم‌های محاسبهٔ پایهٔ مرزی، موضوعی است که تا به حال به‌صورت جدی به آن پرداخته نشده است. البته اکثر پژوهش‌هایی که در زمینهٔ پایه‌های مرزی انجام شده است محدود به ایده‌آل‌های با بعد صفر بوده است. مورن و تربوشه [۲۶]، تلاش کردند تا با استفاده از مفهوم H-پایه که به‌وسیلهٔ مکالی [۲۱] معرفی شد و اعمال محدودیت‌های خاص و معرفی مفهومی تحت عنوان شبه- ایده‌آل مرتب، روش جدیدی برای محاسبهٔ پایهٔ مرزی ایده‌آل‌های با بعد مثبت ارائه دهند. هم‌چنین چن و منگ نیز در ارتباط با محاسبهٔ پایهٔ مرزی ایده‌آل‌های با بعد مثبت از تعمیم محک بوخبرگر استفاده کردند[۲۸].

فار و گائو (۲۰۰۶) الگوریتمی افزایشی برای محاسبهٔ پایهٔ گربنر ایده‌آل نقاط مطرح کردند اما این الگوریتم بر خلاف الگوریتم بوخبرگر- مولر برای محاسبهٔ ایده‌آل نقاط یک مجموعه با تعداد زیادی نقطه مؤثر و کارآمد نیست [۷]. کروتزر و پولیس (۲۰۱۱) نسخهٔ دیگری از الگوریتم بوخبرگر- مولر ارائه دادند که به محاسبهٔ پایهٔ مرزی برای ایده‌آل نقاط می‌پردازد [۱۵]. از آن‌جا که ساختار این الگوریتم وابسته به یک ترتیب تک‌جمله‌ای است، بسیاری از ایده‌آل‌های مرتب نظیر به یک مجموعه از نقاط از این روش قابل محاسبه نیستند. کاسپار (۲۰۱۳) روشی را ارائه داد که پایهٔ مرزی یک ایده‌آل را بدون استفاده از ترتیب تک‌جمله‌ای تعریف می‌کند [۱۲]. بران و پکوتا (۲۰۰۹) توانستند الگوریتمی برای محاسبهٔ همهٔ ایده‌آل‌های مرتب پیشنهاد دهند [۲]. یکی از کاربردهای ایده‌آل‌های نقاط در یافتن مدل‌های آماری بهینه برای داده‌های واقعی است که از کاربردهای عملی نیز برخوردار است. برای اولین بار پیستونه و وین این ارتباط را بررسی کردند [۲۷]. سپس گیلیو، ریکومگنو و وین با استفاده از ابزار پایهٔ گربنر توانستند روشی برای یافتن مدل‌های آماری در زمینه‌های طرح آزمایش‌ها و رگرسیون ارائه کنند[۱۰]. با توجه به این‌که ساختار پایهٔ گربنر وابسته به‌ترتیب تک‌جمله‌ای است، استخراج تمامی مدل‌های بهینه امکان‌پذیر نیست. از ای‌رو در این مقاله با استفاده از پایه‌های مرزی که پایداری زیاد و ساختاری مستقل از ترتیب تک‌جمله‌ای دارند، به همهٔ مدل‌های بهینه دست می‌یابیم.

ساختار این مقاله به این صورت است که در بخش دوم مفهوم پایهٔ گربنر و پایهٔ گربنر ایده‌آل نقاط را معرفی و الگوریتم‌های محاسبهٔ آن را بیان می‌کنیم. در بخش سوم پس از بیان مقدمات لازم و تعریف ایده‌آل مرتب مفهوم پایهٔ مرزی برای ایده‌آل‌های چندجمله‌ای و ایده‌آل نقاط نظیر به مجموعه‌ای از نقاط را معرفی می‌کنیم. در بخش چهارم تعریف مربوط به ایده‌آل نقاط برای مجموعهٔ نقاط با چندگانگی را بیان و سپس الگوریتمی جدید برای محاسبهٔ آن ارائه می‌دهیم. در پایان نیز به کاربرد ایده‌آل نقاط در مسئلهٔ طرح آزمایش‌ها می‌پردازیم.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-02-14]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.14.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.549]

پایهٔ گربنر ایده‌آل نقاط

در ادامه به بیان برخی از مقدمات و مفاهیم لازم برای معرفی پایهٔ گربنر می‌پردازیم. برای توضیحات بیش‌تر مرجع [۶] را ببینید.

تعریف ۱. فرض کنیم $\prec$ یک ترتیب کلی روی $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{n}$ باشد. $\prec$ را ترتیب تک‌جمله‌ای گوییم هرگاه به‌ازای هر $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n}$

۱. اگر $\alpha \prec \beta$ آن‌گاه، $\alpha + \gamma \prec \beta + \gamma$

۲. به‌ازای هر $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n}$ داشته باشیم $(0, \cdots, 0) \preccurlyeq \alpha$.

مثال ۲. (ترتیب الفبایی) فرض کنیم $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n}$ گوییم $\alpha \prec_{lex} \beta$ هرگاه اولین مؤلفه ناصفر از سمت چپ $\beta - \alpha$ مثبت باشد.

برای مثال داریم $x_2x_3 \prec_{lex} x_1x_3$ زیرا $(0,1,1) \prec_{lex} (1,0,1)$.

با توجه به تناظر یک‌به‌یک بین اعضای $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{n}$ و تک‌جمله‌ای‌های بر حسب $x_1, \cdots, x_n$ می‌توان یک ترتیب تک‌جمله‌ای را برای مقایسهٔ تک‌جمله‌ای‌ها نیز به‌کار برد.

تعریف ۳. فرض کنیم $\prec$ یک ترتیب تک‌جمله‌ای روی حلقهٔ چندجمله‌ای‌های $\mathcal{R} = \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ بر حسب $x_1, \cdots, x_n$ با ضرایب در میدان $\mathbb{K}$ باشد. چندجمله‌ای

$$f = a_\alpha x^\alpha + \cdots + a_\gamma x^\gamma$$

که در آن $x^\gamma \prec \cdots \prec x^\alpha$ و $a_\alpha \neq 0$ در نظر می‌گیریم. دراین‌صورت تک‌جمله‌ای پیش‌رو، ضریب پیش‌رو و جملهٔ پیش‌رو f را، به‌ترتیب، به‌صورت x^α و a_α و $a_\alpha x^\alpha$ تعریف می‌کنیم و با نمادهای $LM(f)$ ، $LC(f)$ و $LT(f)$ نشان می‌دهیم. باید دقت شود که در حلقه چندجمله‌ای‌های n متغیره، تک‌جمله‌ای پیش‌رو، ضریب پیش‌رو و جملهٔ پیش‌رو بستگی به‌ترتیب تک‌جمله‌ای تعریف شده روی حلقه دارند. اگر $\mathcal{I} \subset \mathcal{R}$ یک ایده‌آل باشد، ایده‌آل جمله پیشروی $\mathcal{I}$ را به‌صورت $LT(\mathcal{I}) = \langle LT(f) | f \in \mathcal{I} \rangle$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴. فرض کنیم $\prec$ یک ترتیب تک‌جمله‌ای روی $\mathcal{R}$ و $(f_1, \cdots, f_m)$ یک دنباله در $\mathcal{R}$ باشد. در این‌صورت برای هر $f \in \mathcal{R}$ ، m-تایی $(h_1, \cdots, h_m) \in \mathcal{R}^m$ و $r \in \mathcal{R}$ موجود است به‌طوری‌که

$$f = h_1 f_1 + \cdots + h_m f_m + r$$

و $r = 0$ یا هیچ جمله‌ای از r به‌وسیلهٔ هیچ عضوی از $\{LT(f_1), \dots, LT(f_m)\}$ عاد نمی‌شود.

تعریف ۵. فرض کنیم $\prec$ یک ترتیب تک‌جمله‌ای روی $\mathcal{R}$ و $\mathcal{I}$ ایده‌آلی در آن باشد. مجموعهٔ متناهی $G = \{g_1, \dots, g_k\} \subset \mathcal{I}$ را یک پایهٔ گربنر $\mathcal{I}$ نسبت به $\prec$ می‌نامیم هرگاه

$$LT(\mathcal{I}) = \langle LT(g_1), \dots, LT(g_k) \rangle.$$

تعریف ۶. فرض کنیم مجموعهٔ G یک پایهٔ گربنر برای ایده‌آل $\mathcal{I}$ نسبت به‌ترتیب تک‌جمله‌ای $\prec$ باشد. G را یک پایهٔ گربنر کاهش یافته نسبت به $\prec$ گوییم، هرگاه

۱. هیچ عضو G قابل تقسیم به سایر اعضای G نباشد.

۲. ضریب پیش‌روی تمام اعضای G برابر یک باشد.

مثال ۷. فرض کنیم $\mathcal{R} = \mathbb{R}[x, y, z, w]$، $f_1 = 3x - 6y - 2z$، $f_2 = 2x - 4y + 4w$، $f_3 = x - 2y - z - w$ و $x \succ_{lex} y \succ_{lex} z \succ_{lex} w$ یک ترتیب تک‌جمله‌ای روی $\mathcal{R}$ باشد. با محاسبهٔ $f_4 = 1/2(f_2 - 2f_3) = z + 3w$، مجموعهٔ $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ یک پایهٔ گربنر برای ایده‌آل $\langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ است. با توجه

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-02-14]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.14.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.549]

به این‌که $LT(f_1)$ و $LT(f_2)$ به‌وسیلهٔ $LT(f_3)$ عاد می‌شوند، می‌توان f_1 و f_2 را از پایهٔ گربنر حذف کرد. از طرفی $LT(f_4)$ یک جمله از f_3 را عاد می‌کند. پس اگر قرار دهیم $f_5 = 1/2(f_2) = x - 2y + 2w$ آن‌گاه $\{f_4, f_5\}$ یک پایهٔ گربنر کاهش یافتهٔ ایده‌آل $\langle f_1, f_2, f_3\rangle$ است.

یکی از کاربردهای پایهٔ گربنر محاسبهٔ یک پایه برای فضای خارج قسمتی است. برای این منظور ابتدا تعریف فضای خارج قسمتی را بیان می‌کنیم.

تعریف ۸. فرض کنیم $\mathcal{J} \subset \mathcal{R}$ یک ایده‌آل باشد. فضای خارج قسمتی $\mathcal{R}$ بر $\mathcal{J}$ را با نماد $\mathcal{R}/\mathcal{J}$ نمایش می‌دهیم و بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{R}/\mathcal{J} = \{f + \mathcal{J} | f \in \mathcal{R}\}.$$

لازم به ذکر است که منظور از $\bar{f} = f + \mathcal{J}$ مجموعهٔ $\{f + g | g \in \mathcal{J}\}$ است. فضای خارج قسمتی $\mathcal{R}/\mathcal{J}$ را می‌توان به‌عنوان یک $\mathbb{K}$-فضای برداری در نظر گرفت.

قضیهٔ ۹. (قضیهٔ مکالی) فرض کنیم $\mathcal{J} \trianglelefteq \mathcal{R}$ و $\prec$ یک ترتیب تک‌جمله‌ای روی $\mathcal{R}$ باشد. هم‌چنین فرض کنیم G یک پایهٔ گربنر برای $\mathcal{J}$ نسبت به $\prec$ باشد. در این‌صورت، مجموعهٔ

$$U = \left\{u + \mathcal{J} \middle| \text{یک تک‌جمله‌ای است } u \text{ و } \nexists g \in G \text{ که } LT(g)|u\right\},$$

یک پایه برای فضای خارج قسمتی $\mathcal{R}/\mathcal{J}$ به‌عنوان یک $\mathbb{K}$- فضای برداری است.

یکی از مفاهیم مرتبط با پایهٔ گربنر که مورد نظر در این مقاله است مفهوم ایده‌آل نقاط است، که کاربرد و اهمیت زیادی در علوم و مهندسی دارد. از کاربردهای آن می‌توان به حل مسئلهٔ محاسبهٔ یک سیستم دینامیکی چندجمله‌ای در بسیاری از زمینه‌ها (از جمله در شبکه‌های منظم ژنی، اکولوژی، اقتصاد، فیزیولوژی، شیمی، علوم جو زمین و غیره) کاربردی هستند [۱]. اگر این سیستم‌ها را با n متغیر $x_i \in \mathbb{C}$ و دینامیک نظیر به هر کدام را به‌وسیلهٔ چندجمله‌ای چند متغیره $f_i(x) \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ مشخص کنیم، آن‌گاه ریشه‌های این سیستم چندجمله‌ای نقاط ثابت سیستم دینامیکی موردنظر هستند. در مهندسی الکترونیک این نقاط به نام نقاط عامل DC شناخته شده‌اند. به‌منظور تشخیص وجود چنین سیستم‌های چندجمله‌ای مربعی برای یک مجموعه از نقاط داده شده، کافی است به محاسبهٔ ایده‌آل نقاط نظیر به آنها بپردازیم. با این مقدمهٔ کوتاه از نقش پر اهمیت ایده‌آل‌های نقاط در علوم و مهندسی، در ادامه به بیان تعریف آنها می‌پردازیم.

تعریف ۱۰. فرض کنیم $X \subset \mathbb{K}^n$ یک مجموعهٔ متناهی از نقاط متمایز باشد. در این‌صورت برای این مجموعه ایده‌آل صفرساز X را با نماد $I(X)$ نمایش می‌دهیم و بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$I(X) = \{f \in \mathcal{R} | f(p) = 0 \quad \forall p \in X\}$$

ایده‌آل صفرساز $I(X) \subseteq \mathcal{R}$ را یک ایده‌آل نقاط نیز می‌نامیم.

با توجه به این‌که خواص هندسی مجموعهٔ X ، با خواص جبری حلقهٔ $\mathcal{R}/I(X)$ مرتبط هستند بررسی $I(X)$ اهمیت ویژه‌ای دارد. با استفاده از پایهٔ گربنر و محاسبهٔ اشتراک ایده‌آل‌ها می‌توان یک مجموعهٔ مولد برای یک ایده‌آل نقاط یافت اما این روش برای مجموعه‌های با تعداد زیادی نقطه مؤثر نیست. بوخبرگر و مولر (۱۹۸۲) الگوریتمی برای محاسبهٔ پایهٔ گربنر کاهش یافتهٔ ایده‌آل نقاط ارائه دادند[۱۹] (برای جزئیات بیش‌تر [۱۶] را ببینید) که در ادامه این الگوریتم را با تغییرات جزئی (استفاده از پایهٔ گربنر به جای انجام عملیات سطری مقدماتی) به‌منظور نمایش ساده‌تر و

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-02-14]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.14.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.549]

کارآیی بهتر ارائه می‌کنیم. در الگوریتم زیر اگر f یک چندجمله‌ای، G یک پایهٔ گربنر و $\prec$ یک ترتیب تک‌جمله‌ای باشد در این‌صورت $\mathrm{NormalForm}(f, G, \prec)$ باقی‌ماندهٔ تقسیم f بر G را محاسبه می‌کند.

Algorithm 1 Buchberger − Möller

Input: $X = \{P_1, \dots, P_s\} \subset \mathbb{K}^n$, **a monomial ordering** $\prec$
Output: **The reduced Gröbner basis** G **of** $I(X)$ **and basis** Q **for** $\mathcal{R}/I(X)$
$G := \{\}$; $Q = \{\}$; $M := [\,]$; $S := [\,]$; $L := \{1\}$;
While $L \neq \emptyset$ **do**
  Select and remove $t := min_{\prec}(L)$ **from** L
  $f, q :=$ **NormalForm** $(\sum_{i=1}^{s} t(p_i)\, y_i, M, \prec_{lex})$
  if $f = 0$ **then**
    $G := G \cup \{t - \sum_{i=1}^{m} q_i s_i\}$ **where** S=$[s_1, \dots, s_m]$ **and** $q = [q_1, \dots, q_m]$
    Remove from L **the monomials which are multiples of** t
  else
   Add f **to** M
   Add $t - \sum_{i=1}^{m} q_i s_i$ **to** S **where** $S = [s_1, \dots, s_m]$ **and** $q = [q_1, \dots, q_m]$
   $Q := Q \cup \{t\}$
   Add to L those elements of $\{x_1 t, \dots, x_n t\}$ **which are not multiples of an element in** $LT_{\prec}(G) \cup L$
  end if
end While
return (G, Q)

لازم به ذکر است که اثبات درستی و پایان‌پذیری این الگوریتم در [۱۶] بررسی شده است و با تغییرات ایجاد شده اثبات درستی و پایان‌پذیری تفاوت زیادی نخواهد کرد.

مثال ۱۱. فرض کنیم $X = \{(0,0), (0,-1), (1,0), (1,1), (-1,1)\}$ یک مجموعه نقاط و $\prec$ ترتیب تک‌جمله‌ای الفبایی مدرج باشد. در این‌صورت با استفاده از الگوریتم بالا پایهٔ گربنر

$$\{x^2 + xy - 1/2y^2 - x - 1/2y\,, y^3 - y, xy^2 - xy\},$$

برای $I(X)$ محاسبه می‌شود.

قابل توجه است که اجرای این الگوریتم در مقایسه با تابع متناظر آن در نرم‌افزار میپل، یعنی VanishingIdeal زمان محاسبات را به میزان چشم‌گیری بهبود داد (جدول ۱). این مقایسه برای مجموعه نقاطی که کاملاً به‌صورت تصادفی انتخاب شده‌اند، انجام شده است. در محاسبات انجام شده، زمان و حافظه مصرفی به‌ترتیب در مقیاس ثانیه و مگابایت است. هم‌چنین ترتیب الفبایی مدرج یا dlex، ترتیبی تک‌جمله‌ای است که برای مقایسهٔ تک‌جمله‌ای‌ها به‌کار می‌رود به این‌صورت که تک‌جمله‌ای با درجهٔ بیش‌تر بزرگ‌تر است و در صورت تساوی درجه‌ها، ترتیب تک‌جمله‌ای الفبایی روی تک‌جمله‌ای‌ها اعمال می‌شود. به‌علاوه ترتیب الفبایی معکوس مدرج یا drl، ترتیبی تک‌جمله‌ای است که برای مقایسهٔ تک‌جمله‌ای‌ها به‌کار می‌رود به این‌صورت که تک‌جمله‌ای با درجهٔ بیش‌تر بزرگ‌تر است و در صورت تساوی درجه‌ها، با استفاده از ترتیب تک‌جمله‌ای الفبایی معکوس مقایسه می‌شوند.

شایان ذکر است که الگوریتم‌هایی که در این مقاله توصیف می‌شوند در نرم افزار میپل پیاده‌سازی شده‌اند و در صفحهٔ https://amirhashemi.iut.ac.ir قابل دسترس هستند.

جدول ۱. مقایسهٔ الگوریتم‌های Buchnerger-Moller و VanishingIdeal

$\#X = 80 \subset \mathbb{Q}^{10}$	order	time	memory
VanishingIdeal	dlex	220.77	46972.55
Buchberger-Möller	dlex	110.86	11084.75
$\#X = 100 \subset \mathbb{Q}^{20}$	order	time	memory
VanishingIdeal	dlex	2023.78	331846.36
Buchberger-Möller	dlex	506.72	49632.27

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-02-14]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.14.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.549]

$\#X = 200 \subset \mathbb{Q}^8$	order	time	memory
VanishingIdeal	lex	7.11	135.58
Buchberger-Möller	lex	25.77	448.23

$\#X = 60 \subset \mathbb{Q}^8$	order	time	memory
VanishingIdeal	drl	46.97	884.77
Buchberger-Möller	drl	25.74	286.18

$\#X = 300 \subset \mathbb{Q}^3$	order	time	memory
VanishingIdeal	lex	11.57	1210.14
Buchberger-Möller	lex	187.13	14598.90

$\#X = 100 \subset \mathbb{Q}^5$	order	time	memory
VanishingIdeal	dlex	127.82	2818.01
Buchberger-Möller	dlex	69.59	1001.34

$\#X = 100 \subset \mathbb{Q}^4$	order	time	memory
VanishingIdeal	drl	211.42	3324.34
Buchberger-Möller	drl	109.71	1232.48

$\#X = 80 \subset \mathbb{Q}^{10}$	order	time	memory
VanishingIdeal	Dlex	223.26	5897.19
Buchberger-Möller	Dlex	101.63	1382.39

چنان‌که در مقدمه اشاره شد فار و گائو (۲۰۰۶) الگوریتمی افزایشی برای محاسبهٔ پایهٔ گربنر ایده‌آل نقاط مطرح کردند [۷]. در حالتی که الگوریتم به‌عنوان ورودی یک مجموعه از نقاط متمایز را دریافت می‌کند، می‌توان گفت این الگوریتم تعمیم طبیعی درون‌یابی نیوتن برای چندجمله‌ای‌های تک‌متغیره است. در ادامه شبه کد این الگوریتم آورده می‌شود، برای توضیحات بیش‌تر به مقالهٔ اصلی مراجعه شود.

Algorithm 2 Farr − Gao

Input: $X = \{P_1, \dots, P_s\} \subset \mathbb{K}^n$ **Where** $P_i = (p_{i1}, \dots, p_{in}) \in \mathbb{K}^n$ **and a monomial ordering** $\prec$
Output: **The reduced Gröbner basis for** $I(X)$ **W.r.t** $\prec$
$G := \{1\}$
for k **from 1 to** s **do**
  Find the smallest i **so that** $g_i(P_k) \neq 0$
  for j **from** $i+1$ **to** $|G|$ **do**
    $g_i := g_j - g_j(P_k)/g_i(P_k) \,.\, g_i$
  end for
  $G := G \backslash \{g_j\}$
  for j **from 1 to** m **do**
    if $x_j \,.\, LT(g_i)$ **not divisible by any** LT **of** G **then**
      $h := \mathrm{NormalForm}\,((x_j - p_{kj}) \,.\, g_i, G)$
      $G := G \cup \{h\}$
    end if
  end for
end for
return (G)

پایهٔ مرزی ایده‌آل نقاط

چنان‌که در مقدمه اشاره کردیم پایهٔ مرزی توسیعی از پایهٔ گربنر است که در برخی موارد از کارآیی بهتری نسبت به پایهٔ گربنر برخوردار است. در ادامه به‌طور مختصر به معرفی این پایه می‌پردازیم.

تعریف ۱۲. فرض کنیم $\mathbb{T}^n$ مجموعهٔ تمام تک‌جمله‌ای‌های $\mathcal{R}$ باشد. هم‌چنین فرض کنیم $\mathcal{O} \subset \mathbb{T}^n$ یک زیرمجموعهٔ متناهی و غیر تهی باشد. مجموعهٔ همهٔ تک‌جمله‌ای‌های عضو $\mathbb{T}^n$ که یکی از عضوهای مجموعهٔ $\mathcal{O}$ را عاد کنند، را بستار $\mathcal{O}$ گوییم و با نماد $\overline{\mathcal{O}}$ نمایش می‌دهیم. مجموعهٔ $\mathcal{O}$ را یک ایده‌آل مرتب نامیم هر گاه $\mathcal{O} = \overline{\mathcal{O}}$.

تعریف ۱۳. فرض کنیم $\mathcal{O} \subset \mathbb{T}^n$ یک ایده‌آل مرتب باشد. مجموعهٔ

$$\partial\mathcal{O} = \mathbb{T}_1^n . \mathcal{O} \setminus \mathcal{O} = (x_1\mathcal{O} \cup \dots \cup x_n\mathcal{O}) \backslash \mathcal{O}$$

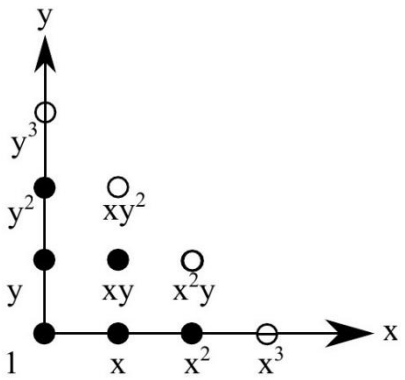
[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-02-14]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.14.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.549]

را مرز $\mathcal{O}$ می‌نامیم (منظور از $\mathbb{T}_1^n$ مجموعهٔ تک‌جمله‌ای‌های درجه یک در $\mathbb{T}^n$ است).

مثال ۱۴. فرض کنیم $\mathcal{O} = \{1, x, y, xy, x^2, y^2\} \subset \mathbb{T}^2$ یک ایده‌آل مرتب و مرز متناظر با این ایده‌آل مرتب بدین‌صورت باشد:

$$\partial\mathcal{O} = \{\mathrm{x}^3, \mathrm{x}^2\mathrm{y}, \mathrm{xy}^2, \mathrm{y}^3\}$$

در شکل ۱ این ایده‌آل مرتب با دایره توپر و مرز آن با دایره نمایش داده شده است.



تعریف ۱۵. فرض کنیم $\mathcal{O} = \{t_1, \dots, t_\mu\}$ یک ایده‌آل مرتب و $\partial\mathcal{O} = \{b_1, \dots, b_\nu\}$ مرز آن باشد. در این صورت برای $1 \le i \le \mu$ و $1 \le j \le \nu$ قرار می‌دهیم $g_j = b_j - \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_{ij} t_i$ که $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$. مجموعهٔ $\mathrm{G} = \{g_1, \dots, g_\nu\}$ را یک $\mathcal{O}$-پیش پایهٔ مرزی گوییم.

تعریف ۱۶. فرض کنیم $\mathcal{O} = \{t_1, \dots, t_\mu\}$ یک ایده‌آل مرتب باشد. هم‌چنین فرض کنیم $\mathrm{G} = \{g_1, \dots, g_\nu\}$ یک $\mathcal{O}$-پیش‌پایهٔ مرزی و $\mathcal{I} \subset \mathcal{R}$ یک ایده‌آل شامل G باشد. مجموعهٔ G را یک $\mathcal{O}$- پایهٔ مرزی برای ایده‌آل $\mathcal{I}$ می‌نامیم هرگاه کلاس‌های باقی‌ماندهٔ $\overline{\mathcal{O}} = \{\overline{t_1}, \dots, \overline{t_\mu}\}$ یک پایه برای $\mathbb{K}$- فضای برداری $\mathcal{R}/\mathcal{I}$ تشکیل دهند.

مثال ۱۷. فرض کنیم $\mathcal{R} = \mathbb{R}[x, y]$ و $\mathcal{I} = \langle x^2 + 2y, y^2 - 3xy + 4\rangle$ یک ایده‌آل باشد. در این صورت $dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{R}/\mathcal{I}) = 4$. مجموعهٔ $\mathcal{O} = \{1, x, y, xy\}$ یک ایده‌آل مرتب است که $|\mathcal{O}| = dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{R}/\mathcal{I})$ و $\partial\mathcal{O} = \{x^2, x^2y, xy^2, y^2\}$. بنابراین مجموعهٔ

$$G = \{y^2 - 3xy + 4, x^2 + 2y, xy^2 + 18xy + 4x - 24, x^2y + 6xy - 8\}$$

یک $\mathcal{O}$- پیش پایهٔ مرزی برای $\mathcal{I}$ است. هم‌چنین شرایط تعریف قبل برقرار هستند و در نتیجه G یک $\mathcal{O}$- پایهٔ مرزی برای $\mathcal{I}$ است.

چنان‌که مطرح شد ایده‌آل نقاط کاربردهای زیادی در علوم مختلف و به‌ویژه در صنعت دارد. از طرفی ساختار مستقل از ترتیب پایه‌های مرزی به ما اجازه می‌دهد تا کنترل بیش‌تری بر محاسبه و پایایی این پایه‌ها داشته باشیم. براساس الگوریتم‌های محاسبهٔ ایده‌آل نقاط مانند الگوریتم بوخبرگر- مولر و الگوریتم فار-گائو، هاشمی و همکاران الگوریتم‌هایی برای محاسبهٔ پایهٔ مرزی ایده‌آل نقاط معرفی کردند [۱۱]. هم‌چنین آنها الگوریتم‌های بازگشتی BM-AllOrderIdeals و FG-AllQuasiOrderIdeals را برای محاسبهٔ تمامی ایده‌آل‌های مرتب و پایه‌های مرزی نظیر آنها برای یک ایده‌آل نقاط داده شده، ارائه دادند. الگوریتم‌های مذکور به‌گونه‌ای طراحی شده‌اند که می‌توانیم علاوه بر ایده‌آل‌های مرتب یک ایده‌آل نقاط، تمامی شبه-ایده‌آل‌های مرتب را نیز برای آن ایده‌آل نقاط به‌دست آوریم. در بخش آخر این مقاله به کاربرد این الگوریتم‌ها در علم آمار می‌پردازیم. این نتایج ما را بر این داشت تا

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-02-14]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.14.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.549]

به‌منظور دسترسی به پایهٔ مرزی تمامی ایده‌آل‌های نقاط، در بخش بعد به محاسبهٔ پایهٔ مرزی ایده‌آل نقاط برای مجموعهٔ نقاط با چندگانگی بپردازیم.

پایهٔ مرزی ایده‌آل نقاط برای مجموعهٔ نقاط با چندگانگی

در این بخش به ارائهٔ بخش اول نتایج جدید این مقاله می‌پردازیم. در بخش قبل به پایهٔ مرزی ایده‌آل نقاط برای یک مجموعهٔ نقاط داده شده پرداختیم. اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که بعضی از این نقاط دارای چندگانگی هستند. در منابع گوناگون تعاریف مختلفی برای چندگانگی بیان شده است. در این مقاله تعریف نسبتاً ساده‌ای که به‌وسیلهٔ سرلینسو و موردو بررسی شده است را بیان می‌کنیم [۵].

تعریف ۱۸. فرض کنید $\mathrm{v}=(\nu_1,\cdots,\nu_n)\epsilon\mathbb{N}^n$. عملگر دیفرانسیلی D^{v} را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$D^{\mathrm{v}}=\frac{1}{\nu_1!\cdots!\,\nu_n}\cdot\frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n}}{\partial^{\nu_1}x_1\cdots\partial^{\nu_n}x_n}.$$

تعریف ۱۹. مجموعه متناهی $\Delta\subseteq\mathbb{N}^n$ را یک مجموعهٔ دلتا می‌نامیم هرگاه برای اعضای این مجموعه شرط ترتیب تقسیم برقرار باشد، یعنی اگر به‌صورت مؤلفه‌وار داشته باشیم

$$v=(\nu_1,\cdots,\nu_n)<u=(u_1,\cdots,u_n)$$

و $\mathrm{u}\epsilon\Delta$، آن‌گاه $\mathrm{v}\epsilon\Delta$.

تعریف ۲۰. بسط تیلور کوتاه شدهٔ نظیر به چندجمله‌ای f، نقطهٔ P و مجموعهٔ دلتای Δ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$T(f,P,\Delta)=\sum_{v\epsilon\Delta}[D^v f](P)\cdot x^v,$$

جایی که $[D^{\mathrm{v}}f](P)=D^{\mathrm{v}}f|_{x=P}$. شایان ذکر است در بسط تیلور کوتاه شدهٔ $T(f,P,\Delta)$ در مقایسه با بسط تیلور کامل $T(f,P)$ تنها ضرایب نظیر به تک‌جمله‌هایی که توان نظیرشان در مجموعهٔ دلتا قرار دارد را در نظر می‌گیریم.

تعریف ۲۱. برای هر چندجمله‌ای ناصفر f، نقطهٔ $P\epsilon\mathbb{K}^n$ و مجموعهٔ $\Delta\subset\mathbb{N}^n$ گوییم نقطهٔ P دارای چندگانگی Δ است اگر بسط تیلور کوتاه شدهٔ f در نقطهٔ P نسبت به مجموعهٔ Δ صفر شود. به‌عبارت دیگر

$$T(f,P,\Delta)=\sum_{v\epsilon\Delta}[D^v f](P)\cdot x^v=0.$$

تعریف ۲۲. فرض کنیم $\{P_1,\cdots,P_s\}$ یک مجموعهٔ متناهی از نقاط باشد به‌طوری‌که چندگانگی این نقاط به‌ترتیب با مجموعه‌های $\Delta_1,\cdots,\Delta_s$ نمایش داده می‌شوند. مجموعهٔ ایده‌آل صفرساز این نقاط را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$I\big((P_1,\Delta_1),\cdots,(P_s,\Delta_s)\big)=\{f\epsilon\mathbb{K}[x_1,\cdots,x_n]:T(f,P_i,\Delta_i)=0,1\le i\le s\}.$$

فار و گائو الگوریتمی افزایشی برای محاسبهٔ پایهٔ گربنر ایده‌آل صفرساز نظیر به نقاطی که دارای چندگانگی هستند، ارائه کردند [۷]. در این مقاله در نظر داریم با استفاده از الگوریتم مذکور الگوریتمی برای محاسبهٔ پایهٔ مرزی ایده‌آل صفرساز مجموعه نقاط با چندگانگی را بیان کنیم (الگوریتم ۴).

ابتدا زیرالگوریتم BorderTermDivision را که در الگوریتم بعد از آن استفاده می‌کنیم را ارائه می‌دهیم. این الگوریتم به‌عنوان ورودی یک چندجمله‌ای f با ویژگی‌های خاص و یک پیش‌پایهٔ مرزی را دریافت و باقی‌ماندهٔ تقسیم f نسبت به G را خروجی می‌دهد.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-02-14]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.14.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.549]

Algorithm 3 BorderTermDivision

1: **Input**: A polynomial f such that $Supp\ (f) \subseteq \mathcal{O} \cup \partial\mathcal{O}$ and a border prebasis $G = \{g_1, \cdots, g_v\}$
2: **Output**: A polynomial $\tilde{f}$ in $f + \langle g_1, \cdots, g_v\rangle_{\mathbb{K}}$ such that $Supp(\tilde{f}) \subseteq \langle \mathcal{O} \cup \partial\mathcal{O}\rangle_{\mathbb{K}}$
3: Write $f = \sum_{i=1}^{v} c_i b_i + \sum_{j=1}^{\mu} \tilde{c}_j t_j$ with $c_i, \tilde{c}_j \in \mathbb{K}$
4: $\tilde{f} := f - \sum_{i=1}^{v} c_i g_i \in \langle \mathcal{O} \cup \partial\mathcal{O}\rangle_{\mathbb{K}}$
5: **return** $(\tilde{f})$

Algorithm 4 Farr − Gao − Border

1: **Input**: $X = \{P_1, \cdots, P_s\} \subset \mathbb{K}^n$ where $P_i = (p_{i1}, \cdots, p_{in}) \in \mathbb{K}^n$, $\Delta_1, \cdots, \Delta_s \subset \mathbb{N}^n$ and a monomial ordering $\prec$
2: **Output**: A border basis for $I((P_1, \Delta_1), \cdots, (P_s, \Delta_s))$
3: $G := \{1\}$, $\mathcal{O} = \{\}$
4: **for** k from 1 to s **do**
5: Compute $\mathcal{T} = \{T_j = T(g_i, P_k, \Delta_k) : g_j \in G\}$
6: **for** v in Δ_k **do**
7: Find an index i so that g_i has the smallest degree among all polynomials satisfying $coeff(T_i, x^2) \neq 0$
8: **for** j from $i+1$ to $|G|$ **do**
9: $\delta := coeff(T_j, x^v)/coeff\ (T_i, x^v)$
10: $g_j := g_j - \delta . g_i$
11: $T_j := T_j - \delta . T_i$
12: **end for**
13: $\mathcal{O} = \mathcal{O} \cup \{LM(g_i)\}$
14: $G := G \backslash \{g_i\}$
15: $\mathcal{T} = \mathcal{T} \backslash \{T_i\}$
16: **end for**
17: **for** j from 1 to m **do**
18: h: = BorderTermDivision $\left((x_j - p_{kj}) . g_i, G\right)$
19: Compute the truncated Taylor expansion of $(x_j - p_{kj}) . g_i$ and add it to $\mathcal{T}$
20: $G := G \cup \{h\}$
21: **end for**
22: **end for**
23: **return** (G)

قضیهٔ ۲۳. فرض کنیم $X = \{(P_1, \Delta_1), \cdots, (P_s, \Delta_s)\} \subset K^n$ یک مجموعه نقاط و چندگانگی‌های نظیر به آن باشد. هم‌چنین فرض کنیم $\prec$ یک ترتیب تک‌جمله‌ای باشد. در این‌صورت الگوریتم ۴ یک پایهٔ مرزی برای $I((P_1, \Delta_1), \cdots, (P_s, \Delta_s))$ محاسبه می‌کند.

اثبات: اثبات پایان‌پذیری این الگوریتم مشابه الگوریتم اصلی در [۷] است. برای اثبات درستی این الگوریتم تنها به ایدهٔ اثبات پرداخته و برای جزئیات بیش‌تر [۱۱] را ببینید. اثبات را با استقرا روی s انجام می‌دهیم. به‌وضوح برای $s = 1$ حکم برقرار است. فرض کنیم $\{g_1, \cdots, g_m\}$ یک پایهٔ مرزی برای $I\left((P_1, \Delta_1), \cdots, (P_{s-1}, \Delta_{s-1})\right)$ باشد. حال فرض کنیم g_i چندجمله‌ای انتخاب شده در مرحلهٔ ۷ الگوریتم باشد. از آن‌جاکه g_i کم‌ترین درجه را دارد بنابراین $\mathcal{O} \cup \{LM(g_i)\}$ یک ایده‌آل مرتب است. در نتیجه در پایان مجموعهٔ $\mathcal{O}$ یک ایده‌آل مرتب است و با توجه به این‌که مجموعهٔ G شامل چندجمله‌های متناظر در مرز است پس G یک پایهٔ مرزی متناظر $\mathcal{O}$ است. اما $\mathcal{O}$ به‌وضوح یک پایه برای حلقهٔ خارج قسمتی است که این اثبات را کامل می‌کند.

مثال ۲۴. فرض کنیم $P = \{P_1 = (0,0), P_2 = (1,2)\} \subset \mathbb{Q}^2$ یک مجموعه نقاط و مجموعه‌های $\Delta_1 = \{(0,0), (1,0)\}$ و $\Delta_2 = \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$ به‌ترتیب مجموعه چندگانگی نظیر به P_1 و P_2 باشند. در این صورت مجموعهٔ

$$\{4x^2 - 4xy + y^2, x^3 - 1/2xy - x^2 + 1/2y, x^2y - 2xy + y, xy^2 + 4x^2 - 6xy + 2y\}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-02-14]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.14.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.549]

پایهٔ مرزی برای ایده‌آل نقاط $I\big((P_1,\Delta_1),(P_2,\Delta_2)\big)$ نست به ایده‌آل مرتب $\mathcal{O}=\{1,x,y,x^2,xy\}$ است.

کاربرد ایده‌آل نقاط در طرح آزمایش‌ها و رگرسیون

یکی از کاربردهای ایده‌آل نقاط در علم آمار و یافتن مدل‌های بهینه آماری با استفاده از ایده‌آل‌های مرتب در زمینه‌های مختلف مانند طرح آزمایش‌ها و رگرسیون است. در علم آمار، تحلیل رگرسیون تکنیکی برای تعیین رابطه موجود بین مجموعه متغیرهای مستقل و متغیر وابسته است تا به‌وسیلهٔ آن بتوان تغییرات متغیر وابسته را با توجه به تغییرات متغیرهای مستقل پیش‌بینی کرد. از این‌رو مدل‌های رگرسیونی در زمینه‌های مختلف مانند کشاورزی، اقتصاد، علوم زیستی، علوم اجتماعی و ... که نیاز به پیش‌بینی است استفاده می‌شوند.

در تعیین مدل‌های رگرسیونی، یکی از مهم‌ترین شاخص‌های کفایت مدل، ضریب تعیین است که با علامت R-Square نشان داده می‌شود. در واقع ضریب تعیین نشان‌دهندهٔ درصدی از تغییرات متغیر وابسته است که با متغیر مستقل بیان می‌شود و می‌تواند مقادیر بین صفر و یک را اختیار کند. واضح است که هر چه ضریب تعیین مدل رگرسیونی به یک نزدیک باشد مدل برازنده‌تر است. بنابراین سوال مهمی که در این زمینه مطرح می‌شود این است که بتوانیم همهٔ مدل‌های مختلف را پیدا کنیم و با توجه به متناهی بودن آن بتوان بهترین مدل را بیابیم.

ما توانستیم با استفاده از خروجی الگوریتم‌های BM-AllOrderIdeals و FG-AllQuasiOrderIdeals در [۱۱] که در بخش قبل به آنها پرداختیم، به مدل‌هایی دست یابیم که ضریب تعیین بالایی داشتند. در ادامه می‌بینیم که برای یک نمونه از داده‌های خاک‌شناسی توانستیم با استفاده از الگوریتم‌هایمان مدل‌هایی بیابیم که شاخص R-Square آنها مقدار بسیار نزدیک به ۱ را اختیار می‌کند. حتی قابل ذکر است که در بین مدل‌های ما مقدار R-Square =1 نیز مشاهده شد.

مثال ۲۵. فرض کنید هدف بررسی مقادیر ظرفیت تبادل کاتیونی (CEC) و چگالی ظاهری (ρb) خاک در ۱۰ نقطه متفاوت است. ظرفیت تبادل کاتیونی خاک، عبارت از حداکثر مقدار کاتیونی است که وزن معینی از خاک قادر است در خود جذب یا نگه‌داری کند. ظرفیت تبادل کاتیونی یک خاک نمایندهٔ مجموعهٔ کاتیون‌ها و هیدروژن قابل تبادل در جذب صد گرم از خاک است. اگر ظرفیت تبادل کاتیونی برای خاک معینی T میلی اکی والان باشد و در موقعیت معینی S میلی اکی والان کاتیون در جذب ۱۰۰ گرم خاک خشک قرار داشته باشد، تفاضل S و T مصرف مقدار هیدروژن موجود در جذب کلوئیدهای همان وزن خاک است. بدین‌ترتیب ظرفیت تبادل کاتیونی یک خاک نمایندهٔ مجموعه کاتیون‌ها و هیدروژن قابل تبادل در جذب صد گرم از خاک است. چگالی ظاهری خاک نشان‌دهندهٔ فشردگی خاک است. ارتباط بین هدایت هیدرولیکی اشباع (KS) با چگالی ظاهری، مقدار ماده آلی (OM)، ظرفیت تبادل کاتیونی و سطح ویژه (SSA) را بررسی می‌شود.

برای سهولت به هر یک از شاخص‌های مستقل اندازه‌گیری شده SSA، CEC، OM، ρb در مثال ۲۵ به‌ترتیب متغیرهای x_1,x_2,x_3,x_4 را نظیر می‌کنیم. هم‌چنین به ویژگی KS، متغیر وابسته y را نسبت می‌دهیم. جدول ۲ داده‌های ثبت شده مربوط به اندازه‌گیری شاخص‌های بالا را نمایش می‌دهد. هر یک از این متغیرها را به‌عنوان مؤلفهٔ یک نقطه در فضای $\mathbb{R}^4$ در نظر می‌گیریم. بنابراین داریم

$$X=\{(1.30,1.25,13.64,76.900),(1.25,1.73,12.12,110.5),(1.15,2.31,13.84,154.40),(1.22,1.69,16.22,136.20)(1.33,1.72,3.920,97.100),(1.45,1.96,11.33,53.900),(1.52,1.31,3.680,90.600),(1.42,3.19,8.350,52.300),(1.46,1.35,10.00,39.400),(1.35,2.24,13.84,73.500)\}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-02-14]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.14.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.549]

Table 2. Design for the agriculture case and response KS

ρb	OM	CEC	SSA	KM
1.30	1.25	13.64	76.900	0.55
1.25	1.73	12.12	110.50	0.57
1.22	1.69	16.22	136.20	0.27
1.15	2.31	13.84	154.40	0.28
1.33	1.72	3.920	97.100	0.28
1.45	1.96	11.33	53.900	0.60
1.52	1.31	3.680	90.600	0.23
1.42	3.19	8.350	52.300	0.57
1.46	1.35	10.00	39.400	0.95
1.35	2.24	13.84	73.500	1.60

قابل ذکر است که مدل‌های چندجمله‌ای که در ادامه می‌بینیم، مجموعه مولدهایی برای حلقهٔ خارج قسمتی نظیر به ایده‌آل نقاط مجموعهٔ X است که با استفاده از محاسبات پایهٔ مرزی به‌دست آمده‌اند.

مدل ۱.

$$[1, x_4, x_3, x_2, x_1, x_2x_3, x_2^2, x_1^2, x_2^3, x_1^3]$$

Table 3. Excluded Variables[b]

Model	Beta In	t	Sig.	Partial Correlation	Collinearity Statistics Tolerance
1 x_2^2	-38.111^a	-7.097	0.089	-0.990	$1.972E-5$
x_1^2	-155.114^a	-0.340	0.792	-0.322	$1.256E-7$

a. Predictors in the Model: (Constant), $x_1^3, x_2^3, x_3, x_4, x_2x_3, x_2, x_1$
b. Dependent Variable: y

Table 4. Variables Entered/Removed

Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	$x_1^3, x_2^3, x_3, x_4, x_2x_3, x_2, x_1^a$	-	Enter

a. Tolerance=.000 limits reached.

Table 5. Model Summary

Model	R	Multiple R-Square	Adjusted R-Square	Std. Error of the Estimate
1	0.0985^a	*0.971*	*0.869*	*0.15175*

a. Predictors : (Constant), $x_1^3, x_2^3, x_3, x_4, x_2x_3, x_2, x_1$

Table 6. ANOVA[b]

Model	Sum of Square	df	Mean Square	F	Sig.
1 Regression	*1.530*	*7*	*0.219*	*9.494*	0.099^a
Residual	*0.046*	*2*	*0.023*		
Total	*1.576*	*9*			

a. Predictors : (Constant), $x_1^3, x_2^3, x_3, x_4, x_2x_3, x_2, x_1$
b. Dependent Variable: y

Table 7. Coefficients[a]

Model	Unstandardized Coefficients B	Unstandardized Coefficients Std.Error	Standardized Coefficients Beta	t	Sig.
1 (Constant)	*-16.866*	*9.774*		*-1.726*	*0.227*
x_4	*-0.012*	*0.005*	*-1.083*	*-2.625*	*0.120*
x_3	*-0.527*	*0.121*	*-5.347*	*-4.341*	*0.049*
x_2	*-4.368*	*1.202*	*-6.148*	*-3.635*	*0.068*
x_1	*29.264*	*10.744*	*8.255*	*2.724*	*0.112*
x_2x_3	*0.333*	*0.070*	*7.611*	*4.753*	*0.042*
x_2^3	*0.080*	*0.039*	*1.747*	*2.039*	*0.178*
x_1x_3	*-5.804*	*1.861*	*-8.856*	*-3.120*	*0.089*

a. Dependent Variable: y

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-02-14]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.14.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.549]

مدل ۲.

$$[1, x_4, x_3, x_2, x_1, x_2x_4, x_1x_4, x_2x_3, x_1x_3, x_1^2]$$

Table 8. Excluded Variables[b]

Model	Beta In	t	Sig.	Partial Correlation	Collinearity Statistics
					Tolerance
1 x_1	15.946^a	.	.	1.000	$3.791E-5$

a. Predictors in the Model: (Constant), $x_1^2, x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_4, , x_2x_3, x_3, x_4$
b. Dependent Variable: y

Table 9. Variables Entered/Removed

Model	Variables Entered	Variables Removed	Method
1	$x_1^2, x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_4, , x_2x_3, x_3, x_4^a$	-	Enter

a. Tolerance=.000 limits reached

Table 10. Model Summary

Model	R	Multiple R-Square	Adjusted R-Square	Std. Error of the Estimate
1	0.0995^a	*0.990*	*0.913*	*0.12327*

a. Predictors: (Constant) , $x_1^2, x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_4, , x_2x_3, x_3, x_4$

Table 11. ANOVA[b]

Model	Sum of Square	Df	Mean Square	F	Sig.
1 Regression	1.561	8	0.195	12.843	0.213^a
Residual	0.015	1	0.015		
Total	1.576	9			

a. Predictors: (Constant) ,$x_1^2, x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_4, , x_2x_3, x_3, x_4$
b. Dependent Variable: y

Table 12. Coefficients[a]

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
Model	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
1 (Constant)	*12.508*	*1.904*		*6.569*	*0.096*
x_4	*.127*	*0.081*	*11.280*	*1.559*	*0.363*
x_3	*-0.057*	*0.293*	*-0.574*	*-0.193*	*0.879*
x_2	*-3.268*	*0.562*	*-4.600*	*-5.814*	*0.108*
x_2x_4	*-0.041*	*0.016*	*-8.314*	*-2.554*	*0.238*
x_1x_4	*-0.083*	*0.049*	*-7.945*	*-1.684*	*0.341*
x_2x_3	*0.593*	*0.143*	*13.569*	*4.138*	*0.151*
x_1x_3	*-0.767*	*0.309*	*-9.324*	*-2.485*	*0.244*
x_1^2	*-0.687*	*0.790*	*-0.519*	*-0.870*	*0.544*

a. Dependent Variable: y

منابع

1. Batselier K., Wong, N., "Inverse multivariate polynomial root-finding: numerical implementations of the affine and projective Buchberger-Möller algorithm", J. Comput. Appl. Math., 320 (2017) 15-29.
2. Braun G., Pokutta, S., "A polyhedral characterization of border bases", SIAM J. Discrete Math., 30, 1 (2016) 239-265.
3. Buchberger B., "A criterion for detecting unnecessary reductions in the construction of Gröbner-bases", Symbolic and algebraic computation, EUROSAM' 79, int. Symp., Marseille 1979, Lect. Notes Comput. Sci., 72 (1979) 3-21.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-02-14]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.14.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.549]

4. Buchberger B., "Bruno Buchberger's PhD thesis 1965: An algorithm for finding the basis elements of the residue class ring of a zero dimensional polynomial ideal", Translation from the German. J. Symb. Comput., 41 3-4 (2006) 475-511.

5. Cerlienco L., Mureddu M., "From algorithm sets to monomial linear bases by means of combinatorial algorithm" Discrete Math., 139 1-3 (1995) 73-87.

6. Cox D. A., Little J., O'Shea D., "Ideals, variables, and algorithms", An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra, 4th revised ed., revised ed. Cham: Springer (2015).

7. Farr J. B., Gao S., "Computing Gröbner bases for vanishing ideals of finite sets of points", In Applied algebra, algebraic algorithms and errorcorrecting codes, 16th international symposium, AAECC-16, Las Vegas, NV, USA, February 20–24, 2006. Proceedings. Berlin: Springer, (2006) 118-127.

8. Faugère J.-C, "A new efficient algorithm for computing Gröbner bases (F^4)", J. Pure Appl. Algebra 139 1-3 (1999) 61-88.

9. Faugère J.-C., "A new efficient algorithm for computing Gröbner bases without reduction to zero (F_5)", In Proceedings of the 2002 international symposium on symbolic and algebraic computation, ISSAC 2002, Lille, France, July 07–10, 2002, New York, NY: ACM Press, (2002) 75-83.

10. Giglio B., Riccomagno E., Wynn H. P., "Gröbner basis strategies in regression", J. Appl. Stat. 27, 7 (2000) 923-938.

11. Hashemi, A., Kreuzer, M., Pourkhajouei, S., "Computing All Border Bases for Ideals of Points", Journal of Algebra and Its Applications, Vol. 18, No. 6, Article No. 1950102 (2019) 23.

12. Kaspar S., "Computing border bases without using a term ordering", Beitr. Algebra Geom. 54, 1 (2013) 211-223.

13. Kehrein A., Kreuzer M., "Characterizations of border bases", J. Pure Appl. Algebra 196, 2-3 (2005) 251-270.

14. Kehrein A., Kreuzer M., "Computing border bases", J. Pure Appl. Algebra 205, 2 (2006) 279-295.

15. Kreuzer M., Poulisse H., "Subideal border bases", Math. Comput. 80, 274 (2011) 1135-1154.

16. Kreuzer M., Robbiano L., "Computational commutative algebra", II. Berlin: Springer, (2005).

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-02-14]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.14.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.549]

17. Lazard D., "Gröbner bases, Gaussian elimination and resolution of systems of algebraic equations", Computer algebra, EUROCAL'83, Proc. Conf., London 1983, Lect. Notes Comput. Sci. 162 (1983) 146-156.

18. Marinari M., Möller H., Mora T., "Gröbner bases of ideals given by dual bases", In ISSAC '91. Proceedings of the 1991 international symposium on Symbolic and algebraic computation. Bonn, Germany, July 15-17, 1991. New York, NY: ACM Press, (1991) 55-63.

19. Möller H., Buchberger B., "The construction of multivariate polynomials with preassigned zeros", Computer algebra, EUROCAM '82, Conf. Marseille/France 1982, Lect. Notes Comput. Sci. 144 (1982) 24-31.

20. Möller H., Mora T., Traverso C., "Gröbner bases computation using syzygies", In International symposium on Symbolic and algebraic computation 92. ISSAC 92. Berkeley, CA, USA, July 27–29, 1992. Baltimore, MD: ACM Press, (1992) 320-328.

21. Möller H., Sauer T., "H-bases for polynomial interpolation and system solving", Adv. Comput. Math. 12, 4 (2000) 335-362.

22. Mourrain B., "A new criterion for normal form algorithms", In Applied algebra, algebraic algorithms and error correcting codes. 13th international symposium, AAECC-13, Honolulu, HI, USA, November 15–19, 1999. Proceedings. Berlin:Springer, (1999) 430-443.

23. Mourrain B., "Pythagore's dilemma, symbolic-numeric computation, and the border basis method", In Symbolic-numeric computation. Invited and contributed presentations given at the international workshop (SNC 2005), Xi'an, China, July 19–21 (2005). Basel: Birkhäuser, (2007) 223-243.

24. Mourrain B., Trebuchet, P., "Generalized normal forms and polynomial system solving", In Proceedings of the 2005 international symposium on symbolic and algebraic computation , ISSAC'05, Beijing, China, July 24-27, 2005. New York, NY: ACM Press, (2005) 253-260.

25. Mourrain B., Trébuchet P., "Stable normal forms for polynomial system solving", Theor. Comput. Sci. 409, 2 (2008) 229-240.

26. Mourrain B., Trébuchet P., "Border basis representation of a general quotient algebra", In Proceedings of the 37th international symposium on symbolic and algebraic computation, ISSAC 2012, Grenoble, France, July 22-25, 2012. New York, NY: Association for Computing Machinery (ACM), (2012) 265-272.

27. Pistone G., Wynn H. P., "Generalised confounding with Gröbner bases", Biometrika 83, 3 (1996) 653-666.

28. Yufu Chen Meng X., "Border bases of positive dimensional polynomial ideals", In SNC'07. ACM, New York, (2007) 65-71.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2026-02-14]
[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.14.9]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.549]