

حل معادلات دیفرانسیل-انتگرال جزئی سهموی با توابع پایه‌ای شعاعی گاوسی و درجه دوم چندگانه معکوس

فاطمه السادات آقایی میبیدی^۱، محمد حسین حیدری^{۲*}، فرید (محمد) مالک قائینی^۱،
محمد حسین اکرمی^۱

۱. دانشگاه یزد، دانشکده ریاضی،

۲. دانشگاه صنعتی شیراز، دانشکده ریاضی

پذیرش ۹۸/۰۴/۲۶

دریافت ۹۷/۰۹/۰۱

چکیده

در این مقاله، یک روش محاسباتی جدید بر مبنای توابع پایه‌ای شعاعی برای حل یک رده مهم از معادلات دیفرانسیل-انتگرال جزئی سهموی کسری پیشنهاد می‌شود. مشتق کسری استفاده شده در این نوع معادلات از نوع کاپوتو است. در روش پیشنهادی توابع پایه‌ای شعاعی گاوسی و درجه دوم چندگانه معکوس استفاده شده است. ایده اصلی به کار رفته در روش مذکور این است که در ابتدا عملگر مشتق کسری کاپوتو که در حالت کلی یک عملگر انتگرال با هسته تکین است را به یک عملگر انتگرال غیر تکین معادل تبدیل می‌کنیم. سپس از توابع پایه‌ای شعاعی معرفی شده برای تقریب تابع جواب مجهول مسئله استفاده می‌کنیم. مزیت اصلی روش پیشنهاد شده، به دست آوردن جواب‌های تقریبی هموار برای مسئله بررسی شده است.

واژه‌های کلیدی: معادلات دیفرانسیل-انتگرال جزئی سهموی کسری، توابع پایه‌ای شعاعی گاوسی، توابع پایه‌ای شعاعی درجه دوم چندگانه معکوس، روش هم‌محلی، روش انتگرال گیری گاوس-لژاندر.
کد موضوع بندی ریاضی [2010]: 45K05، 47Gxx، 26A33

مقدمه

تحلیل رفتارهای نوسانی پدیده‌های طبیعی با استفاده از معادلات کسری در سال‌های اخیر ریاضی‌دانان، فیزیک‌دانان و مهندسان را جذب کرده است. معادلات دیفرانسیل کسری، معادلات دیفرانسیلی هستند که مشتقاتشان از مرتبه غیر صحیح هستند. دلیل استفاده از مشتق کسری این است که بسیاری از سیستم‌های فیزیکی در دنیای واقعی به وسیله دینامیک مرتبه کسری ارائه شده و رفتارشان به وسیله معادلات دیفرانسیل کسری بیان می‌شود. مهم‌ترین مزیت استفاده از معادلات دیفرانسیل کسری خاصیت غیرموضعی بودن آنها است، یعنی وضعیت بعدی دستگاه دینامیکی به وضعیت کنونی آن و هم‌چنین تمام وضعیت‌های قبلی آن بستگی دارد. مثال‌هایی از کاربرد حسابان کسری در فیزیک در شاخه‌های مکانیک کوانتوم و هسته‌ای، معادلات: گرما، کلاین-گوردن و پخش در گداخت هسته‌ای هستند. خاصیت حافظه‌دار بودن مشتق و انتگرال کسری در مدل کردن سامانه‌های حافظه دار مهم است [۳]. به دلیل کاربرد زیاد در رشته‌های پزشکی، مهندسی به‌ویژه مکانیک و علوم پایه به‌ویژه فیزیک و آمار این معادلات مورد توجه دانشمندان است [۱۶]. هدف این مقاله، ارائه روشی عددی بر مبنای توابع پایه‌ای شعاعی برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرال از مرتبه کسری است. ایده اصلی این روش تبدیل عملگر مشتق کسری کاپوتو که در حالت کلی یک عملگر انتگرال با هسته تکین است به یک عملگر انتگرال غیر تکین معادل و سپس تقریب تابع جواب مجهول به صورت ترکیبی خطی از توابع پایه‌ای شعاعی و به دست آوردن ضرایب بسط مجهول است. توابع پایه‌ای شعاعی به طور معمول بر اساس نرم اقلیدسی تعریف می‌شوند و به این دلیل از برنامه نوشته شده در یک بعد

می‌توان با تغییراتی در بعدهای دیگر نیز استفاده کرد. از آن‌جاکه یافتن جواب تحلیلی بسیاری از معادلات کسری دشوار است، برای یافتن جوابی برای آنها از روش‌های عددی استفاده می‌کنیم. روش‌های مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی یکی از ابزارهای مهم کاربردی برای تقریب توابع چندمتغیره و داده‌های پراکنده روی نواحی نامنظم و مؤثر در حل معادلات دیفرانسیل و انتگرال است [۲]. رده‌های متفاوتی از معادلات انتگرال-دیفرانسیل جزئی کسری از قبیل سهموی^۱، هذلولوی^۲ و بیضوی^۳ هستند که نخستین بار کانزا^۴ از آنها استفاده کرد [۶]. به‌کارگیری روش توابع پایه‌ای شعاعی که در واقع روشی بدون شبکه است، در ابعاد بالا و نواحی نامنظم، ساده است.

ادامه این مقاله بدین‌صورت سازمان‌دهی شده است: در بخش ۲ برخی از تعاریف مهم و مورد نیاز در ارتباط با حسابان کسری و روش انتگرال‌گیری عددی بیان می‌شود. در بخش ۳ توابع پایه‌ای شعاعی و خواص آنها بررسی می‌شود. مسئله مورد نظر در بخش ۴ مطرح می‌شود. در بخش ۵ روش پیشنهادی بر مبنای توابع پایه‌ای شعاعی گاوسی و درجه دوم چندگانه معکوس توضیح داده می‌شود. در بخش ۶ برای بررسی دقت روش پیشنهادی چند مثال عددی حل می‌شود. در پایان یک نتیجه‌گیری مختصر می‌آوریم.

تعاریف و اصطلاحات

در این بخش برخی از تعاریف مهم و مورد نیاز در ارتباط با حسابان کسری را از مرجع [۲] بیان می‌کنیم. هم‌چنین با توجه به ضرورت استفاده از انتگرال‌گیری عددی در روش پیشنهاد شده در مقاله، روش انتگرال‌گیری گاوس-لژاندر^۵ به‌طور مختصر توضیح داده شده است.

۱. حسابان کسری

تعاریف متفاوتی از مشتق کسری در دسترس است. با این حال سه تعریف از مشتق کسری نسبت به بقیه تعاریف دارای کاربردهای بیش‌تری هستند و در مدل‌بندی مسائل در زمینه‌های متفاوت علمی به‌کار می‌روند. اولین تعریف، که نتیجه تحقیقات گرونوالد^۶ در سال ۱۸۶۷ و لت‌نیکوف^۷ در سال ۱۸۶۸ است، مشتق کسری گرونوالد-لت‌نیکوف نامیده می‌شود. پس از آن در ادامه کارهای لیوویل^۸ و ریمان^۹، تعریف دیگری از مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری به‌وسیلهٔ اولدهام^{۱۰} و اسپانیر^{۱۱} معرفی شد که مشتق و انتگرال ریمان-لیوویل نامیده می‌شود. هم‌چنین مشتق کسری کاپوتو^{۱۲} نیز در سال ۱۹۷۶ به‌وسیلهٔ کاپوتو در بررسی‌هایش در زمینهٔ ویسکوالاستیسیته^{۱۳} معرفی شد. در این‌جا فقط تعریف کاپوتو از مشتق کسری که در این مقاله استفاده شده است را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱. فرض کنید $t > 0$ و $\beta \in \mathbb{R}$. تابع حقیقی مقدار f متعلق به فضای C_β است، هرگاه عدد حقیقی

$$\rho > \beta \text{ وجود داشته باشد به طوری که } f(t) = t^\rho f_1(t) \text{ که در آن } f_1 \in C[0, \infty).$$

تعریف ۲. با فرض $t > 0$ و $\beta \in \mathbb{R}$ ، گوییم تابع حقیقی مقدار f متعلق به فضای C_β^n ، $n \in \mathbb{Z}^+$ است، اگر و تنها اگر $f^{(n)} \in C_\beta$.

تعریف ۳. فرض کنید $0 < n - 1 < \beta \leq n$ و $f \in C_\beta$. در این صورت مشتق کسری کاپوتو مرتبه β از تابع

1. Parabolic
2. Hyperbolic
3. Elliptic
4. Kansa
5. Gauss-Legendre Integration
6. Grunwald
7. Letnikov
8. Liouville
9. Riemann
10. Oldham
11. Spanier
12. Caputo
13. Viscoelasticity

f بدین صورت تعریف می‌شود:

$${}_0^c D_t^\beta f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\beta-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, & n-1 < \beta < n, \\ f^{(n)}(t), & \beta = n. \end{cases} \quad (1)$$

نتیجه ۱. مشتق کسری تابع تک‌جمله‌ای با استناد به رابطه (۱) و انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء به صورت (۲) به دست می‌آید:

$${}_0^c D_t^\beta t^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\beta)} t^{m-\beta}, \quad m \geq n. \quad (2)$$

تعریف ۴. تابع میتاگ - لفلر^۱ با دو پارامتر مثبت ϑ و μ به وسیله سری توانی (۳) تعریف می‌شود

$$E_{\vartheta, \mu}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\vartheta j + \mu)}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3)$$

۲. روش انتگرال‌گیری عددی گاوس

در روش انتگرال‌گیری عددی گاوس^۲، از نقاط یا گره‌هایی با فاصله‌های نامساوی استفاده می‌شود. به این منظور گره‌های $x_1, x_2, \dots, x_{\hat{m}}$ در بازه $[a, b]$ و ضرایب $w_1, w_2, \dots, w_{\hat{m}}$ به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که فرمول

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^{\hat{m}} w_i f(x_i), \quad (4)$$

برای چندجمله‌ای‌های با درجه حداکثر $2\hat{m} - 1$ دقیق باشد [۱۵]. واضح است که برای بازه دلخواه $[a, b]$ رابطه (۵) را داریم:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{\hat{m}} w_i f\left(\frac{(b-a)x_i + (b+a)}{2}\right), \quad (5)$$

که در آن ضرایب $w_1, w_2, \dots, w_{\hat{m}}$ وزن‌ها و $x_1, x_2, \dots, x_{\hat{m}}$ صفرهای چندجمله‌ای لژاندر از درجه \hat{m} هستند.

توابع پایه‌ای شعاعی و مفاهیم مربوطه

در این بخش به‌طور مختصر برخی از تعاریف مورد نیاز در ارتباط با توابع پایه‌ای شعاعی ارائه شده است. همچنین درون‌یابی به‌وسیله این توابع به‌طور خلاصه تشریح شده است.

۱. تعاریف و مفاهیم

تعریف ۵. ([۲]). تابع $\phi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ را یک تابع شعاعی می‌نامند هرگاه تابع یک متغیره $\psi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری که $\phi(x) = \psi(r)$ که در آن، $r = \|x\|$ ، $x \in \mathbb{R}^d$ و $\|\cdot\|$ یک نرم روی \mathbb{R}^d است که d بعد فضا است و به‌طور معمول نرم مربوطه، نرم اقلیدسی انتخاب می‌شود.

نتیجه ۲. از تعریف ۱ نتیجه می‌شود که برای یک تابع شعاعی ϕ و دو بردار $x, y \in \mathbb{R}^d$ داریم:

$$\|x\| = \|y\| \Rightarrow \phi(x) = \psi(\|x\|) = \psi(\|y\|) = \phi(y). \quad (6)$$

ملاحظه ۱. دنباله $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^n$ از توابع پایه‌ای شعاعی روی \mathbb{R}^d وابسته به تابع $\psi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ و دنباله نقاط $\{x_i\}_{i=1}^n$ به صورت

$$\phi_i(x) = \psi(\|x - x_i\|), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

تعریف می‌شود که در آن x_i ها مراکز توابع پایه‌ای شعاعی می‌نامیم.

تعریف ۶. یک ماتریس حقیقی متقارن $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ معین مثبت است هرگاه صورت درجه دوم آن مثبت باشد، یعنی برای هر $C = [c_1, c_2, \dots, c_n]$ داشته باشیم:

$$C^t A C = \sum_{i,j=1}^n c_i A_{ij} c_j > 0. \quad (7)$$

1. Mittag-Leffler function
2. Gauss

تعریف ۷. یک تابع $\phi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ روی \mathbb{R}^d معین مثبت است هرگاه ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ با درایه‌های $a_{ij} = \phi \|x_i - x_j\|$, $1 \leq i, j \leq n$ برای هر n نقطه متمایز $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ و برای هر بردار حقیقی $C = [c_1, c_2, \dots, c_n] \in \mathbb{R}^d$ صورت درجه دوم معین مثبت باشد یعنی داشته باشیم:

$$C^t A C = \sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j \phi(x_i - x_j) > 0. \quad (۸)$$

۲. روش درون‌یابی با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی

مجموعه n نقطه متمایز x_i و مقادیر متناظر آنها $f_i = f(x_i)$ مفروض است. در این صورت درون‌یاب تابع f با استفاده از تابع پایه‌ای شعاعی $\phi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ روی نقاط متمایز $\{x_i\}_{i=1}^n$ به صورت (۹) تعریف می‌شود:

$$s(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi(\|x - x_i\|). \quad (۹)$$

با قراردادن نقاط هم‌محلی $\{x_j\}_{j=1}^n$ در طرفین رابطه (۹) به یک دستگاه معادلات جبری می‌رسیم. تابع درون‌یاب پایه‌ای شعاعی (۹) برای مقادیر مفروض در نقاط $\{x_j\}_{j=1}^n$ با حل دستگاه معادلات خطی

$$s(x_j) = f_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

به دست می‌آید. در حقیقت شرط درون‌یابی همین است. رابطه (۹) را می‌توان به صورت دستگاه معادلات خطی $A\Lambda = F$ نوشت، که در آن $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, $\Lambda = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$, $F = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ است. ماتریس حاصل از درون‌یابی با کمک توابع پایه‌ای شعاعی به دو صورت منفرد و نامنفرد است. برای گاوسی و درجه دوم چندگانه معکوس ماتریس‌های درون‌یاب A ، نامنفرد هستند. در واقع اگر از توابع پایه‌ای شعاعی معین مثبت برای تشکیل ماتریس A استفاده کنیم، آن‌گاه ماتریس A نیز معین مثبت است و دستگاه همیشه دارای جواب یکتا است [۲].

معادلات دیفرانسیل - انتگرال جزئی سهموی کسری

معادلات دیفرانسیل - انتگرال جزئی سهموی کسری در فیزیک و به خصوص در مسئله انتقال گرما کاربرد دارند [۸-۱۱]. این معادلات را به صورت

$${}^c D_t^\beta u(x, t) = g(x, t) + u_{xx}(x, t) + \int_0^t k(x, t, \tau) u(x, \tau) d\tau, \quad (x, t) \in \Omega = [a, b] \times [0, T], \quad 0 < \beta \leq 1. \quad (۱۰)$$

و با شرایط اولیه و مرزی

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [a, b], \quad u(a, t) = h(t), \quad u(b, t) = l(t), \quad t \in [0, T], \quad (۱۱)$$

در نظر گرفته و فرض می‌کنیم توابع g, k, f, h, l همگی روی دامنه‌هایشان پیوسته هستند. معادله دیفرانسیل - انتگرال بیان شده در رابطه (۱۰) و (۱۱) را می‌توان به یک شکل معادل ساده‌تر تبدیل کرد. برای این منظور با قرار دادن $n = 1$ در رابطه (۱۰) عملگر مشتق کسری کاپوتو (که در حالت کلی یک عملگر انتگرال با هسته تکین است) را به یک عملگر انتگرال غیر تکین تبدیل می‌کنیم. با انتگرال‌گیری جزء به جزء از طرف چپ (۱۰)، و آوردن یک عبارت حاصل از انتگرال‌گیری جزء به جزء به سمت راست، داریم:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{1-\beta} u_{\tau\tau}(x, \tau) d\tau = g(x, t) - \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} t^{1-\beta} u_t(x, 0) + u_{xx}(x, t) + \int_0^t k(x, t, \tau) u(x, \tau) d\tau. \quad (۱۲)$$

معادله (۱۲) یک معادله دیفرانسیل - انتگرال کسری با هسته نامنفرد است که حل عددی آن نسبت به معادله اصلی ارائه شده در رابطه (۱۰) ساده‌تر است. حال می‌توانیم از توابع پایه‌ای شعاعی برای حل معادله بیان شده در رابطه (۱۲)

همراه با شرایط اولیه و مرزی در رابطه (۱۱) استفاده کنیم. کافی است به جای u تقریب توابع پایه‌ای شعاعی مورد نظر را در (۱۱) قرار دهیم. با تشکیل تابع مانده^۱ در نهایت ضرایب مجهول α_i به دست می‌آیند.

حل عددی معادلات دیفرانسیل - انتگرال جزئی سهموی کسری با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی

در این بخش از توابع پایه‌ای شعاعی گاوسی و درجه دوم چندگانه معکوس برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرال جزئی سهموی کسری استفاده می‌کنیم. به این منظور تابع u را با این دو نوع توابع پایه‌ای شعاعی تقریب زده در معادله (۱۲) و شرایط اولیه و مرزی (۱۱) قرار می‌دهیم. با جای‌گذاری نقاط هم‌محلی در تابع مانده متناظر با معادله دیفرانسیل-انتگرال در هریک از این دو مورد به یک دستگاه معادلات جبری می‌رسیم که می‌توانیم ضرایب مجهول و در نتیجه جواب تقریبی معادله را به دست بیاوریم.

۱. تقریب گاوسی

در این جا از توابع پایه‌ای شعاعی گاوسی برای حل معادله دیفرانسیل-انتگرال جزئی سهموی کسری ارائه شده در رابطه (۱۲) استفاده می‌کنیم. توجه داریم که فرم گاوسی به صورت جدایی‌پذیر برحسب زمان و مکان است. به این منظور رابطه (۱۳) را برای تقریب $u(x, t)$ در نظر می‌گیریم:

$$u(x, t) \simeq \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \exp\left(-c \left[(x - x_i)^2 + (t - t_j)^2\right]\right) = \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \phi_i(x) \phi_j(t), \quad (13)$$

که در آن $\phi_i(x) = \phi(x - x_i)$ و $\phi_j(t) = \phi(t - t_j)$

برای پیاده‌سازی روش، نقاط هم‌محلی را به صورت (۱۴) در نظر می‌گیریم:

$$x_i = a + \frac{b-a}{N_1} i, \quad i = 0, 1, \dots, N_1, \quad t_j = \frac{T}{N_2} j, \quad j = 0, 1, \dots, N_2. \quad (14)$$

با جای‌گذاری رابطه (۱۳) در رابطه (۱۲) داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \phi_i(x) \int_0^t (t-\tau)^{1-\beta} \phi''_j(\tau) d\tau = g(x, t) + \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \phi''_i(x) \phi_j(t) \\ & - \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} t^{1-\beta} \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \phi_i(x) \phi'_j(0) + \int_0^t k(x, t, \tau) \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \phi_i(x) \phi_j(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (15)$$

برای محاسبه انتگرال‌های ظاهر شده در رابطه (۱۵)، بازه انتگرال‌گیری را از $[0, t]$ به $[-1, 1]$ تبدیل و از روش انتگرال‌گیری عددی استفاده می‌کنیم. برای این منظور با استفاده از تغییر متغیر

$$\tau(t, \xi) = \frac{t}{2} \xi + \frac{t}{2}, \quad -1 \leq \xi \leq 1, \quad (16)$$

داریم:

$$\int_0^t (t-\tau)^{1-\beta} \phi''_j(\tau) d\tau = \frac{t}{2} \int_{-1}^1 (t-\tau(t, \xi))^{1-\beta} \phi''_j(\tau(t, \xi)) d\xi \triangleq \Theta_1(t), \quad (17)$$

و

$$\int_0^t \left(k(x, t, \tau) \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \phi_i(x) \phi_j(\tau) \right) d\tau = \frac{t}{2} \int_{-1}^1 k(x, t, \tau(t, \xi)) \left(\sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \phi_i(x) \phi_j(\tau(t, \xi)) \right) d\xi \triangleq \Theta_2(x, t). \quad (18)$$

با به‌کاربردن روش انتگرال‌گیری گوس - لژاندر $(\hat{m} + 1)$ نقطه‌ای با نقاط گروه‌ای ξ_r در بازه $[-1, 1]$ و وزن‌های متناظرشان W_r برای محاسبه انتگرال‌های موجود در روابط (۱۷) و (۱۸) داریم:

$$\Theta_1(t) \simeq \frac{t}{2} \sum_{r=0}^{\hat{m}} w_r (t - \tau(t, \xi_r))^{1-\beta} \phi_j''(\tau(t, \xi_r)) \triangleq \tilde{\Theta}_1(t), \quad (19)$$

و

$\Theta_2(x, t) \simeq \frac{t}{2} \sum_{r=0}^{\hat{m}} w_r k(x, t, \tau(t, \xi_r)) (\sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \phi_i(x) \phi_j(\tau(t, \xi_r))) \triangleq \Theta_2(x, t)$. (۲۰)
با استفاده از تقریبات (۲۰)-(۱۷) تابع باقی‌مانده معادله (۱۵) را تشکیل داده و از آن برای یافتن ضرایب مجهول استفاده می‌کنیم

$$\mathcal{R}(x, t) \triangleq \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \phi_i(x) \tilde{\Theta}_1(t) - \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \phi_i''(x) \phi_j(t) + \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} t^{1-\beta} \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \phi_i(x) \phi_j'(0) - g(x, t) - \tilde{\Theta}_2(x, t). \quad (21)$$

برای یافتن ضرایب مجهول معادله ابتدا یک دستگاه معادلات جبری شامل $(N_1 - 1)N_2$ معادله را با مساوی صفر قرار دادن $\mathcal{R}(x, t)$ در نقاط هم مکانی به صورت (۲۲) به دست می‌آوریم:

$$\mathcal{R}(x_i, t_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2. \quad (22)$$

سپس با استفاده از شرایط اولیه و مرزی در رابطه (۱۱) به تعداد $N_1 + 2N_2 + 1$ معادله را به صورت (۲۳) تولید می‌کنیم:

$$\Lambda_1(x_r) \triangleq \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \phi_i(x_r) \phi_j(0) - f(x_r) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, N_1 - 1,$$

$$\Lambda_2(t_r) \triangleq \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \phi_i(a) \phi_j(t_r) - h(t_r) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, N_2,$$

$$\Lambda_3(t_r) \triangleq \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \phi_i(b) \phi_j(t_r) - l(t_r) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, N_2. \quad (23)$$

معادله‌های تولید شده در رابطه (۲۲) به همراه معادلات تولید شده در رابطه (۲۳) تشکیل یک دستگاه معادلات جبری با $(N_1 + 1)(N_2 + 1)$ معادله و مجهول می‌دهد. با حل این دستگاه و مشخص کردن ضرایب مجهول α_{ij} یک جواب تقریبی برای مسئله (۱۲) به کمک رابطه (۱۳) حاصل می‌شود.

۲. تقریب درجه دوم چندگانه معکوس

با تقریب تابع $u(x, t)$ برحسب توابع پایه‌ای شعاعی درجه دوم چندگانه معکوس داریم:

$$u(x, t) \simeq \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \phi_{ij}(x, t), \quad (24)$$

که در آن ضرایب مجهول اند که باید تعیین شوند و $\phi_{ij}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{c^2 + (x-x_i)^2 + (t-t_j)^2}}$ توابع پایه‌ای بررسی شده است. با جای‌گذاری (۲۴) در (۱۲) داریم:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \int_0^t (t-\tau)^{1-\beta} \phi_{\tau\tau_{ij}}(x, t) d\tau = g(x, t) + \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \phi_{xx_{ij}}(x, t) - \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} t^{1-\beta} \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \phi_{t_{ij}}(x, 0) + \int_0^t (k(x, t, \tau) \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \phi_{ij}(x, \tau)) d\tau. \quad (25)$$

به کمک تغییر متغیر بیان شده در رابطه (۱۶) بازه انتگرال‌گیری انتگرال‌های ظاهر شده در رابطه (۲۵) را از $[0, t]$ به $[-1, 1]$ تبدیل کرده و داریم:

$$\int_0^t (t-\tau)^{1-\beta} \phi_{\tau\tau_{ij}}(x, \tau) d\tau = \frac{t}{2} \int_{-1}^1 (t-\tau(t, \xi))^{1-\beta} \phi_{\tau\tau_{ij}}(x, \tau(t, \xi)) d\xi \triangleq \tilde{\Theta}_1(t), \quad (26)$$

و

$$\int_0^t k(x, t, \tau) \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \phi_{ij}(x, \tau) d\tau = \frac{t}{2} \int_{-1}^1 k(x, t, \tau(t, \xi)) \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \phi_{ij}(x, \tau(t, \xi)) d\xi \triangleq \tilde{\Theta}_2(x, t). \quad (27)$$

در ادامه با استفاده از روش انتگرال‌گیری گوس - لژاندر $(\hat{m} + 1)$ نقطه‌ای یک تقریب از روابط (۲۶) و (۲۷) را به صورت (۲۸) و (۲۹) به دست می‌آوریم:

$$\Theta_1(t) \simeq \frac{t}{2} \sum_{r=0}^{\hat{m}} \omega_r (t - \tau(t, \xi_r))^{1-\beta} \phi_{ttij}(\tau(t, \xi_r)) \triangleq \tilde{\Theta}_1(t), \quad (28)$$

و

$$\Theta_2(x, t) \simeq \frac{t}{2} \sum_{r=0}^{\hat{m}} \omega_r k(x, t, \tau(t, \xi_r)) \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \phi_{ij}(x, \tau(t, \xi_r)) \triangleq \tilde{\Theta}_2(x, t). \quad (29)$$

از معادلات (۲۹)-(۲۵) تابع مانده برای مسئله (۱۲) بدین صورت تعریف می‌شود:

$$\mathcal{R}(x, t) \triangleq \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \tilde{\Theta}_1(t) - \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \phi_{xxij}(x, t) - g(x, t) - \tilde{\Theta}_2(x, t) + \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} t^{1-\beta} \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \phi_{xij}(x, 0). \quad (30)$$

برای تعیین $(N_1 + 1)(N_2 + 1)$ مجهول α_{ij} از رابطه (۳۰) به تعداد $(N_1 - 1)N_2$ معادله به صورت (۳۱) تولید می‌کنیم:

$$\mathcal{R}(x_i, t_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2. \quad (31)$$

سپس به کمک شرایط اولیه و مرزی (۱۱) به تعداد $N_1 + 2N_2 + 1$ معادله جبری بدین صورت تولید می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \Lambda_1(x_r) &\triangleq \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \phi_{ij}(x_r, 0) - f(x_r) = 0, & r = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \\ \Lambda_2(t_r) &\triangleq \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \phi_{ij}(a, t_r) - h(t_r) = 0, & r = 1, 2, \dots, N_2, \\ \Lambda_3(t_r) &\triangleq \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} \alpha_{ij} \phi_{ij}(b, t_r) - l(t_r) = 0, & r = 1, 2, \dots, N_2, \end{aligned} \quad (32)$$

که در آن نقاط هم محلی در رابطه (۱۴) داده شده است. معادلات تولید شده در روابط (۳۱) و (۳۲) تشکیل یک دستگاه معادلات جبری با $(N_1 + 1)(N_2 + 1)$ معادله و مجهول می‌دهد. با حل این دستگاه جبری با یک روش عددی مناسب مانند روش تکراری نیوتن و مشخص شدن ضرایب مجهول α_{ij} ، جواب تقریبی معادله (۱۲) به صورت «fsolve» حاصل می‌شود. قابل ذکر است که در این پژوهش از دستور «fsolve» در نرم افزار میپل برای حل دستگاه معادلات جبری حاصل شده، استفاده شده است.

مثال‌های عددی

در این بخش به منظور نشان دادن کارایی روش، چند مثال عددی بررسی می‌شود. در تمام مثال‌ها روش انتگرال‌گیری گاوسی با $\hat{m} = 40$ در نظر گرفته شده است.

مثال ۱. معادله دیفرانسیل - انتگرال جزئی سهموی کسری معرفی شده در رابطه (۱۰) را روی دامنه $\times [-1, 1]$ [0, 1] با این شرایط در نظر بگیرید:

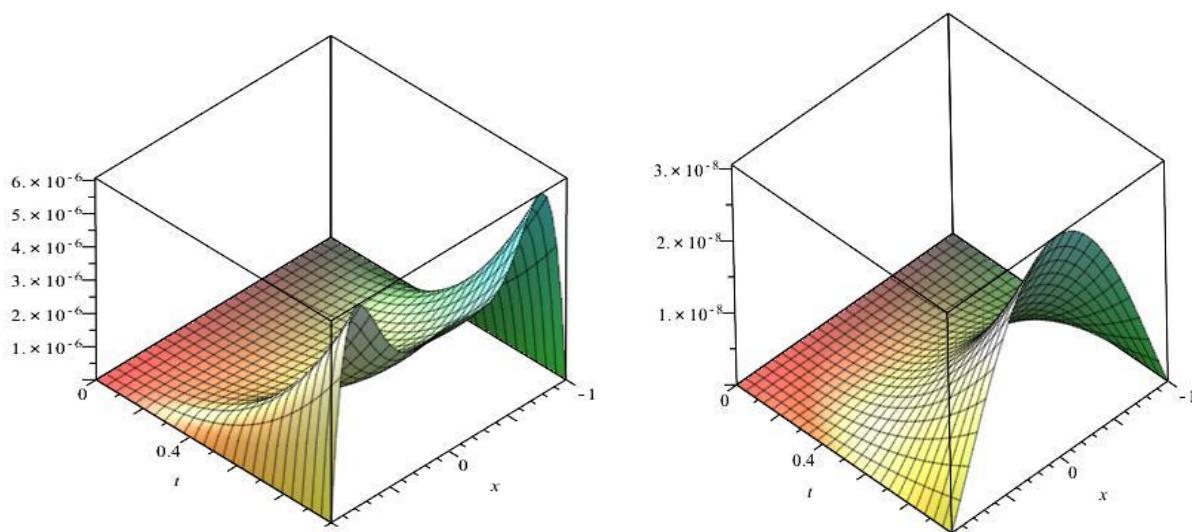
$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \quad -1 \leq x \leq 1, \\ u(-1, t) &= 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \end{aligned}$$

$$u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$g(x, t) = (1 - x^2)t^{1-\beta} \mathbf{E}_{2,2-\beta}(-t^2) + \frac{(x^2 - 1)(x \sin(t) - \exp(xt) + \cos(t))}{x^2 + 1} + 2 \sin(t),$$

$$k(x, t, \tau) = -\exp(x(t - \tau)).$$

جواب دقیق این مسئله $u(x, t) = (1 - x^2)\sin(t)$ است. روش پیشنهادی با $N_1 = 5$ و $N_2 = 10$ برای حل این مسئله پیاده‌سازی شده است. خطای مطلق^۱ روش پیشنهادی با دو مقدار متفاوت پارامتر شکل C و مرتبه مشتق کسری β برای برخی نقاط $(x_i, t_j) \in [-1, 1] \times [0, 1]$ در جداول ۱ و ۲ به ترتیب برای تابع پایه‌ای شعاعی گاوسی و تابع پایه‌ای شعاعی درجه دوم چندگانه معکوس گزارش شده‌اند. نمودار تابع خطای مطلق روش برای مورد $\beta = 0/25$ و $c = 0/01$ با استفاده از تابع پایه‌ای شعاعی گاوسی در شکل ۱ رسم شده است. همچنین نمودار تابع خطای مطلق روش برای مورد $\beta = 0/25$ و $c = 30$ با استفاده از تابع پایه‌ای شعاعی درجه دوم چندگانه معکوس در شکل ۲ رسم شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهد که در روش پیشنهادی در صورتی که از توابع پایه‌ای شعاعی استفاده شود به‌ازای مقادیر کوچک پارامتر شکل C و در صورتی که از توابع پایه‌ای شعاعی درجه دوم چندگانه معکوس استفاده شود به‌ازای مقادیر بزرگ پارامتر شکل C جواب‌های با دقت زیاد برای این مثال به‌دست می‌آورد. همچنین از روی نتایج گزارش شده در جداول نمی‌توان با قاطعیت بیان کرد که پارامتر شکل بهینه در هر حالت کدام است. در حقیقت برای به‌دست آوردن بهترین مقدار برای پارامتر شکل C باید از روش‌های بهینه‌سازی استفاده کرد، هر چند با سعی و خطا هم ممکن است بتوان یک مقدار مناسب برای پارامتر شکل به‌دست آورد.



شکل ۱. نمودار تابع خطای مطلق روش پیشنهادی با تابع پایه‌ای شعاعی گاوسی به‌ازای $\beta = 0/25$ و $c = 0/01$ پایه‌ای درجه دوم چندگانه معکوس به‌ازای $c = 30$ و $\beta = 0/25$ در مثال ۱

جدول ۱. خطای مطلق روش پیشنهادی با تابع پایه‌ای شعاعی گاوسی با دو مقدار پارامتر شکل C و سه مقدار برای مرتبه مشتق کسری β در مثال ۱

| $c = 0/05$ | | | $c = 0/01$ | | | (x_i, t_i) |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------|
| $\beta = 0/85$ | $\beta = 0/65$ | $\beta = 0/25$ | $\beta = 0/75$ | $\beta = 0/55$ | $\beta = 0/25$ | |
| $2/3000 \times 10^{-18}$ | $1/6000 \times 10^{-18}$ | $2/0000 \times 10^{-19}$ | $6/0000 \times 10^{-13}$ | $1/1000 \times 10^{-13}$ | $1/0000 \times 10^{-13}$ | (-1,1) |
| $8/4240 \times 10^{-8}$ | $2/2823 \times 10^{-7}$ | $4/1102 \times 10^{-7}$ | $3/3214 \times 10^{-7}$ | $5/0051 \times 10^{-9}$ | $5/0046 \times 10^{-9}$ | (-0/8,0/8) |
| $2/1074 \times 10^{-7}$ | $8/5414 \times 10^{-8}$ | $2/6709 \times 10^{-7}$ | $3/0433 \times 10^{-7}$ | $4/5647 \times 10^{-9}$ | $4/5640 \times 10^{-9}$ | (-0/6,0/6) |
| $1/1966 \times 10^{-7}$ | $3/1601 \times 10^{-8}$ | $1/3902 \times 10^{-7}$ | $1/4232 \times 10^{-7}$ | $2/0222 \times 10^{-9}$ | $2/0217 \times 10^{-9}$ | (-0/4,0/4) |
| $1/5021 \times 10^{-8}$ | $2/1880 \times 10^{-8}$ | $6/4970 \times 10^{-8}$ | $2/4377 \times 10^{-8}$ | $3/0000 \times 10^{-13}$ | $2/6904 \times 10^{-10}$ | (-0/2,0/2) |
| $1/5024 \times 10^{-8}$ | $2/1871 \times 10^{-8}$ | $6/4942 \times 10^{-8}$ | $2/4378 \times 10^{-8}$ | $2/6985 \times 10^{-10}$ | $2/6944 \times 10^{-10}$ | (0/2,0/2) |
| $1/1974 \times 10^{-7}$ | $3/1386 \times 10^{-8}$ | $1/3858 \times 10^{-7}$ | $1/4225 \times 10^{-7}$ | $2/0216 \times 10^{-9}$ | $2/0212 \times 10^{-9}$ | (0/4,0/4) |
| $2/1108 \times 10^{-7}$ | $8/4370 \times 10^{-8}$ | $2/6521 \times 10^{-7}$ | $3/0382 \times 10^{-7}$ | $4/5578 \times 10^{-9}$ | $4/5565 \times 10^{-9}$ | (0/6,0/6) |
| $8/4943 \times 10^{-8}$ | $2/2600 \times 10^{-7}$ | $4/0733 \times 10^{-7}$ | $3/3080 \times 10^{-7}$ | $4/9863 \times 10^{-9}$ | $4/9854 \times 10^{-9}$ | (0/8,0/8) |
| $7/4700 \times 10^{-19}$ | $1/2300 \times 10^{-18}$ | $4/0000 \times 10^{-19}$ | $8/0000 \times 10^{-13}$ | $3/0000 \times 10^{-13}$ | $0/0000 \times 10^0$ | (1,1) |

جدول ۲. خطای مطلق روش پیشنهادی با تابع پایه‌ای شعاعی درجه دوم چندگانه معکوس با دو مقدار برای مرتبه مشتق کسری β و سه مقدار پارامتر شکل C در مثال ۱

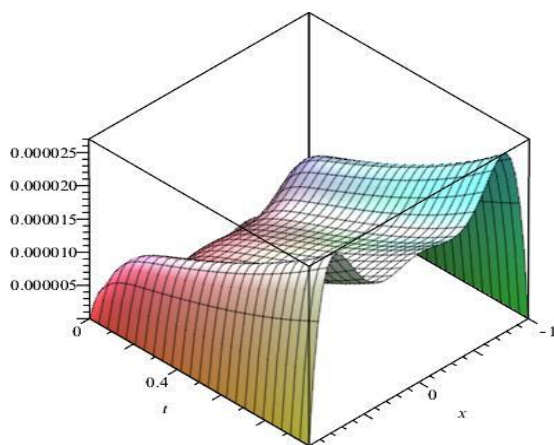
| $\beta = 0/75$ | | | $\beta = 0/25$ | | | (x_i, t_i) |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------|
| $c = 40$ | $c = 30$ | $c = 20$ | $c = 40$ | $c = 30$ | $c = 20$ | |
| $4/0000 \times 10^{-25}$ | $2/1514 \times 10^{-28}$ | $2/3000 \times 10^{-33}$ | $1/3720 \times 10^{-26}$ | $1/2742 \times 10^{-28}$ | $4/5900 \times 10^{-33}$ | (-1,1) |
| $3/5340 \times 10^{-6}$ | $4/0292 \times 10^{-6}$ | $4/8916 \times 10^{-6}$ | $3/3297 \times 10^{-6}$ | $3/2621 \times 10^{-6}$ | $5/2144 \times 10^{-6}$ | (-0/8,0/8) |
| $1/6080 \times 10^{-6}$ | $1/5583 \times 10^{-6}$ | $1/2737 \times 10^{-6}$ | $1/5272 \times 10^{-6}$ | $1/2259 \times 10^{-6}$ | $1/4840 \times 10^{-6}$ | (-0/6,0/6) |
| $4/9398 \times 10^{-7}$ | $4/0061 \times 10^{-7}$ | $4/9398 \times 10^{-7}$ | $5/3467 \times 10^{-7}$ | $3/2196 \times 10^{-7}$ | $1/7751 \times 10^{-7}$ | (-0/4,0/4) |
| $8/3100 \times 10^{-8}$ | $5/5527 \times 10^{-8}$ | $8/3100 \times 10^{-8}$ | $1/3646 \times 10^{-7}$ | $5/0606 \times 10^{-8}$ | $6/7238 \times 10^{-8}$ | (-0/2,0/2) |
| $8/4028 \times 10^{-8}$ | $5/5599 \times 10^{-8}$ | $1/4979 \times 10^{-8}$ | $1/3634 \times 10^{-7}$ | $5/0576 \times 10^{-8}$ | $6/7328 \times 10^{-8}$ | (0/2,0/2) |
| $5/0235 \times 10^{-7}$ | $4/0102 \times 10^{-7}$ | $1/6514 \times 10^{-7}$ | $5/3321 \times 10^{-7}$ | $3/2145 \times 10^{-7}$ | $1/7716 \times 10^{-7}$ | (0/4,0/4) |
| $1/6411 \times 10^{-6}$ | $1/5583 \times 10^{-6}$ | $1/2772 \times 10^{-6}$ | $1/5197 \times 10^{-6}$ | $1/2225 \times 10^{-6}$ | $1/4810 \times 10^{-6}$ | (0/6,0/6) |
| $3/6137 \times 10^{-6}$ | $4/0261 \times 10^{-6}$ | $4/8950 \times 10^{-6}$ | $3/3110 \times 10^{-6}$ | $3/2513 \times 10^{-6}$ | $5/2009 \times 10^{-6}$ | (0/8,0/8) |
| $6/0000 \times 10^{-25}$ | $3/7900 \times 10^{-29}$ | $1/5000 \times 10^{-33}$ | $1/4600 \times 10^{-25}$ | $1/2000 \times 10^{-28}$ | $4/0000 \times 10^{-33}$ | (1,1) |

مثال ۲. معادله دیفرانسیل - انتگرال جزئی سهموی کسری معرفی شده در رابطه (۱۰) را روی دامنه $[-1,1] \times [0,1]$ با شرایط زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
 u(x, 0) &= 1 - x^2, & -1 \leq x \leq 1, \\
 u(-1, t) &= 0, & 0 \leq t \leq 1, \\
 u(1, t) &= 0, & 0 \leq t \leq 1, \\
 g(x, t) &= (1 - x^2)t^{1-\beta} E_{1,2-\beta}(-t^2) + \frac{(x^2 - 1)(x \cos(xt) + \sin(xt) - \exp(xt))}{x^2 + 1} \\
 &+ 2\exp(t),
 \end{aligned}$$

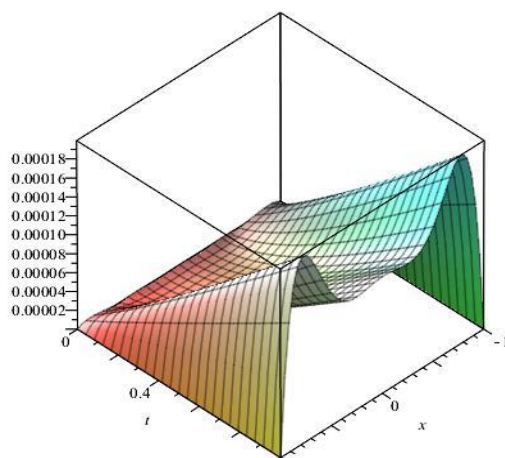
$$k(x, t, \tau, u) = -\sin(x(t - \tau))u.$$

جواب دقیق این مسئله $u(x, t) = (1 - x^2)\exp(t)$ است. روش پیشنهادی با $N_1 = 5$ و $N_2 = 10$ برای حل این مسئله پیاده‌سازی شده است. خطای مطلق روش پیشنهادی با دو مقدار متفاوت پارامتر شکل c و مرتبه کسری β برای برخی نقاط $(x_i, t_j) \in [-1, 1] \times [0, 1]$ در جداول ۳ و ۴ به ترتیب برای تابع پایه‌ای شعاعی گاوسی و تابع پایه‌ای شعاعی درجه دوم چندگانه معکوس گزارش شده‌اند. نمودار تابع خطای مطلق روش برای مورد $c = 0/1$ و $\beta = 0/5$ با استفاده از تابع پایه‌ای شعاعی گاوسی در شکل ۳ رسم شده است. همچنین نمودار تابع خطای مطلق روش برای مورد $c = 20$ و $\beta = 0/95$ با استفاده از تابع پایه‌ای شعاعی درجه دوم چندگانه معکوس در شکل ۴ رسم شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهد که روش پیشنهادی به‌ازای مقادیر کوچک پارامتر شکل c در صورتی که از توابع پایه‌ای شعاعی گاوسی استفاده می‌کند و به‌ازای مقادیر بزرگ پارامتر شکل c در صورتی که از توابع پایه‌ای شعاعی درجه دوم چندگانه معکوس استفاده می‌کند جواب‌های با دقت قابل قبول برای این مسئله به‌دست می‌آورد. ضمناً از نتایج جدول ۳ می‌توان نتیجه گرفت که به‌ازای $c = 0.1$ روش پیشنهادی با توابع شعاعی گاوسی نتایج نسبتاً بهتر به‌دست می‌آورد.



شکل ۳. نمودار تابع خطای مطلق روش پیشنهادی با تابع پایه‌ای شعاعی گاوسی به‌ازای $c = 0/1$ و $\beta = 0/5$ در

مثال ۲



شکل ۴. نمودار تابع خطای مطلق روش پیشنهادی با تابع پایه‌ای شعاعی درجه دوم چندگانه معکوس به‌ازای

$c = 20$ و $\beta = 0/45$ در مثال ۲

جدول ۳. خطای مطلق روش پیشنهادی با تابع پایه‌ای شعاعی گاوسی با دو مقدار پارامتر شکل c و سه مقدار برای مرتبه مشتق کسری β در مثال ۲

| $c = 0/001$ | | | $c = 0/1$ | | | (x_i, t_i) |
|-------------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------|
| $\beta = 0/8$ | $\beta = 0.6$ | $\beta = 0/2$ | $\beta = 0/75$ | $\beta = 0/5$ | $\beta = 0/25$ | |
| $3/0948 \times 10^{-5}$ | $1/6648 \times 10^{-5}$ | $1/1352 \times 10^{-5}$ | $4/6565 \times 10^{-6}$ | $9/0000 \times 10^{-21}$ | $7/1760 \times 10^{-6}$ | (0/2,0/2) |
| $9/8460 \times 10^{-6}$ | $2/7254 \times 10^{-5}$ | $4/5254 \times 10^{-5}$ | $8/8880 \times 10^{-6}$ | $9/0557 \times 10^{-6}$ | $9/5700 \times 10^{-6}$ | (0/4,0/4) |
| $2/5232 \times 10^{-5}$ | $2/3968 \times 10^{-5}$ | $7/5032 \times 10^{-5}$ | $1/5452 \times 10^{-5}$ | $1/4821 \times 10^{-5}$ | $1/4952 \times 10^{-5}$ | (0/6,0/6) |
| $2/9834 \times 10^{-5}$ | $1/5266 \times 10^{-5}$ | $1/8266 \times 10^{-5}$ | $2/2173 \times 10^{-5}$ | $2/1330 \times 10^{-5}$ | $2/1262 \times 10^{-5}$ | (0/8,0/8) |
| $3/9200 \times 10^{-5}$ | $2/0000 \times 10^{-5}$ | $3/4000 \times 10^{-5}$ | $6/6000 \times 10^{-21}$ | $9/0000 \times 10^{-21}$ | $3/0000 \times 10^{-21}$ | (1/0,1/0) |
| $3/0000 \times 10^{-4}$ | $2/0000 \times 10^{-5}$ | $1/8000 \times 10^{-20}$ | $6/0000 \times 10^{-13}$ | $4/0000 \times 10^{-21}$ | $4/0000 \times 10^{-21}$ | (-1/0,1/0) |
| $5/2657 \times 10^{-6}$ | $3/4734 \times 10^{-5}$ | $2/1578 \times 10^{-5}$ | $3/3214 \times 10^{-7}$ | $2/1597 \times 10^{-5}$ | $2/1597 \times 10^{-5}$ | (-0/8,0/8) |
| $4/3968 \times 10^{-5}$ | $2/6032 \times 10^{-5}$ | $1/5196 \times 10^{-5}$ | $3/0433 \times 10^{-7}$ | $1/4976 \times 10^{-5}$ | $1/4976 \times 10^{-5}$ | (-0/6,0/6) |
| $3/2746 \times 10^{-5}$ | $7/2540 \times 10^{-6}$ | $9/7459 \times 10^{-6}$ | $1/4232 \times 10^{-7}$ | $9/0994 \times 10^{-6}$ | $9/0994 \times 10^{-6}$ | (-0/4,0/4) |
| $3/5335 \times 10^{-4}$ | $1/6648 \times 10^{-5}$ | $7/4113 \times 10^{-6}$ | $2/4377 \times 10^{-8}$ | $5/9745 \times 10^{-6}$ | $5/9745 \times 10^{-6}$ | (-0/2,0/2) |

جدول 4. خطای مطلق روش پیشنهادی با تابع پایه‌ای شعاعی درجه دوم چندگانه معکوس با دو مقدار برای مرتبه مشتق کسری β و سه مقدار پارامتر شکل c در مثال ۲

| $\beta = 0/95$ | | | $\beta = 0/45$ | | | (x_i, t_i) |
|-------------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------|
| $c = 40$ | $c = 30$ | $c = 20$ | $c = 40$ | $c = 30$ | $c = 20$ | |
| $3/0948 \times 10^{-5}$ | $1/6648 \times 10^{-5}$ | $1/1352 \times 10^{-5}$ | $7/4055 \times 10^{-6}$ | $7/4055 \times 10^{-6}$ | $6/2209 \times 10^{-6}$ | (0/2,0/2) |
| $9/8460 \times 10^{-6}$ | $2/7254 \times 10^{-5}$ | $4/5254 \times 10^{-5}$ | $9/6885 \times 10^{-6}$ | $9/6885 \times 10^{-6}$ | $9/1423 \times 10^{-6}$ | (0/4,0/4) |
| $2/5232 \times 10^{-5}$ | $2/3968 \times 10^{-5}$ | $7/5032 \times 10^{-5}$ | $1/5012 \times 10^{-5}$ | $1/5012 \times 10^{-5}$ | $1/4812 \times 10^{-5}$ | (0/6,0/6) |
| $2/9834 \times 10^{-5}$ | $1/5266 \times 10^{-5}$ | $1/8266 \times 10^{-5}$ | $2/1282 \times 10^{-5}$ | $2/1282 \times 10^{-5}$ | $2/1281 \times 10^{-5}$ | (0/8,0/8) |
| $3/9200 \times 10^{-5}$ | $2/0000 \times 10^{-5}$ | $3/4000 \times 10^{-5}$ | $1/6000 \times 10^{-21}$ | $1/6000 \times 10^{-21}$ | $3/6000 \times 10^{-21}$ | (1/0,1/0) |
| $3/0000 \times 10^{-4}$ | $2/0000 \times 10^{-5}$ | $1/8000 \times 10^{-20}$ | $5/0000 \times 10^{-21}$ | $5/0000 \times 10^{-21}$ | $1/1000 \times 10^{-21}$ | (-1/0,1/0) |
| $5/2657 \times 10^{-6}$ | $3/4734 \times 10^{-5}$ | $2/1578 \times 10^{-5}$ | $2/1578 \times 10^{-5}$ | $2/1578 \times 10^{-5}$ | $2/1552 \times 10^{-5}$ | (-0/8,0/8) |
| $4/3968 \times 10^{-5}$ | $2/6032 \times 10^{-5}$ | $1/5196 \times 10^{-5}$ | $1/5196 \times 10^{-5}$ | $1/5196 \times 10^{-5}$ | $1/4972 \times 10^{-5}$ | (-0/6,0/6) |
| $3/2746 \times 10^{-5}$ | $7/2540 \times 10^{-6}$ | $9/7459 \times 10^{-6}$ | $9/7459 \times 10^{-6}$ | $9/7459 \times 10^{-6}$ | $9/1883 \times 10^{-6}$ | (-0/4,0/4) |
| $3/5335 \times 10^{-4}$ | $1/6648 \times 10^{-5}$ | $7/4113 \times 10^{-6}$ | $7/4113 \times 10^{-6}$ | $7/4113 \times 10^{-6}$ | $6/2248 \times 10^{-6}$ | (-0/2,0/2) |

مثال ۳. معادله دیفرانسیل - انتگرال جزئی سهموی کسری معرفی شده در رابطه (۱۰) را روی دامنه $x \in [-1,1]$ با این شرایط در نظر بگیرید:

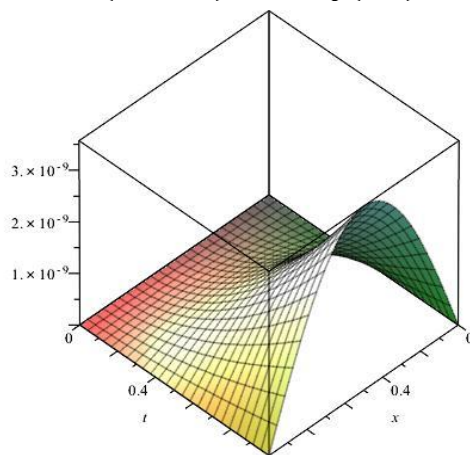
$$u(x, 0) = 0, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

$$u(-1, t) = -2t^2, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$g(x, t) = \frac{2x(1-x)}{\Gamma(3-\beta)} t^{2-\beta} + \frac{\exp(t^2x)(t^4x^3 - t^4x^2 - 2t^2x^2 + 2t^2x - 2) - 2x + 2}{t^3x^2} + 2t^2,$$

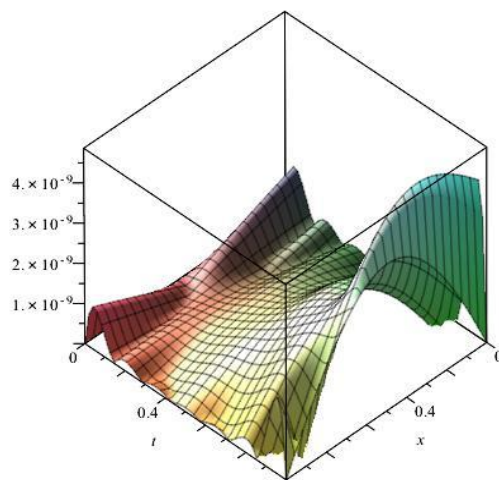
جواب دقیق این مسئله $u(x, t) = t^2x(1-x)$ است. روش ارائه شده با $N_1 = 9$ و $N_2 = 7$ برای حل این مسئله پیاده‌سازی شده است. خطای مطلق روش پیشنهادی با دو مقدار متفاوت پارامتر شکل c و مرتبه کسری β برای برخی نقاط $(x_i, t_j) \in [-1, 1] \times [0, 1]$ در جداول ۵ و ۶ به ترتیب برای تابع پایه‌ای شعاعی گاوسی و تابع پایه‌ای شعاعی درجه دوم چندگانه معکوس گزارش شده‌اند. نمودار تابع خطای مطلق روش برای مورد $c = 0/1$ و $\beta = 0/5$ با استفاده از تابع پایه‌ای شعاعی گاوسی در شکل ۵ رسم شده است. همچنین نمودار تابع خطای مطلق روش برای مورد $c = 20$ و $\beta = 0/45$ با استفاده از تابع پایه‌ای شعاعی درجه دوم چندگانه معکوس در شکل ۶ رسم شده است. نتایج گزارش شده به وسیله شکل‌های و جداول نشان می‌دهد که روش پیشنهادی قادر است جواب‌هایی با دقت زیاد برای این مثال به دست آورد.

$$k(x, t, \tau, u) = -\exp(xt\tau) u,$$



شکل ۵. نمودار خطای مطلق روش پیشنهادی با تابع پایه‌ای شعاعی گاوسی به ازای $c = 0/001$ و $\beta = 0/2$ در

مثال ۳



شکل ۶. نمودار تابع خطای مطلق روش پیشنهادی با تابع پایه‌ای شعاعی درجه دوم چندگانه معکوس به ازای $c = 40$ و $\beta = 0/2$ در مثال ۳

جدول ۵. خطای مطلق روش پیشنهادی با تابع پایه‌ای شعاعی گاوسی با دو مقدار پارامتر شکل C و سه مقدار برای مرتبه مشتق کسری β در مثال ۳

| $c = 0/001$ | | | $c = 0/05$ | | | (x_i, t_i) |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------|
| $\beta = 0/8$ | $\beta = 0.6$ | $\beta = 0/2$ | $\beta = 0/75$ | $\beta = 0/5$ | $\beta = 0/2$ | |
| $3/4300 \times 10^{-8}$ | $8/5000 \times 10^{-9}$ | $1/2600 \times 10^{-10}$ | $2/6172 \times 10^{-8}$ | $3/4155 \times 10^{-9}$ | $2/2619 \times 10^{-10}$ | (0/2,0/2) |
| $1/6090 \times 10^{-7}$ | $3/9290 \times 10^{-8}$ | $6/5400 \times 10^{-10}$ | $1/1510 \times 10^{-7}$ | $4/6521 \times 10^{-8}$ | $1/2408 \times 10^{-9}$ | (0/4,0/4) |
| $2/5540 \times 10^{-7}$ | $7/1030 \times 10^{-8}$ | $1/3780 \times 10^{-9}$ | $2/0159 \times 10^{-7}$ | $3/1122 \times 10^{-8}$ | $2/5340 \times 10^{-9}$ | (0/6,0/6) |
| $2/3780 \times 10^{-7}$ | $6/7860 \times 10^{-8}$ | $1/4240 \times 10^{-9}$ | $1/8446 \times 10^{-7}$ | $3/0181 \times 10^{-8}$ | $2/6096 \times 10^{-9}$ | (0/8,0/8) |
| $2/0000 \times 10^{-10}$ | $1/3000 \times 10^{-10}$ | $1/0000 \times 10^{-12}$ | $1/1500 \times 10^{-15}$ | $2/2150 \times 10^{-17}$ | $2/1060 \times 10^{-18}$ | (1/0,1/0) |

جدول ۶. خطای مطلق روش پیشنهادی با تابع پایه‌ای شعاعی درجه دوم چندگانه معکوس با دو مقدار برای مرتبه مشتق کسری β و سه مقدار پارامتر شکل C در مثال .

| $\beta = 0/6$ | | | $\beta = 0/2$ | | | (x_i, t_i) |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------|
| $c = 70$ | $c = 40$ | $c = 10$ | $c = 70$ | $c = 40$ | $c = 10$ | |
| $8/4121 \times 10^{-9}$ | $1/0727 \times 10^{-8}$ | $1/0727 \times 10^{-8}$ | $2/3936 \times 10^{-10}$ | $9/8233E - 11$ | $2/9581 \times 10^{-9}$ | (0/2,0/2) |
| $3/8948 \times 10^{-8}$ | $3/7146 \times 10^{-8}$ | $3/7146 \times 10^{-8}$ | $7/0927 \times 10^{-10}$ | $6/9850 \times 10^{-10}$ | $1/9826 \times 10^{-10}$ | (0/4,0/4) |
| $7/1247 \times 10^{-8}$ | $7/0693 \times 10^{-8}$ | $7/0693 \times 10^{-8}$ | $1/4836 \times 10^{-9}$ | $1/3809 \times 10^{-9}$ | $5/4886 \times 10^{-10}$ | (0/6,0/6) |
| $6/7203 \times 10^{-8}$ | $7/2229 \times 10^{-8}$ | $7/2229 \times 10^{-8}$ | $5/7914 \times 10^{-10}$ | $1/5772 \times 10^{-9}$ | $5/0154 \times 10^{-9}$ | (0/8,0/8) |
| $5/0000 \times 10^{-16}$ | $7/0000 \times 10^{-36}$ | $2/4000 \times 10^{-35}$ | $1/6000 \times 10^{-17}$ | $1/3400 \times 10^{-18}$ | $2/0000 \times 10^{-36}$ | (1/0,1/0) |

مثال ۴: معادله دیفرانسیل - انتگرال جزئی سهموی کسری معرفی شده در رابطه (۱۰) را روی دامنه $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1]$ با شرایط زیر در نظر بگیرید.

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

$$u(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

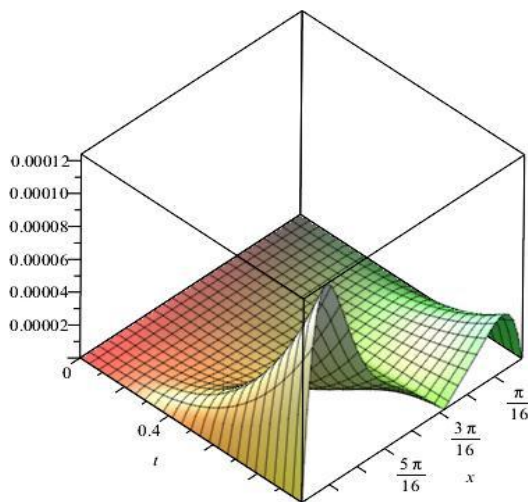
$$u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = t^3, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$g(x, t) = \frac{6t^{3-\beta} \sin^2(x)}{\Gamma(4-\beta)} - 2t^3(\cos^2(x) - \sin^2(x)) + \frac{\sin^2(x)(6 + (-t^3x^3 - 3t^2x^2 - 6tx - 6 + 6\exp(xt)))}{x^4},$$

$$k(x, t, \tau, u) = -\exp(x(t-\tau))u.$$

جواب دقیق این مسئله $u(x, t) = t^3 \sin^2(x)$ است. روش ارائه شده با $N_1 = 5$ و $N_2 = 8$ برای حل این مسئله پیاده‌سازی شده است. خطای مطلق روش پیشنهادی با دو مقدار متفاوت پارامتر شکل C و مرتبه کسری β برای بعضی نقاط $(x_i, t_j) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1]$ در جداول ۷ و ۸ به ترتیب برای تابع پایه‌ای شعاعی گاوسی و تابع پایه‌ای شعاعی چندگانه معکوس گزارش شده‌اند. نمودار تابع خطای مطلق روش برای مورد $c = 0/5$ و $\beta = 0/75$

با استفاده از تابع پایه‌ای شعاعی گاوسی در شکل ۷ رسم شده است. هم‌چنین نمودار تابع خطای مطلق روش برای مورد $c = 5$ و $\beta = 0/9$ با استفاده از تابع پایه‌ای شعاعی درجه دوم چندگانه معکوس در شکل ۸ رسم شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهد که روش پیشنهادی، روشی مؤثر برای حل این مسئله است. شکل‌ها و جدول‌ها نشان می‌دهند که روش پیشنهادی قادر است جواب‌هایی با دقت زیاد برای این مثال به دست آورد. این نتایج هم‌چنین نشان می‌دهند که با افزایش دامنه زمانی مسئله یعنی t ، دقت روش کاهش می‌یابد.

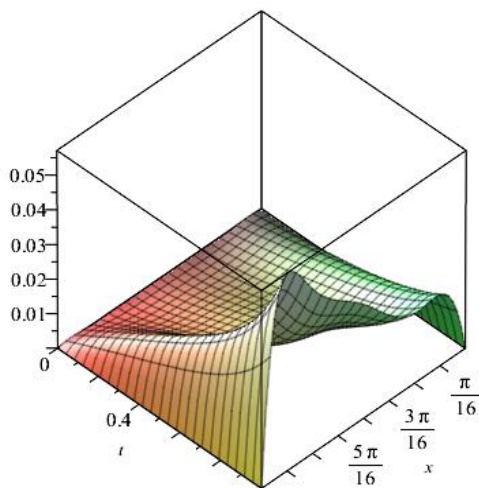


شکل ۷. نمودار خطای مطلق روش پیشنهادی با تابع پایه‌ای شعاعی گاوسی به‌ازای $c = 0/5$ و $\beta = 0/75$ در مثال

۴

جدول ۷. خطای مطلق روش پیشنهادی با تابع پایه‌ای شعاعی گاوسی با دو مقدار پارامتر شکل C و سه مقدار برای مرتبه مشتق کسری β در مثال ۴

| $c = 0/98$ | | | $c = 0/5$ | | | (x_i, t_i) |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------|
| $\beta = 0/72$ | $\beta = 0/6$ | $\beta = 0/4$ | $\beta = 0/7$ | $\beta = 0/47$ | $\beta = 0/3$ | |
| $1/8667 \times 10^{-5}$ | $1/9621 \times 10^{-5}$ | $2/1360 \times 10^{-5}$ | $2/5730 \times 10^{-7}$ | $2/4739 \times 10^{-7}$ | $2/4405 \times 10^{-7}$ | $(0/1\pi, 0/1\pi)$ |
| $7/7224 \times 10^{-5}$ | $8/4617 \times 10^{-5}$ | $9/4745 \times 10^{-5}$ | $1/0316 \times 10^{-6}$ | $7/4822 \times 10^{-7}$ | $6/1209 \times 10^{-7}$ | $(0/2\pi, 0/2\pi)$ |
| $3/0846 \times 10^{-5}$ | $6/5644 \times 10^{-5}$ | $1/3087 \times 10^{-4}$ | $4/4489 \times 10^{-7}$ | $2/0184 \times 10^{-6}$ | $2/7302 \times 10^{-6}$ | $(0/3\pi, 0/3\pi)$ |
| $2/5855 \times 10^{-3}$ | $3/0495 \times 10^{-3}$ | $3/8023 \times 10^{-3}$ | $1/2163 \times 10^{-5}$ | $1/6483 \times 10^{-5}$ | $1/8402 \times 10^{-5}$ | $(0/4\pi, 0/4\pi)$ |
| $2/0417 \times 10^{-2}$ | $2/2733 \times 10^{-2}$ | $2/6325 \times 10^{-2}$ | $4/3922 \times 10^{-5}$ | $5/1957 \times 10^{-5}$ | $5/5509 \times 10^{-5}$ | $(0/5\pi, 0/5\pi)$ |



شکل ۸. نمودار تابع خطای مطلق روش پیشنهادی با تابع پایه‌ای شعاعی درجه دوم چندگانه معکوس به‌ازای $c = 5$ و $\beta = 0/9$ در مثال ۴

جدول ۸: خطای مطلق روش پیشنهادی با تابع پایه‌ای شعاعی درجه دوم چندگانه معکوس با دو مقدار برای مرتبه مشتق کسری β و سه مقدار پارامتر شکل c در مثال ۴

| $\beta = 0/9$ | | | $\beta = 0/6$ | | | (x_i, t_i) |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------|
| $c = 5$ | $c = 3$ | $c = 2$ | $c = 7/5$ | $c = 5/5$ | $c = 3/5$ | |
| $9/3278 \times 10^{-6}$ | $3/9898 \times 10^{-4}$ | $8/0648 \times 10^{-4}$ | $1/9524 \times 10^{-4}$ | $6/0583 \times 10^{-5}$ | $2/5844 \times 10^{-4}$ | $(0/1\pi, 0/1\pi)$ |
| $2/0494 \times 10^{-5}$ | $3/4810 \times 10^{-4}$ | $8/2082 \times 10^{-4}$ | $1/0718 \times 10^{-4}$ | $1/4576 \times 10^{-5}$ | $2/2726 \times 10^{-4}$ | $(0/2\pi, 0/2\pi)$ |
| $5/6364 \times 10^{-5}$ | $1/0690 \times 10^{-4}$ | $9/8595 \times 10^{-4}$ | $1/8070 \times 10^{-4}$ | $8/0695 \times 10^{-5}$ | $2/2710 \times 10^{-5}$ | $(0/3\pi, 0/3\pi)$ |
| $4/3583 \times 10^{-5}$ | $2/5789 \times 10^{-4}$ | $7/5718 \times 10^{-3}$ | $8/9810 \times 10^{-4}$ | $2/4758 \times 10^{-4}$ | $1/5862 \times 10^{-4}$ | $(0/4\pi, 0/4\pi)$ |
| $4/4498 \times 10^{-3}$ | $3/4500 \times 10^{-2}$ | $1/6607 \times 10^{-1}$ | $4/9950 \times 10^{-4}$ | $2/7780 \times 10^{-3}$ | $1/7735 \times 10^{-2}$ | $(0/5\pi, 0/5\pi)$ |

نتیجه‌گیری

در این کار علمی، روشی محاسباتی به کمک توابع پایه‌ای شعاعی برای حل یک رده از معادلات دیفرانسیل-انتگرال جزئی سهموی کسری کاپوتو پیشنهاد شد. روش پیشنهادی، روشی قابل انعطاف، سودمند و کاربردی برای حل بسیاری از مسائل کاربردی در فیزیک و مهندسی از قبیل معادله گرما، معادله پخش و غیره است. نتایج عددی به دست آمده در مثال‌ها، دقت زیاد و کارایی روش ارائه شده را در تمام موارد نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که این روش را می‌توان برای حل رده‌های دیگر معادلات دیفرانسیل-انتگرال جزئی کسری تعمیم داد.

منابع

- Avazzadeh Z., Heydari M., Chen W., Loghmani G. B., "Smooth solution of partial integro-differential equations using radial basis function", ResearchGate., 4 (2014) 115-127.
- Buhmann M. D., "Radial Basis Functions", Theory and Implementations", Cambridge University Press (2003).
- Podlubny I., "Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation", Fract. Calculus Appl. Anal., 5 (2002) 367-386.
- Ishteva M. K., "Properties and applications of the Caputo fractional operator", Master thesis, Department of mathematics, Universitat Karlsruhe, February (2005) 40.
- Wendland. H., "Scattered Data Approximation" , Cambridge University Press, Feb. 11 (2010).
- Kansa E. J., "Multiquadratics- A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics- II. Parabolic, hyperbolic, and elliptic partial differential equations", Comput. Math. Appl., 19 (1990) 146-161.
- Kazemi B. F., Ghoreishi F., "Error estimate in fractional differential equations using multiquadratic radial basis functions", Journal of Computational and Applied Mathematics 245 (2013) 133-147.
- Gurtin M. E., Pipkin A. C., "A general theory of heat conduction with finite wave speed",

- Arch. Rational Mech. Anal., 31 (1968)113-126.
9. Miller R. K., "An integro-differential equation for rigid heat conductors with memory", J. Math. Anal. Appl., 66 (1978) 313-332.
 10. Zingales M., "Fractional-order theory of heat transport in rigid bodies", Elsevier, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 19 (2014) 3938-3953.
 11. Stefan A. G., Nistor C, "Heat Transfer By Convection And Conduction From The Fluid Moving At Solid Walls" ,Military Technical Academy, Termotehnica, 2 (2013) 91-96.
 12. Stein E. M., Weiss G., "Fourier Analysis in Euclidean Spaces", Princeton, New Jersey, Princeton University Press (1971).
 13. Madych W. R., "Bounds on multivariate polynomials and exponential error estimates for multiquadric interpolation", J. Approx. Theory, 70 (1992) 94-114.
 14. Khattak A. J. , Tirmizi S. I. A., Islam S. U., "Application of meshfree collocation method to a class of nonlinear partial differential equations", Eng. Anal. Bound.Elem, 33 (2009) 661-667.
 15. Canuto C., Hussaini M., Quarteroni A., Zang T., "Spectral Methods in Fluid Dynamics", Springer, Berlin (1988).
۱۶. اکرمی محمدحسین، "حسابان کسری از نظریه تا کاربرد"، نشریه ریاضی و جامعه، جلد ۲، شماره ۴، (۱۳۹۶) ۵۹-۶۹، دانشگاه اصفهان.