

محاسبه منبع و شار گرمایی در معادله گرمایی معکوس وابسته به مکان با استفاده از روش جواب‌های بنیادی و توابع پایه‌ای شعاعی (MFS-RBF)

طاهره ملائی، علیمردان شاهرزایی*

دانشگاه الزهرا، دانشکده ریاضی

دریافت: ۹۷/۰۹/۰۱

پذیرش: ۹۹/۰۱/۲۴

چکیده

این مقاله به محاسبه عبارت منبع و شار گرمایی در ابتدای بازه مکانی، در مسأله هدایت گرمایی معکوس می‌پردازد. بدین منظور، ابتدا با یک تبدیل مناسب، مسأله معکوس به یک مسأله مستقیم تقلیل می‌یابد، سپس تلفیقی از جواب‌های بنیادی معادلات گرما و توابع پایه‌ای شعاعی برای به‌دست آوردن جواب عددی به‌کار می‌رود. از آنجا که ماتریس ضرایب بد حالت^۱ است، روش منظم‌سازی تیخانف برای حل دستگاه معادلات خطی حاصل استفاده می‌شود. برای انتخاب پارامتر منظم‌سازی، از معیار GCV^2 استفاده شده است. دقت و کارایی روش با چند مثال عددی بیان می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مسأله هدایت گرمایی معکوس، روش جواب‌های بنیادی و توابع پایه‌ای شعاعی، منظم‌سازی تیخانف، معیار GCV

۱. مقدمه

هر پدیده‌ای در طبیعت، فیزیک، شیمی، زیست می‌تواند به شکل معادلات جبری، دیفرانسیلی یا انتگرالی بیان شود. سپس روش‌های عددی مطلوب به‌کارگرفته می‌شود تا جواب‌های تقریبی حاصل آید. ایده اصلی شبیه‌سازی عددی، تبدیل مسأله کاربردی پیچیده به یک شکل ساده گسسته از توصیفات ریاضی، حل مسأله با کامپیوتر و در نهایت بیان پدیده طبیعی طبق نظر تحلیل‌گران است.

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی یک رده مهم از معادلات است که در زمینه‌های مختلف علوم به‌وجود می‌آید. معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی سهموی و در این رده معادلات نفوذ^۲ و در حالت خاص انتقال گرما^۴ در مسائل مختلفی از علوم از جمله فرایندهای تصادفی، بوم‌شناسی^۵، مدل‌سازی پدیده آلودگی خاک، احتراق در موتور خودرو، نفوذ سلول‌های سرطانی، مسائل مربوط به رسانه و... ظاهر می‌شوند.

انتقال گرما ممکن است از طرق مختلف از جمله هدایت صورت گیرد. مسأله هدایت گرمایی^۶ یک دسته مهم از مسائل نفوذ است که در حالت کلی معادله آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t; u); \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, T],$$

* نویسنده مسئول ashahrezaee@alzahra.ac.ir

¹ Ill-conditioning

⁴ Generalized cross-validation

⁵ Diffusion

⁴ Heat transfer

⁵ Ecology

⁸ Heat conduction problem

که در آن u متغیر حالت T, V زمان نهایی و f منبع فیزیکی است.

در مسائل مربوط به معادلات با مشتقات جزئی معمولاً با مسأله‌ای مواجه هستیم که در آن شرایط مسأله اعم از شرایط اولیه و مرزی، مشخص هستند و در معادله اصلی نیز به جز تابع اصلی معادله، مشخصه مجهول دیگری در معادله وجود ندارد. در واقع در مسأله، فقط یک عامل مجهول وجود دارد. این گونه مسائل، مسائل مستقیم نامیده می‌شود.

در مقابل، دسته دیگری از مسائل وجود دارند که در آنها علاوه بر عامل اصلی مجهول در معادله، مشخصه‌های مجهول دیگری نیز در معادله و یا در شرایط آن وجود دارند. این گونه مسائل را مسائل معکوس می‌نامند. در واقع در این مسائل یکی از مشخصه‌های تعریف کننده خود مسأله مجهول است. این امر در بسیاری از مسائل طبیعت اتفاق می‌افتد. برای حل این گونه مسائل، با در نظر گرفتن تعداد مجهولات مسأله، از برخی شرایط قابل اندازه‌گیری در مسأله تحت عنوان داده‌های فوق‌اضافی^۸ استفاده می‌شود.

اگر در معادله اخیر علاوه بر u تابع اصلی معادله، منبع فیزیکی $f = f(x, t; u)$ نیز مجهول باشد، مسأله هدایت گرمایی معکوس با منبع مجهول را خواهیم داشت. محققانی چون کانن [۱۲، ۱۳]، دوچاتو [۱۳]، فتولایف [۱۳]، با شرایط دیریکله-نیومن به مطالعه و بررسی این مسأله پرداخته‌اند. در پژوهش‌های انجام شده، گاهی منبع گرمایی به‌عنوان تابعی جداپذیر از هر دو متغیر مکان و زمان [۱۰]، گاهی به صورت تابعی از متغیر زمان [۸] و در برخی موارد هم به صورت تابعی از متغیر مکان ظاهر می‌شود [۱]. ساواتیف [۱۵] با در نظر گرفتن عبارت منبع به صورت تابع جداشدنی از پارامترهای x و t به وجود ویکتایی چنین مسائلی می‌پردازد.

هر چند در دهه‌های اخیر روش‌های عددی متفاوتی به منظور حل مسأله منبع گرمایی معکوس ارائه شده است، ولیکن تاکنون این مسأله به طور کامل حل نشده است و معمولاً هر یک از مقاله‌های منتشرشده در این زمینه با یک روش عددی به حل یک مسأله خاص در این رده می‌پردازند. به‌عنوان مثال در [۱۶] یک مسأله هدایت گرمایی معکوس با منبع مجهول به روش تفاضلات متناهی حل شده است. تاکنون روش‌هایی نظیر تفاضلات متناهی [۳]، عناصر محدود [۷]، عناصر مرزی [۴] از جمله روش‌های سنتی و همچنین روش‌های دیگری مانند خطای کمترین مربعات خطی^۹، روش دنباله‌ای^{۱۰}، روش‌های منظم‌سازی تکراری^{۱۱} برای حل عددی این رده از مسائل معکوس به‌کار رفته است [۱۷، ۱۹]. در همه روش‌های ذکر شده نیاز به شبکه‌بندی فضای جواب و لذا صرف هزینه‌های بالای محاسباتی است.

روش توابع پایه‌ای شعاعی و روش جواب‌های بنیادی از جمله روش‌های بدون شبکه هستند که می‌توان از آنها در حل مسأله منبع گرمایی معکوس استفاده نمود [۱، ۵]. در روش‌های بدون شبکه نه تنها دقت محاسبات افزایش می‌یابد، بلکه می‌توان از این روش‌ها در حل معادلات دیفرانسیل در ابعاد و مراتب بالاتر و روی دامنه‌های ناهموار و نامنظم نیز استفاده کرد. لیو^{۱۲} در [۲۶] به معرفی و بررسی چنین روش‌هایی پرداخته است.

برای اولین بار گپرادزه و الکزیچ [۲۰] روش جواب‌های بنیادی را که یک روش بدون شبکه است، به منظور حل مسائل مقدار مرزی معینی معرفی کرده و جواب مسأله را به صورت ترکیبی خطی از جواب‌های اساسی معادله دیفرانسیل حاکم تعریف کردند.

⁷ State variable

⁸ Overspecified conditions

⁹ Linear least squares error

¹² Sequential method

¹¹ Iterative regularization methods

¹² Liu

روش جواب‌های بنیادی تنها به داده‌های مرزی وابسته است. از سویی دیگر، در بیشتر موارد درونیاب‌های مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی در نقاط مرزی از دقت کمتری نسبت به نقاط درونی برخوردار هستند. به همین دلیل در روش عددی $MFS-RBF$ از جواب‌های بنیادی در نقاط مرزی و از توابع پایه‌ای شعاعی در نقاط درونی جهت تقریب جواب مسأله دیفرانسیل جزئی سهموی معکوس استفاده می‌شود.

تاکنون روش $MFS-RBF$ برای مسأله هدایت گرمایی معکوس با عبارت منبع گرمایی وابسته به متغیر زمان و [۸] مسأله هدایت گرمایی پسر و ناهمگن [۶] استفاده شده است.

چون وجود، یکتایی و پایداری جواب مسائل معکوس سهموی معمولاً تضمین شده نیست، به طور کلی آنها به عنوان مسائل بدخیم^{۱۳} تعریف می‌شوند [۲۱]. با وجود بدخیمی در این مسائل، داده‌های اولیه در جواب نهایی تأثیر فراوانی دارند. از طرفی این داده‌ها، حاصل پدیده‌های فیزیکی هستند که توسط اندازه‌گیری‌های مستقیم حاصل شده‌اند. از این رو با توجه به وجود خطاهای اندازه‌گیری، از روش‌هایی مبتنی بر تکنیک‌هایی تحت عنوان روش‌های منظم‌سازی استفاده می‌شود که تأثیر خطاهای داده‌های اولیه در جواب نهایی مسأله را کاهش دهد. روش منظم‌سازی بر این اساس عمل می‌کند که مسأله بدخیم را با یک مسأله خوش‌خیم که دارای جواب نزدیک به مسأله است تقریب می‌زند و در مرحله بعد اطلاعات مربوط به جواب مسأله را تلفیق کرده تا بدین ترتیب به جوابی پایدار و هموار برای مسأله بدخیم به دست آید.

این مقاله، برای مسأله هدایت گرمایی معکوس پسر و با عبارت منبع گرمایی وابسته به متغیر مکان، روش $MFS-RBF$ و سپس روش منظم‌سازی را به کار می‌گیرد و با چند مثال دقت و کارایی روش را برای حل این مسأله بررسی می‌کند. ساختار مقاله به صورت زیر است:

در بخش ۲، مسأله هدایت گرمایی معکوس معرفی و با تغییر متغیر مناسب به مسأله مستقیم تبدیل می‌شود (فرمول‌بندی ریاضی). در بخش ۳ روش‌های عددی MFS و RBF به صورت مجزا، در بخش ۴ روش به‌کارگیری در این مقله یعنی $MFS-RBF$ و در بخش ۵ روش منظم‌سازی تیخانف معرفی می‌شود. بخش ۶ چند مثال عددی را شامل می‌شود و در نهایت در بخش ۷ نتیجه بیان می‌شود.

۲. فرمول‌بندی ریاضی

معادله با مشتقات جزئی معکوس:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x); \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \quad (1)$$

با شرط اولیه:

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad (2)$$

شرط مرزی:

$$\beta \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) + \gamma u(1, t) = g(t); \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

و شرایط فوق اضافی:

$$u(x^*, t) = h(t), \quad (۴)$$

$$u(x, T) = p(x), \quad (۵)$$

در نظر گرفته می‌شود که در آن $x^* \in (0, 1)$ معلوم، T زمان نهایی، β و γ ثابت‌های مثبت، ϕ ، g ، h و ψ توابع پیوسته معلوم است که در شرایط سازگاری زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{aligned} \phi(x^*) &= h(0), \\ h(T) &= p(x^*), \\ \beta\phi'(1) + \gamma\phi(1) &= g(0), \\ \beta\psi'(1) + \gamma\psi(1) &= g(T), \end{aligned} \quad (۶)$$

و منبع گرمایی $f(x)$ ، شار گرمایی $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = q(t)$ و توزیع گرمایی $u(x, t)$ مجهول‌هایی هستند که باید محاسبه شوند. در صورت معلوم بودن $(u(x, t), \frac{\partial u}{\partial x}(0, t), f(x))$ ، جواب هموار و یکتای $u(x, t)$ ، جواب مسأله مقدار اولیه (۱)–(۵) است.

برای محاسبه جواب، ابتدا با تغییر متغیر:

$$v(x, t) = u(x, t) + r(x), \quad (۷)$$

$$(۸)$$

$$r(x) = \int_0^x (x - \alpha)f(\alpha)d\alpha,$$

و در نظر گرفتن شرایط (۶)، مسأله معکوس (۱)–(۵) به مسأله مستقیم با تنها یک مجهول به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t); \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \quad (۹)$$

$$v(x^*, t) - v(x^*, 0) = h(t) - \phi(x^*); \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (۱۰)$$

$$\begin{aligned} \beta\left(\frac{\partial v}{\partial x}(1, t) - \frac{\partial v}{\partial x}(1, 0)\right) + \gamma(v(1, t) - v(1, 0)) &= g(t) - \beta\phi'(1) - \gamma\phi(1); \\ 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (۱۱)$$

$$v(x, T) - v(x, 0) = p(x) - \phi(x); \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (۱۲)$$

سپس با محاسبه‌ی جواب عددی $v(x, t)$ از مسأله مستقیم (۹)–(۱۲) به روش MFS-RBF و با استفاده از (۲) و (۷) داریم:

$$r(x) = v(x, 0) - \phi(x), \quad (۱۳)$$

لذا از (۸)، مقدار عددی $f(x)$ و از (۷) و (۱۳)، مقدار عددی $u(x, t)$ مطابق فرمول‌های زیر محاسبه می‌شود:

$$f(x) = r''(x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, 0) - \phi''(x), \quad (۱۴)$$

$$u(x, t) = v(x, t) - r(x). \quad (۱۵)$$

۳. روش‌های عددی جواب‌های بنیادی (MFS) و توابع پایه‌ای شعاعی (RBF)

۱.۳. روش جواب‌های بنیادی (MFS)

تابع

$$F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} H(t), \quad (16)$$

که در آن $H(t)$ تابع هوی‌ساید است، جواب بنیادی معادله (۹) است. با فرض $\tau > T$ ، تابع:

$$\varphi(x, t) = F(x, t + \tau), \quad (17)$$

جواب نامنفرد معادله (۹) در دامنه $\Omega_b = [0, 1] \times [0, T]$ است.

همچنین با فرض این که $\chi_B = \{(x_k, t_k)\}_{k=1}^{N_B}$ ، مجموعه‌ای از $N_B = n + m + s$ نقطه پراکنده بر مرز $\partial\Omega_b$ است و به

صورت:

$$\chi_B = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \quad (18)$$

که در آن:

$$\Gamma_1 = \{(x_i, t_i) : t_i = T, 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n\}, \quad (19)$$

$$\Gamma_2 = \{(x_j, t_j) : x_j = 1, 0 \leq t_j \leq T, j = 1, \dots, m\}, \quad (20)$$

$$\Gamma_3 = \{(x_r, t_r) : x_r = x^*, 0 \leq t_r \leq T, r = 1, \dots, s\}, \quad (21)$$

معرفی می‌شود، روش جواب‌های بنیادی، جواب تقریبی مسأله (۹)-(۱۲) را به صورت زیر ارائه می‌دهد:

$$v^*(x, t) = \sum_{k=1}^{N_B} \lambda_k \varphi(x - x_k, t - t_k), \quad (22)$$

که در آن φ تابع داده شده در (۱۷) و λ_k مجهول‌های مسأله است.

با توجه به این که تابع (۱۷) در معادله (۹) صدق می‌کند و با محاسبه $v^*(x, t)$ در نقاط $\chi_B = \{(x_k, t_k)\}_{k=1}^{N_B}$ ، λ_k ها از

معادله ماتریسی:

$$A\lambda = b, \quad (23)$$

به دست می‌آید که در آن خواهیم داشت:

$$A = \begin{bmatrix} \varphi(x_1 - x_k, T - t_k) - \varphi(x_1 - x_k, 0 - t_k) \\ \vdots \\ \varphi(x_n - x_k, T - t_k) - \varphi(x_n - x_k, 0 - t_k) \\ \beta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1 - x_k, t_{n+1} - t_k) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(1 - x_k, 0 - t_k) \right) + \gamma (\varphi(1 - x_k, t_{n+1} - t_k) - \varphi(1 - x_k, 0 - t_k)) \\ \vdots \\ \beta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1 - x_k, t_{n+m} - t_k) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(1 - x_k, 0 - t_k) \right) + \gamma (\varphi(1 - x_k, t_{n+m} - t_k) - \varphi(1 - x_k, 0 - t_k)) \\ \varphi(x^* - x_k, t_{n+m+1} - t_k) - \varphi(x^* - x_k, 0 - t_k) \\ \vdots \\ \varphi(x^* - x_k, t_{N_B} - t_k) - \varphi(x^* - x_k, 0 - t_k) \end{bmatrix}_{N_B \times N_B}, \quad (24)$$

$$b = \begin{bmatrix} p(x_1) - \phi(x_1) \\ \vdots \\ p(x_n) - \phi(x_n) \\ g(t_{n+1}) - \beta \phi'(1) - \gamma \phi(1) \\ \vdots \\ g(t_{n+m}) - \beta \phi'(1) - \gamma \phi(1) \\ h(t_{n+m+1}) - \phi(x^*) \\ \vdots \\ h(t_{N_B}) - \phi(x^*) \end{bmatrix}_{N_B \times 1}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \lambda_{n+1} \\ \vdots \\ \lambda_{n+m} \\ \lambda_{n+m+1} \\ \vdots \\ \lambda_{N_B} \end{bmatrix}_{N_B \times 1},$$

و $k = 1, \dots, N_B$ به صورت سطری تغییر می‌کند.

از آنجا که مسأله هدایت گرمایی معکوس بدخیم است، ماتریس A در (۲۳) بدحالت می‌باشد. لذا می‌توان از روش منظم‌سازی تیخانف با معیار GCV برای محاسبه λ در (۲۳) استفاده نمود. برای اطلاعات بیشتر در مورد روش MFS می‌توان به [۲۷] مراجعه کرد.

۲.۳. توابع پایه‌ای شعاعی (RBF)

روش RBF یک روش بدون شبکه است که برای تقریب داده‌های پراکنده به کار می‌رود. توابع پایه‌ای شعاعی، اغلب دارای پارامتر شکل هستند که مقدار آنها به شدت بر دقت تقریب اثر می‌گذارد. دقت طیفی برای انواع معینی از آنها دست‌یافتنی است. **تعریف:** داده‌های $\{(x_i, y_i); i = 1, \dots, N, N \in \mathbb{N}\}$ با $x_i \in R^d$ و $y_i \in R$ داده شده است، درونیابی داده‌های پراکنده یافتن تابع (پیوسته) I_f است به طوری که

$$I_f(x_i) = y_i,$$

که $\mathcal{X} = \{x_i; i = 1, \dots, N\} \subseteq \Omega \subset R^d$ در برگیرنده موقعیت‌های اندازه‌گیری (موقعیت داده‌ها) و $y_i \in R$ ها در حقیقت اندازه‌های نظیر به این موقعیت‌ها هستند. (مقادیر داده‌ها).

تعریف: تابع $\Psi: R^d \rightarrow R$ را شعاعی نامند هرگاه تابع $\psi: [0, \infty) \rightarrow R$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\Psi(x) = \psi(r),$$

که $r = \|x\|$ و $\|\cdot\|$ نرم اقلیدسی است.

تعریف: توابع $\Psi_k(x); k = 1, \dots, N, x \in R^d$ در مجموعه توابع پایه‌ای $B = \{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n\}$ توابع پایه‌ای شعاعی نامیده می‌شود که در آن

$$\Psi_k(x) = \psi(\|x - x_k\|), \quad (25)$$

و تابع شعاعی Ψ_k به‌طور شعاعی حول نقطه مرکزی x_k متقارن است.

جدول ۱. برخی از توابع شعاعی ($r = \|x - x_k\|$)

تعریف	تابع پایه‌ای شعاعی
$\psi(r) = \sqrt{c^2 + r^2}$	چندمربعی
$\psi(r) = (c^2 + r^2)^{-1}$	مربعی معکوس
$\psi(r) = (\sqrt{c^2 + r^2})^{-1}$	چندمربعی معکوس
$\psi(r) = \exp\{-c^2 r^2\}$	گوسین

توابع ذکر شده در جدول ۱، توابع پایه‌ای شعاعی به اندازه کافی هموار هستند. این دسته از توابع پایه‌ای شعاعی از هر مرتبه مشتق‌پذیر هستند و شامل یک پارامتر به‌نام پارامتر شکل c می‌باشند. پارامتر شکل باید طوری انتخاب شود که بالاترین دقت درونیابی به دست آید. معمولاً یک رابطه عکس بین دقت و پایداری برقرار است. یک معیار استاندارد برای سنجش پایداری یک روش عددی، عدد حالت ماتریس درونیابی آن می‌باشد. برای تعداد نقاط گره‌ای ثابت، علیرغم اینکه اندازه‌ی کوچک پارامتر شکل، تقریب‌های دقیق‌تری را به دست می‌دهند، ولی ماتریس درونیابی بدحالت‌تر می‌شود. همچنین، برای یک پارامتر شکل ثابت، افزودن تعداد نقاط گره‌ای باعث افزایش عددحالت ماتریس دستگاه معادلات خطی حاصل می‌شود [۲۲]. با وجود تحقیقات انجام شده توسط بسیاری از دانشمندان برای یافتن یک الگوریتم مناسب برای انتخاب پارامتر c ، انتخاب بهینه پارامتر شکل، هنوز یک سؤال باز است و مقدار c در عمل با آزمایش به دست می‌آید [۵]. با تنظیم مقدار پارامتر شکل با تعداد نقاط گره‌ای می‌توان به ماتریس‌های به اندازه کافی خوش حالت دست یافت. همگرایی روش نیز از مسائل مهمی است که در حالات درونیابی و نیز حل معادلات دیفرانسیل جزئی با جواب‌های هموار، توسط وو [۲۳]، شابک و فرانکی [۲۴] بررسی شده است و همچنین داریم:

قضیه [۲۵]: فرض کنیم $\{x_i\}_{i=1}^n$ نقطه در مجموعه محدب $\Omega \subseteq R^d$ باشند و

$$h = \max_{x \in \Omega} \min_{1 \leq i \leq n} \|x - x_i\|_2,$$

اگر برای هر f که در رابطه $\int_{\hat{\psi}} \frac{(\hat{f}(\eta))^2}{\hat{\psi}(\eta)} d\eta < \infty$ صدق می‌کند، داشته باشیم:

$$\hat{\psi}(\eta) < c(1 + |\eta|)^{-(2l+d)},$$

$$b = \begin{bmatrix} p(x_1) - \phi(x_1) \\ \vdots \\ p(x_n) - \phi(x_n) \\ g(t_{n+1}) - \beta\phi'(1) - \gamma\phi(1) \\ \vdots \\ g(t_{n+m}) - \beta\phi'(1) - \gamma\phi(1) \\ h(t_{n+m+1}) - \phi(x^*) \\ \vdots \\ h(t_{N_B}) - \phi(x^*) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{N \times 1}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \lambda_{n+1} \\ \vdots \\ \lambda_{n+m} \\ \lambda_{n+m+1} \\ \vdots \\ \lambda_{N_B} \\ \lambda_{N_B+1} \\ \vdots \\ \lambda_N \end{bmatrix}_{N \times 1}, \quad (29)$$

و $k = 1, \dots, N$.

۴. روش عددی جواب‌های بنیادی - توابع پایه‌ای شعاعی (MFS - RBF)

با داشتن $N = N_B + N_I$ داده پراکنده در دامنه $\Omega_{ib} = [0, 1] \times [0, T + \tau]$ به صورت $\mathcal{X}_B = \{(x_k, t_k)\}_{k=1}^{N_B}$ و $\mathcal{X}_I = \{(x_k, t_k)\}_{k=1}^{N_I}$ که $\mathcal{X}_B = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ ، نقاط مرزی و نقاط درونی دامنه است، روش MFS-RBF جواب تقریبی مسأله (۹)-(۱۲) را به صورت زیر ارائه می‌دهد:

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{N_B} \lambda_k \varphi(x - x_k, t - t_k) + \sum_{k=N_B+1}^N \lambda_k \psi(\|x - x_k, t - t_k\|_2), \quad (30)$$

که در آن $\varphi(x, t)$ و $\psi(x, t)$ به ترتیب جواب بنیادی معادله (۹) و تابع پایه‌ای شعاعی معرفی شده در بخش ۳ است.

با توجه به این‌که تابع (۳۰) در معادله (۹) صدق می‌کند و با محاسبه $v(x, t)$ در نقاط $\mathcal{X}_B = \{(x_k, t_k)\}_{k=1}^{N_B}$ و $\mathcal{X}_I = \{(x_k, t_k)\}_{k=1}^{N_I}$ ها از معادله ماتریسی:

$$A\lambda = b,$$

به دست می‌آید که در آن λ و b در رابطه (۲۹) تعریف شده است و A به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix}_{N \times N}; \quad (31)$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} \varphi(x_1 - x_{k_0}, T - t_{k_0} + \tau) - \varphi(x_1 - x_{k_0}, 0 - t_{k_0} + \tau) \\ \vdots \\ \varphi(x_n - x_{k_0}, T - t_{k_0} + \tau) - \varphi(x_n - x_{k_0}, 0 - t_{k_0} + \tau) \\ \beta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1 - x_{k_0}, t_{n+1} - t_{k_0}) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(1 - x_{k_0}, 0 - t_{k_0}) \right) + \gamma (\varphi(1 - x_{k_0}, t_{n+1} - t_{k_0}) - \varphi(1 - x_{k_0}, 0 - t_{k_0})) \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1 - x_{k_0}, t_{n+m} - t_{k_0}) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(1 - x_{k_0}, 0 - t_{k_0}) \right) + \gamma (\varphi(1 - x_{k_0}, t_{n+m} - t_{k_0}) - \varphi(1 - x_{k_0}, 0 - t_{k_0})) \\ \varphi(x^* - x_{k_0}, t_{n+m+1} - t_{k_0} + \tau) - \varphi(x^* - x_{k_0}, 0 - t_{k_0} + \tau) \\ \vdots \\ \varphi(x^* - x_{k_0}, t_{N_B} - t_{k_0} + \tau) - \varphi(x^* - x_{k_0}, 0 - t_{k_0} + \tau) \end{bmatrix}_{N_B \times N_B}, \tag{۳۲}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{N_I \times N_B}, \tag{۳۳}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \psi(x_1 - x_{k_1}, T - t_{k_1} + \tau) - \psi(x_1 - x_{k_1}, 0 - t_{k_1} + \tau) \\ \vdots \\ \psi(x_n - x_{k_1}, T - t_{k_1} + \tau) - \psi(x_n - x_{k_1}, 0 - t_{k_1} + \tau) \\ \beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(1 - x_{k_1}, t_{n+1} - t_{k_1}) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(1 - x_{k_1}, 0 - t_{k_1}) \right) + \gamma (\psi(1 - x_{k_1}, t_{n+1} - t_{k_1}) - \psi(1 - x_{k_1}, 0 - t_{k_1})) \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}(1 - x_{k_1}, t_{n+m} - t_{k_1}) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(1 - x_{k_1}, 0 - t_{k_1}) \right) + \gamma (\psi(1 - x_{k_1}, t_{n+m} - t_{k_1}) - \psi(1 - x_{k_1}, 0 - t_{k_1})) \\ \psi(x^* - x_{k_1}, t_{n+m+1} - t_{k_1} + \tau) - \psi(x^* - x_{k_1}, 0 - t_{k_1} + \tau) \\ \vdots \\ \psi(x^* - x_{k_1}, t_{N_B} - t_{k_1} + \tau) - \psi(x^* - x_{k_1}, 0 - t_{k_1} + \tau) \end{bmatrix}_{N_B \times N_I}, \tag{۳۴}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi(\|x_{N_B+1} - x_{k_3}, t_{N_B+1} - t_{k_3}\|_2) \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi(\|x_N - x_{k_3}, t_N - t_{k_3}\|_2) \end{bmatrix}_{N_I \times N_I}, \tag{۳۵}$$

$$.N = N_B + N_I \text{ و } k_3 = k_1 = N_B + 1, \dots, N, \quad k_0 = 1, \dots, N_B \text{ و}$$

تأثیر خطاهای ذاتی در داده‌های اندازه‌گیری و خطای گرد کردن در محاسبات و همچنین وابستگی تابع پایه شعاعی به پارامتر شکل C و تأثیر مقدار آن بر عدد حالت ماتریس A سبب می‌شود دستگاه حاصل از معادلات خطی (۳۰) بدوضع شود و نتوان آن را به طور مستقیم حل نمود. از آنجایی که اختلالات کوچک در داده‌های ورودی مقدار قابل توجهی اختلال در جواب به وجود می‌آورد، به منظور پایداری در مثال‌های عددی ارائه شده در بخش ۶، از تابع rand در متلب برای ایجاد نویز در بردار b به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$b_i = b_i + \delta \cdot \text{rand}(1), \quad (36)$$

که در آن b_i ; $i = 1, \dots, N$ داده‌های دقیق، $\text{rand}(1)$ عدد تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه $[0, 1]$ و δ سطح نویز در داده‌های اندازه‌گیری شده را نشان می‌دهد.

۵. منظم‌سازی تیخانف

روش‌های منظم‌سازی مختلفی برای حل مسائل بدوضع $A\lambda = b$ و $\min \|A\lambda - b\|$ وجود دارد که باعث شود جواب منظم‌ساز λ^α در برابر اختلال A و b کمتر تحت تأثیر قرار گیرد. در این خصوص بهترین روش، روش منظم‌سازی تیخانف است که جواب منظم‌سازی تیخانف λ^α با حل مسأله مینیمم زیر به دست می‌آید:

$$\min_{\alpha} \left\{ \|A\lambda - b\|^2 + \alpha^2 \|\lambda\|^2 \right\}; \quad \alpha > 0, \quad (37)$$

که در آن α پارامتر منظم‌سازی است. نکته حائز اهمیت در روش منظم‌سازی، انتخاب پارامتر منظم‌سازی است. در این مقاله از معیار GCV برای انتخاب پارامتر منظم‌سازی استفاده می‌شود.

معیار GCV یک روش موفقیت‌آمیز و عمومی برای انتخاب پارامتر منظم‌سازی است. معیار GCV پارامتر منظم بهینه را با مینیمم کردن تابع زیر مشخص می‌کند:

$$G(\alpha) = \frac{\|A\lambda^\alpha - b\|^2}{(\text{trace}(I_N - AA^T))^2}; \quad \alpha > 0, \quad (38)$$

که در آن $A^T = (A^T A + \alpha^2 I_N)^{-1} A^T$.

جواب منظم‌شده (۳۰) به صورت $\lambda^{\alpha*} = [\lambda_1^{\alpha*}, \dots, \lambda_N^{\alpha*}]^T$ است که در آن α^* را مینیمم می‌کند. در روند حل مسأله از برنامه‌های نوشته شده در متلب تحت عنوان "gcv.m" و "tikhonov.m" برای منظم‌سازی جواب استفاده می‌شود.

بنابراین جواب تقریبی برای مسأله (۹)-(۱۲) به صورت:

$$v_{\alpha}^*(x, t) = \sum_{k=1}^{N_B} \lambda_k^* \varphi(x - x_k, t - t_k) + \sum_{k=N_B+1}^{N_I} \lambda_k^* \psi(\|x - x_k, t - t_k\|_2), \quad (39)$$

$$r(x) = \sum_{k=1}^{N_B} \lambda_k^* \varphi(x - x_k, 0 - t_k) + \sum_{k=N_B+1}^{N_I} \lambda_k^* \psi(\|x - x_k, 0 - t_k\|_2) - \phi(x), \quad (40)$$

و لذا جواب تقریبی مسأله (۱)-(۵) به صورت زیر است:

$$u^*(x, t) = v_{\alpha}^*(x, t) - r^*(x), \quad (41)$$

$$(42)$$

$$f^*(x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, 0) - \phi''(x) = \sum_{k=1}^{N_B} \lambda_k^* \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x - x_k, 0 - t_k) + \sum_{k=N_B+1}^{N_t} \lambda_k^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(\|x - x_k, 0 - t_k\|_2) - \phi''(x).$$

۶. نتایج عددی

برای سادگی، در همه مثال‌های زیر $T = 1$ است. با افزایش تعداد داده‌های پراکنده، عدد حالت ماتریس A افزایش می‌یابد و ماتریس بدحالت‌تر می‌گردد. بنابراین در مثال‌های زیر N ، تعداد داده‌های پراکنده، بزرگ در نظر گرفته نمی‌شود. همچنین در مثال‌ها توابع پایه‌ای شعاعی گاوسین به کار گرفته شده و خطا از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$RMS(u) = \sqrt{\frac{1}{N_t} \sum_{k=1}^{N_t} (u(x_k, t_k) - u^*(x_k, t_k))^2}, \quad (43)$$

$$RES(u) = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{N_t} (u(x_k, t_k) - u^*(x_k, t_k))^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N_t} (u(x_k, t_k))^2}}, \quad (44)$$

که N_t تعداد نقاط آزمون، $u(x_k, t_k)$ و $u^*(x_k, t_k)$ به ترتیب مقادیر دقیق و عددی در نقاط و $RMS(f)$ و $RES(f)$ به طور مشابه تعریف می‌شود.

مثال ۱. مسأله‌ی مشتقات جزئی معکوس:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x); \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T,$$

$$u(x, 0) = x^2 + \sin(2\pi x); \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(1, t) = 1 + 2t; \quad 0 \leq t \leq T,$$

با شرایط فوق اضافی:

$$u(x^*, t) = x^{*2} + 2x^*t + \sin(2\pi x^*); \quad x^* \in (0, 1), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u(x, 1) = x^2 + 2x + \sin(2\pi x); \quad 0 \leq x \leq 1.$$

را در نظر می‌گیریم [۱]. واضح است جواب دقیق این مسأله عبارت است از:

$$u(x, t) = x^2 + 2xt + \sin(2\pi x); \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1,$$

$$f(x) = 2x - 2 + 4\pi^2 \sin(2\pi x); \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 2t + 2\pi; \quad 0 \leq t \leq 1.$$

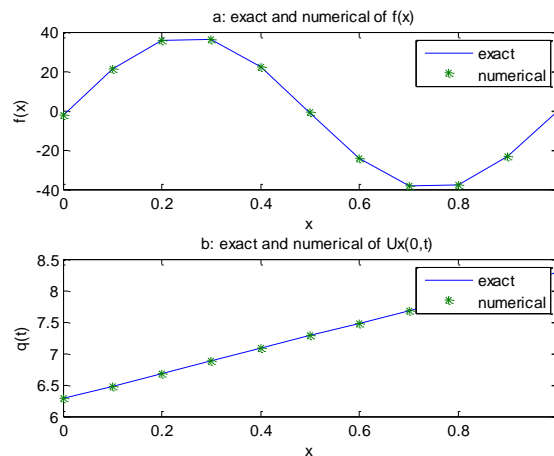
با به‌کارگیری روش MFS-RBF با مقادیر $n = m = s = 10$, $c = 0/1$, $\tau = 2$ و $x^* = 0/01$ برای مثال ۱ خواهیم داشت:

$$\text{RMS}(u(x, t)) = 0,$$

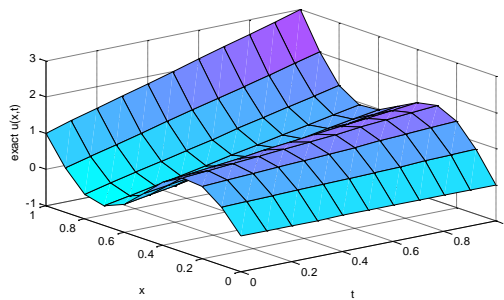
$$\text{RES}(u(x, t)) = 0.$$

جدول ۲. نتایج عددی مثال ۱ با $s = m = n = 8$ و پارامتر شکل $c = 0/1$ و $\tau = 2$

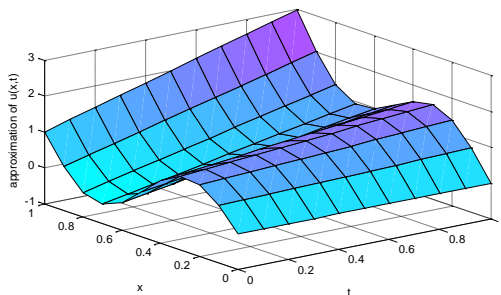
x^*	RMS(q(t))	RMS(f(x))	RMS(u(x,t))	RES(u(x,t))
0.01	2.9183863e-07	2.3630632e-06	4.0185444e-08	3.0931311e-08
0.1	1.7473457e-07	2.9657044e-06	5.9604645e-08	4.5878551e-08
0.2	2.8531070e-07	2.2177042e-06	2.6957215e-08	2.0749354e-08
0.3	4.4620258e-07	1.9806159e-06	4.0185444e-08	3.0931311e-08
0.9	1.0961741e-06	5.8865012e-06	3.6742770e-07	2.8281437e-07



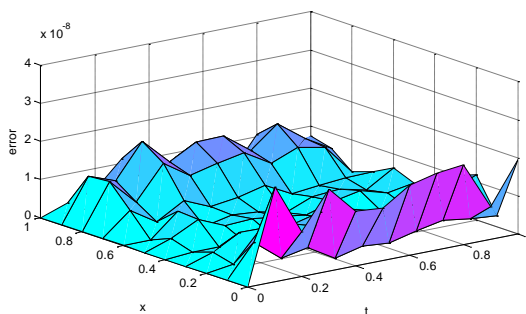
شکل ۱. a: مقدار دقیق و تقریبی $f(x)$, b: مقدار دقیق و تقریبی $q(t) = u_x(0, t)$ از مثال ۱



شکل ۲. تابع دقیق u از مثال ۱



شکل ۳. تقریب تابع u از مثال ۱



شکل ۴. خطای $|u(x,t) - u^*(x,t)|$ با $n = m = s = 10$ ، $c=0/1$ و $x^*=0/01$ از مثال ۱

جدول ۳. مقایسه نتایج عددی روش MFS از [1] با روش MFS-RBF برای مثال ۱.

x^*	RMS(q(t)) MFS[1] (n=m=s=11)	RMS(q(t)) MFS-RBF (n=m=s=10)	RMS(f(x)): MFS[1] (n=m=s=11)	RMS(f(x)) MFS-RBF (n=m=s=10)
0.01	7.9688800e-07	1.8309090e-07	8.3219848e-06	7.3903664e-07
0.1	1.9156389e-06	1.9863460e-06	2.6536207e-05	6.2432887e-06
0.9	5.7529302e-05	4.5924517e-06	1.5510584e-04	7.0240276e-06

در روش MFS-RBF، زمان مورد نیاز برای حل مسأله با استفاده از برنامه نوشته شده در نرم‌افزار متلب با $n=m=s=10$ برای $x^*=0/01$ ، $x^*=0/1$ ، $x^*=0/9$ به ترتیب $۲/۱۹۱۷۷۳$ ، $۲/۱۷۸۶۶۷$ و $۲/۱۹۶۵۸۲$ ثانیه است.

مثال ۲. مسأله معکوس زیر را در نظر می‌گیریم [۱]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + f(x); \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T,$$

$$u(x,0) = 0; \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,t) + 3u(1,t) = \pi(e^{-\pi^2 t} - 1); \quad 0 \leq t \leq T,$$

که در آن شرایط فوق اضافی به صورت زیر است:

$$u(x^*,t) = (1 - e^{-\pi^2 t}) \sin(\pi x^*); \quad x^* \in (0,1), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u(x,1) = 0.9999 \sin(\pi x); \quad 0 \leq x \leq 1.$$

جواب تحلیلی این مسأله برابر است با:

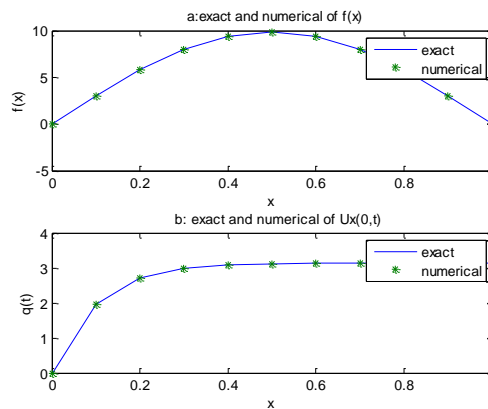
$$u(x,t) = (1 - e^{-\pi^2 t}) \sin(\pi x); \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1,$$

$$f(x) = \pi^2 \sin(\pi x); \quad 0 \leq x \leq 1,$$

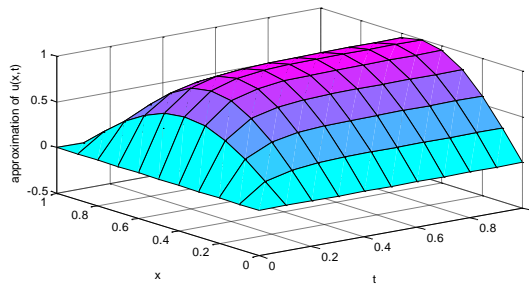
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \pi(1 - e^{-\pi^2 t}); \quad 0 \leq t \leq 1.$$

جدول ۴. نتایج عددی مثال ۲ با $n = m = s = 11$ و پارامتر شکل $c = 0/1$ و $\tau = 1/5$

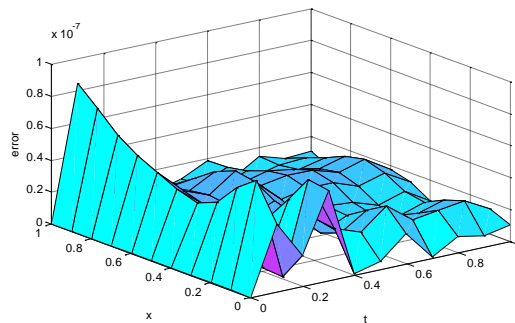
x^*	RMS(q(t))	RMS(f(x))	RMS(u(x,t))	RES(u(x,t))
0.01	3.1535552e-07	1.3979788e-06	5.8727579e-08	3.81535552e-08
0.1	4.4528417e-07	3.8306166e-06	5.6334137e-08	3.6946279e-08
0.3	2.9833279e-07	5.2727391e-06	1.6226305e-07	1.0641888e-07
0.9	1.4823901e-05	3.2437198e-05	5.1837337e-06	3.1837337e-06



شکل ۵. a: مقدار دقیق و تقریبی f ، b: مقدار دقیق و تقریبی $q(t) = u_x(0,t)$ از مثال ۲



شکل ۶. تقریب تابع u از مثال ۲



شکل ۷. خطای $|u(x,t) - u^*(x,t)|$ با $n = m = s = 11$ ، $c = 1/10$ و $\tau = 1/10$ از مثال ۲

جدول ۵. مقایسه نتایج عددی روش MFS از [۱] با روش MFS-RBF برای مثال ۲.

x^*	RMS(q(t)) MFS[1]	RMS(q(t)) MFS-RBF	RMS(f(x)): MFS[1]	RMS(f(x)) MFS-RBF
0.1	9.4214829e-07	1.5861499e-07	2.6702419e-06	4.0180939e-07
0.2	1.4025782e-06	2.1991207e-07	2.5899801e-06	9.4510682e-07
0.9	1.4095266e-05	3.6835447e-06	2.4934692e-05	8.4189023e-06

در جدول ۵ برای هر دو روش MFS و MFS-RBF، $n = m = s = 11$ ، $c=0/01$ ، $\tau = 1/2$ است به جزء در حالت $x^*=0/9$ در روش MFS-RBF که $n = m = s = 10$ است. در روش MFS-RBF، زمان مورد نیاز برای حل مسأله برای $x^*=0/1$ ، $x^*=0/2$ و $x^*=0/9$ به ترتیب $۱/۸۳۴۳۹$ ، $۱/۸۳۴۷۹۳$ و $۲/۲۴۶۶۱۳$ ثانیه است.

مثال ۳. مسأله معکوس:

$$0 < t < T, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x); \quad 0 < x < 1,$$

$$u(x, 0) = \sin x + x^2; \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = \cos(1) + 2; \quad 0 \leq t \leq T,$$

با شرایط فوق اضافی:

$$u(x^*, t) = e^{-t} \sin x^* + x^{*2}; \quad x^* \in (0, 1), \quad 0 \leq t \leq T,$$

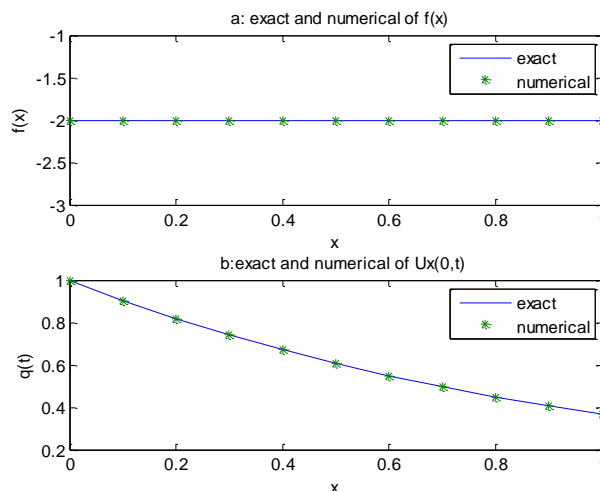
$$u(x, 1) = e^{-1} \sin x + x^2; \quad 0 \leq x \leq 1,$$

را در نظر می‌گیریم که جواب دقیق آن برابر است با:

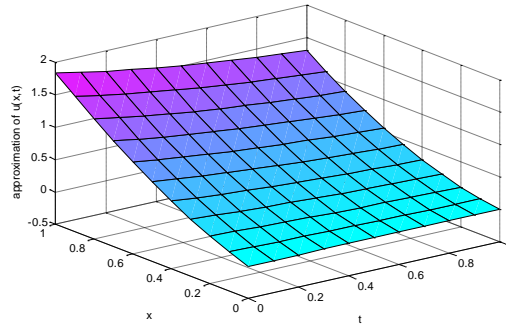
$$u(x, t) = e^{-t} \sin x + x^2; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$f(x) = -2; \quad 0 \leq x \leq 1,$$

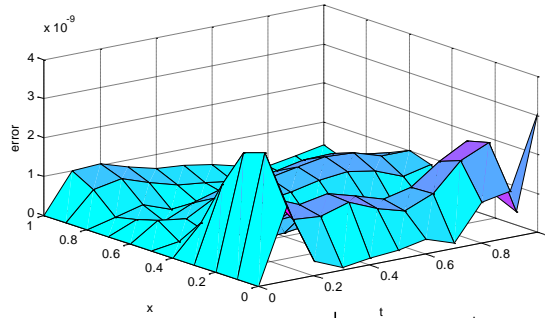
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = e^{-t}; \quad 0 \leq t \leq 1.$$



شکل ۸. a: مقدار دقیق و تقریبی f، b: مقدار دقیق و تقریبی $q(t) = u_x(0, t)$ از مثال ۳



شکل ۹. تقریب تابع u از مثال ۳



شکل ۱۰. خطای $|u(x,t) - u^*(x,t)|$ با $n = m = s = 8$ ، $c = 0/1$ ، $x^* = 0/01$ و از مثال ۳

جدول ۶. نتایج عددی مثال ۳ با $s = m = n = 8$ و پارامتر شکل $c = 0/1$ و $\tau = 2$

x^*	RMS(q(t))	RMS(f(x))	RMS(u(x,t))	RES(u(x,t))
0.01	1.1567644e-08	0	0	0
0.1	3.4870755e-08	7.1885907e-08	3.1385208e-09	2.2464346e-09
0.2	7.5100068e-08	1.0782886e-07	3.1385208e-09	2.2464346e-09
0.3	1.3394303e-07	2.6897243e-07	0	0
0.9	3.3003637e-08	5.0831012e-08	3.1385208e-09	2.2464346e-09

مثال ۴. به عنوان آخرین مثال، روش MFS-RBF را برای تقریب عبارت منبع گرمایی ناپیوسته و تابع مجهول u در مسأله

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + f(x);$$

$$u(x,0) = 0; \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0; \quad 0 \leq t \leq T,$$

با شرط فوق اضافی

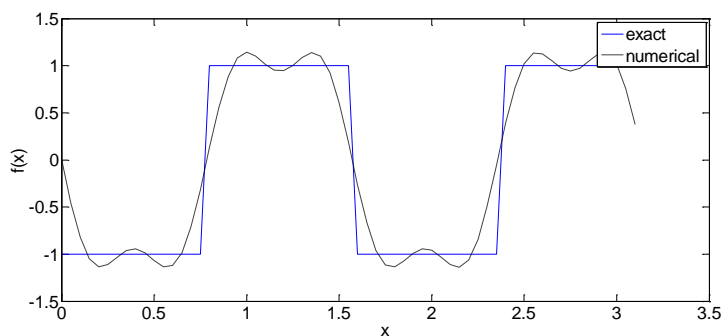
$$u(x,T) = p(x); \quad 0 < x < \pi,$$

به کار می‌گیریم. جواب و عبارت منبع دقیق این مسأله به صورت زیر است:

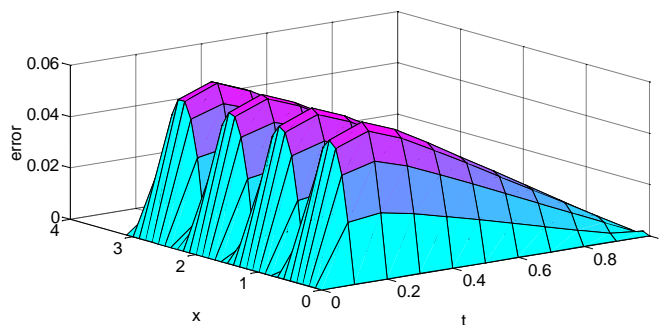
$$u(x,t) = 2.357852 \times 10^{-5} \times t_1 \times \sin(4x_1) \times (432 \times \sin^4(4x_1) - 1040 \times \sin^2(4x_1) + 3885),$$

$$f(x) = \begin{cases} -1; & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 1; & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ -1; & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}, \\ 1; & \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

که با قرار دادن $n = 17$ ، $s = 1$ ، $c = 0$ مقدار خطا به صورت $RMS(f) = 0/3256783$ و $RMS(u) = 0$ است. شکل ۱۱ نمودار دقیق و تقریبی $f(x)$ و شکل ۱۲ خطای حاصل از تقریب تابع u را نشان می‌دهد.



شکل ۱۱. مقدار دقیق و تقریبی f از مثال ۴



شکل ۱۲. خطای $|u(x,t) - u^*(x,t)|$ از مثال ۴

نتیجه‌گیری

این مقاله با استفاده از جواب‌های بنیادی معادله گرما و توابع پایه‌ای شعاعی و با به کارگیری روش منظم‌سازی تیخانف در مسأله هدایت گرمایی معکوس، به جستجوی یافتن مقادیر منبع گرمایی وابسته به مکان و شار گرمایی در $x=0$ پرداخته است. روش جواب‌های بنیادی و روش توابع پایه‌ای شعاعی روش‌های بدون شبکه هستند که روش جواب‌های بنیادی تنها به داده‌های مرزی وابسته است و روش توابع پایه‌ای شعاعی معمولاً در نقاط مرزی از دقت کمتری نسبت به نقاط درونی برخوردار هستند. به همین دلیل در روش عددی $MFS-RBF$ از جواب‌های بنیادی در نقاط مرزی و توابع پایه‌ای شعاعی در نقاط درونی جهت تقریب جواب مسأله دیفرانسیل جزئی سهموی معکوس استفاده شد. با توجه به نتایج عددی، دقت و کارایی روش حاصل شد.

References

1. Shahrezaee A. M., Rostamian M., "Determination of a source term and boundary heat flux in an inverse heat equation", *Information and Computing Science*, 8(2) (2013) 103-114.
2. Cannon J.R., *The One-Dimensional Heat Equation*, Addison Wesley, (1984).
3. Cannon J.R., Van der hoek J., "An implicit finite difference scheme for the diffusion equation subject to the specification of mass in a portion of the domain", *Numerical Solutions of Partial Differential Equations*, (1982) 527-539.
4. Farcas A., Lesnic D., "The boundary-element method for the determination of a heat source dependent on one variable", *Engineering Mathematics*, 54(4) (2006) 375-388.
5. Parzlivand F., Shahrezaee A.M., "Gaussian Radial Basis Functions for the solution of an inverse problem of mixed parabolic-hyperbolic type", *Pure and Applied mathematics*, 8(2) (2015) 239-254.
6. Wen J., Cheng X., "An efficient approximation method for the nonhomogeneous backward heat conduction problems", *Engineering and Applied Sciences*, ISSN:2394-3661, 5(2018) 21-28 .
7. Johansson T., "Determination of a spacewise dependent heat source", *Computational and Applied Mathematics*, 209(1) (2007) 66-80.
8. Amirfakhrian M., Arghand M., Kansa E.J., "A new approximate method for an inverse time-dependent heat source problem using fundamental solutions and RBFs", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 64(2016) 278-289.
9. Yousefi S.A., Rashedi k., "Ritz-Galerkin method for solving a class of Inverse Problems in the Parabolic equation", *International Journal of Nonlinear Science*, 12(4) (2011) 498-502.
10. Geng F., Lin Y., "Application of the variational iteration method to inverse heat source problems", *Computers and Mathematics*, **58** (2009) 2098-2102.
11. Beck J. V., Blackwell, B., Clair, J.R., *Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems*, Wiley, New York, (1985).
12. Cannon J.R., "Determination of an unknown heat source from overspecified boundary data", *Siam Journal on Numerical Analysis*, 5 (2) (1968) 275-286.
13. Cannon J.R., Duchateau P., "Structural identification of an unknown source term in a heat equation", *Inverse Problems*, 14 (3) (1998). 535-551.
14. Fatullayev A.G., "Numerical method of identification of an unknown source term in a heat equation", *Mathematical Problems in Engineering*, 8(2) (2002) 161-168.

15. Savateev E.G., On problems of determining the source function in a parabolic equation, Inverse and Ill-Posed Problems, 3(1) (1995) 83-102.
16. Chen H.-T., Lin S.-Y., Fang L.-C., Estimation of surface temperature in two-dimensional inverse heat conduction problems, Heat and Mass Transfer, 44(8) (2001)1455-1463.
17. Yang Y.C., A sequential method to estimate the strength of the heat source based on symbolic computation. Heat and Mass Transfer, 41(14) (1998) 2245-2252.
18. Johansson B.T, Lesnic D., A procedure for determining a spacewise dependent heat source and the initial temperature, Applicable Analysis, 87(3) (2008) 265-276.
19. Yang C.-y., The determination of two moving heat sources in two-dimensional inverse heat problem, Applied Mathematical Modelling, 30(3) (2006) 278-292.
20. Kupradze V.D. and Aleksidze M., The method of functional equations for the approximate solution of certain boundary value problems. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 4(4) (1964) 82-126.
21. Beck J.V., Blackwell B., Haji-Sheikh A., Comparison of some inverse heat conduction methods using experimental data. Heat and Mass Transfer, 39(17) (1996) 3649-3657.
22. Phillips, D. L., A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind, Journal of the ACM, 9(1) (1962) 84-97.
23. Wu Z., Hermite- Birkhoff interpolation for scattered data by radial basis function. Approximation theory applications, 8(2) (1992) 1-11.
24. Franke C., Schaback R., Convergence order estimates of meshless collocation methods using radial basis functions, Advances in computational mathematics, 8(4) (1998) 381-399.
25. Wu Z.M., Radial basis function scattered data interpolation and the meshless method of numerical solution of PDEs, Chinese Journal of Engineering Mathematics, 19 (2) (2002) 1–12.
26. Liu G.R., An introduction to meshfree methods and their programming, Springer, (2005).
27. Chen C.S., Karageorghis A., Smyrlis Y.S., The method of fundamental solutions: a meshless method, Dynamic, (2008).