

## عدد رمزی اندازه‌های چند رنگی مسیره‌ها

رامین جوادی\*، میثم میرعلایی  
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان

پذیرش: ۹۸/۰۹/۱۳

دریافت: ۹۷/۱۲/۰۱

### چکیده

عدد رمزی اندازه‌های  $r$  رنگی گراف  $F$  که با نماد  $\hat{r}(F, r)$  نشان داده می‌شود، کوچک‌ترین عدد صحیح  $m$  تعریف می‌شود به طوری که یک گراف  $G$  با  $m$  یال وجود داشته باشد که در هر رنگ‌آمیزی از یال‌های گراف  $G$  با  $r$  رنگ، یک کپی تک‌رنگ از گراف  $F$  وجود داشته باشد. کریبولیچ و به طور جداگانه، دودک و پرالات برای مسیر  $P_n$  نشان داده‌اند که برای  $n$  به اندازه کافی بزرگ،  $\hat{r}(P_n, r) \leq 60 \cdot r^2 \ln r n$  در این مقاله با اثباتی کاملاً متفاوت این کران بالا را بهبود داده و ثابت می‌کنیم  $\hat{r}(P_n, r) \leq 18(1 + o_r(1))r^2 \ln r n$ .

واژه‌های کلیدی: عدد رمزی، عدد رمزی اندازه‌های، مسیر.

### مقدمه

همه گراف‌های این مقاله، متناهی، ساده و غیر جهت‌دار در نظر گرفته شده‌اند. از نماد  $P_n$  برای نشان دادن مسیر با  $n$  رأس استفاده می‌کنیم. منظور از طول یک مسیر تعداد یال‌های آن است. برای یک گراف  $G$  از نمادهای  $V(G)$ ،  $E(G)$  و  $e(G)$  به ترتیب برای نشان دادن مجموعه رأس‌ها، مجموعه یال‌ها و تعداد یال‌های گراف  $G$  استفاده می‌کنیم. برای دو گراف  $G$  و  $F$  و عدد طبیعی  $r \geq 2$  گوییم گراف  $G$  یک گراف  $r$ -رمزی برای گراف  $F$  است و آن را با نماد  $(F)_r \rightarrow G$  نشان می‌دهیم، هرگاه در هر رنگ‌آمیزی از یال‌های گراف  $G$  با  $r$  رنگ دلخواه، یک کپی تک‌رنگ  $F$  وجود داشته باشد. قضیه رمزی [۲۲] نشان می‌دهد که برای هر  $r \geq 2$  و هر گراف دلخواه  $F$ ، عدد طبیعی  $n$  چنان وجود دارد که  $(F)_r \rightarrow K_n$ . کوچک‌ترین مقدار که دارای این خاصیت است را عدد رمزی گراف  $F$  می‌نامیم و آن را با نماد  $R(F, r)$  نشان می‌دهیم. تخمین زدن مقدار  $R(K_n, 2)$  یکی از مسائل اساسی در نظریه رمزی است. اردوش [۱۱] و اردوش و زکرس [۱۵] نشان داده‌اند که  $2^{n/2} \leq R(K_n, 2) \leq 2^{2n}$ . با وجود تلاش‌های بسیار صورت گرفته در این راستا، تاکنون پیشرفت جزئی در جهت بهبود توان‌ها در کران‌های اخیر صورت گرفته است. برای مشاهده نتایج بیشتر در مورد اعداد رمزی گراف‌ها می‌توان به مراجع [۷، ۲۱] مراجعه کرد.

عدد رمزی اندازه‌های  $\hat{r}(F, r)$  برای گراف  $F$ ، کوچک‌ترین عدد طبیعی  $m$  است به طوری که یک گراف  $G$  با  $m$  یال چنان وجود داشته باشد که  $(F)_r \rightarrow G$ . به عبارت دیگر،  $\hat{r}(F, r) = \max\{|E(G)| : G \rightarrow (F)_r\}$  برای  $r > 2$  از

اصطلاح عدد رمزی اندازه‌ای چند رنگی استفاده می‌کنیم. عدد رمزی اندازه‌ای گراف‌ها نخستین بار در سال ۱۹۷۸ در حالی که تعداد رنگ‌ها برابر با دو باشد (یعنی  $r = 2$ )، توسط اردوش، فیودری، روسی و شلپ [۱۴] مورد مطالعه قرار گرفت. در این مقاله، عدد رمزی اندازه‌ای مسیرهای  $n$  رأسی  $P_n$  را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. واضح است که  $\hat{r}(P_n, r) = \Omega(n)$  از طرفی چون  $(P_n)_r \rightarrow K_{rn}$  داریم  $\hat{r}(P_n, r) = O(n^r)$ . اما رفتار دقیق  $\hat{r}(P_n, 2)$  تا مدت زیادی ناشناخته بود.

در واقع اردو [۱۳] مبلغ ۱۰۰ دلار را برای اثبات یا رد این که  $\hat{r}(P_n, 2)/n \rightarrow \infty$  یا  $\hat{r}(P_n, 2)/n^2 \rightarrow 0$  پیشنهاد داد. این سوال در سال ۱۹۹۳ توسط بک [۳] پاسخ داده شد. در واقع بک به کمک یک ساختار احتمالاتی نشان داد که عدد رمزی اندازه‌ای مسیر  $P_n$  بر حسب  $n$  خطی است. به بیان دقیق‌تر، او نشان داد که  $\hat{r}(P_n, 2) < 90n$  (در این مقاله هر گاه به نامساوی‌هایی مانند نامساوی اخیر ارجاع می‌دهیم، منظور این است که این نامساوی به ازای مقادیر به اندازه کافی بزرگ  $n$  برقرار است). بالوباش [۴] با ایجاد تغییر کوچکی در اثبات ارائه شده توسط بک، نشان داد که  $\hat{r}(P_n, 2) < 720n$ . اخیراً دودک و پرالات [۸] با استفاده از ایده‌ای متفاوت اما ابتدایی‌تر، نشان دادند که  $\hat{r}(P_n, 2) < 137n$  لتزر [۱۹] با استفاده از این ایده نشان داد که  $\hat{r}(P_n, 2) < 91n$ . همچنین اخیراً دودک و پرالات [۹] این کران را بهبود داده و نشان دادند که  $\hat{r}(P_n, 2) < 74n$ . از طرف دیگر، نخستین کران پایین نابدیهی برای  $\hat{r}(P_n, 2)$  توسط بک [۳] به اثبات رسید. این کران پایین توسط بالوباش [۵] بهتر شده است. بالوباش نشان داد که  $\hat{r}(P_n, 2) \geq (1 + \sqrt{2})n - o(1)$ . بهترین کران پایین به دست آمده، کران  $\hat{r}(P_n, 2) \geq (3.75 - o(1))n$  است که توسط بال و دیبیسایو [۱] اثبات شده است.

اکنون حالت چندرنگی عدد رمزی اندازه‌ای مسیرهای  $P_n$  را در نظر می‌گیریم. در مرجع [۷] دودک و پرالات نشان دادند که:

$$\frac{(r+2)r}{4}n - O(r^2) < \hat{r}(P_n, r) < 33r^4 n$$

بنابراین، نتیجه می‌گیریم که  $\hat{r}(P_n, r)$  برای هر مقدار ثابت  $r$  بر حسب  $n$  خطی است. در حالی که اختلاف کران‌های بالا و پایین بر حسب میزان وابستگی آن‌ها به مقدار  $r$  بسیار زیاد است. از این‌رو، کریولویچ [۱۸] نشان داد که کران بالای  $\hat{r}(P_n, r)$  بر حسب  $r$  تقریباً از درجه‌ی دو است، یعنی  $\hat{r}(P_n, r) = r^{2+o_r(1)}n$ . به بیان دقیق‌تر کریولویچ قضیه زیر را اثبات کرد.

**قضیه ۱.** فرض کنید ثابت‌های  $C > 5$  و  $r \geq 2$  داده شده‌اند. اگر  $n$  به اندازه کافی بزرگ باشد، آن‌گاه

$$\hat{r}(P_n, r) < 40 \cdot C r^{\frac{1}{C-4}} n.$$

می‌توان نشان داد که اگر ثابت  $C = C(r)$  از مرتبه  $\ln r$  باشد، آن‌گاه کران بالای قضیه ۱ مینیمم می‌شود. در نتیجه داریم:

$$\hat{r}(P_n, r) < O(r^2 \ln r) n.$$

همچنین دودک و پرالات [۱۰] اثبات دیگری از قضیه (۱) ارائه دادند.

**قضیه ۲.** برای هر عدد صحیح  $r \geq 2$  و  $n$  های به اندازه کافی بزرگ داریم

$$\hat{r}(P_n, r) < 600 \left( r^2 \ln r \right) n.$$

در این مقاله اثبات دیگری را برای کران بالای  $\hat{r}(P_n, r)$  ارائه می‌دهیم. علاوه بر این، ثابت ۶۰۰ در قضیه ۲ را به اندازه قابل توجهی بهبود داده و تا  $18 + o_r(1)$  کاهش می‌دهیم. به بیان دقیق‌تر نشان می‌دهیم که:

$$\hat{r}(P_n, r) < \left( 18 + o_r(1) \right) \left( r^2 \ln r \right) n.$$

**اصطلاحات و نمادگذاری‌ها.** در ادامه خلاصه‌ای از اصطلاحات نظریهٔ گراف و نمادهایی که در این مقاله استفاده می‌کنیم را معرفی می‌کنیم. برای اطلاعات بیشتر در مورد مفاهیم نظریه گراف خواننده را به [۶] ارجاع می‌دهیم. فرض کنید  $G$  گرافی با مجموعه رأس‌های  $V(G)$  و مجموعه یال‌های  $E(G)$  باشد. برای یک رأس خاص  $v \in V(G)$  مجموعه رأس‌هایی که  $v$  را ملاقات می‌کنند را همسایه‌های  $v$  نامیده و با نماد  $N_G(v)$  نشان می‌دهیم. همچنین  $|N_G(v)|$  را درجهٔ  $v$  گفته و با نماد  $d_G(v)$  نشان می‌دهیم. اگر  $u$  و  $v$  دو رأس دلخواه در گراف  $G$  باشند، آن‌گاه نماد  $u \sim v$  نشان دهندهٔ این است که  $u$  و  $v$  در گراف  $G$  با یکدیگر مجاور هستند. فرض کنید  $X \subseteq V(G)$  در این صورت نماد  $G[X]$  نشان دهندهٔ زیرگراف القایی  $G$  با مجموعه رأس‌های  $X$  است. منظور از  $G \setminus X$  زیرگراف القایی  $G[V(G) \setminus X]$  است. به علاوه،  $\Gamma_G(X)$  مجموعه رأس‌هایی از گراف  $G$  است که حداقل با یک رأس از  $X$  مجاور باشند. فرض کنید  $A, B \subseteq V(G)$  در این صورت  $e_G(A, B) = |\{xy \in E(G) : x \in A, y \in B\}|$  نشان دهندهٔ تعداد یال‌هایی در  $G$  است که یک رأس از  $A$  را به رأسی از  $B$  وصل می‌کنند. وقتی ابهامی وجود نداشته باشد از اندیس  $G$  در نمادها صرف‌نظر می‌کنیم. برای گراف دلخواه  $G$ ، میانگین درجهٔ رأس‌های  $G$  که با  $\bar{d}(G)$  نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{d}(G) = |V(G)|^{-1} \sum_{v \in V(G)} d_G(v).$$

نماد  $G(A \cup B, E)$  نشان دهندهٔ گراف دوبخشی  $G$  با بخش‌های  $A$  و  $B$  و مجموعه یال‌های  $E$  است.

### پیش‌نیازها

در این بخش به اثبات نتایج اولیه‌ای می‌پردازیم که در بخش بعدی به آن‌ها نیاز داریم. در مرجع [۲۰] پُشا شرایط کافی برای وجود یک مسیر با طول نسبتاً بزرگ را بررسی کرد.

**لم ۳.** [۲۰] (لم پُشا) فرض کنید  $k$  عددی طبیعی و  $G$  گرافی است که در آن برای هر زیرمجموعه از رأس‌ها مانند  $S$  که  $|S| \leq k$ ، داشته باشیم  $|\Gamma(S) \setminus S| \geq 2|S| - 1$  در این صورت گراف  $G$  شامل یک مسیر  $P_{3k-2}$  است.

در لم زیر شرایط مطرح شده در لم پُشا را برای گراف‌های دوبخشی بررسی می‌کنیم و به دنبال یافتن مسیر طولانی‌تری هستیم. اثباتی که برای این لم ارائه می‌دهیم مشابه اثبات شده در لم پُشا است.

لم ۴. فرض کنید  $k$  یک عدد طبیعی و  $G(V, U, V_1, E)$  یک گراف دوبخشی است که در آن برای هر زیرمجموعه  $S \subseteq V_i$ ،  $i \in \{0, 1\}$  که  $|S| \leq k$  داشته باشیم  $|\Gamma(S)| \geq 2|S|$  آن‌گاه  $G$  شامل مسیری با حداقل  $4k$  رأس است.

اثبات. فرض کنید  $P = (u_0, u_1, \dots, u_m)$  یک مسیر با بیشترین طول در گراف  $G$  است. بدون کم شدن کلیت فرض کنید  $u_m \in V_0$ . اگر برای یک  $1 \leq i \leq m-2$  داشته باشیم  $u_i \sim_G u_m$  آن‌گاه مسیر  $P' = (u_0, u_1, \dots, u_i, u_m, u_{m-1}, u_{i+1})$  را مسیر به دست آمده از تغییر شکل مسیر  $P$  می‌نامیم. خانواده  $\mathcal{P}$  را خانواده همه مسیرهایی قرار دهید که با دنباله‌ای از تغییر شکل‌ها از مسیر  $P$  به دست می‌آیند. واضح است که همه مسیرها در  $\mathcal{P}$  از  $u_0$  شروع شده و به رأسی در  $V_0$  ختم می‌شوند. مجموعه  $Z$  را مجموعه همه رأس‌های پایانی مسیرهای در  $\mathcal{P}$  قرار دهید. داریم  $Z = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_t}, u_m\}$ . واضح است که  $Z \subseteq V_0$  و  $\Gamma(Z) \subseteq V_1$ . ادعای زیر را در مورد  $\Gamma(Z)$  مطرح می‌کنیم.

$$\text{ادعا. } \Gamma(Z) = \{u_{m-1}, u_{i_v \pm 1} : v = 1, \dots, t\}$$

اگر ادعای فوق درست باشد، آن‌گاه داریم

$$|\Gamma(Z)| \leq 2t + 1 < 2|Z| = 2t + 2.$$

در نتیجه، بنا بر فرض داریم  $|Z| \geq k+1$ . حال زیر مجموعه  $Z_1 \subseteq Z$  را چنان انتخاب کنید که  $|Z_1| = k$ . در نتیجه  $|\Gamma(Z_1)| \geq 2|Z_1| = 2k$ . چون  $\Gamma(Z_1) \subseteq V_1 \cap V(P)$  مسیر  $P$  دارای حداقل  $2k$  رأس در بخش  $V_1$  و در نتیجه  $2k$  رأس در بخش  $V_0$  است. بنابراین  $|V(P)| \geq 4k$  و اثبات کامل می‌شود. از این‌رو کافی است ادعای فوق را اثبات کنیم.

اثبات ادعا. اولاً چون مسیرهای در  $\mathcal{P}$  با طول ماکسیمم هستند، داریم  $\Gamma(Z) \subseteq V(P)$ . حال فرض کنید  $u_i \in \Gamma(Z)$ . پس رأسی مانند  $v \in Z$  چنان وجود دارد که  $u_i \sim v$ . طبق تعریف مجموعه  $Z$ ، مسیرهای  $P_0, P_1, \dots, P_s$  چنان وجود دارند که مسیر  $P_{j+1}$  مسیر به دست آمده از تغییر شکل مسیر  $P_j$  (برای  $j = 0, \dots, s-1$ ) بوده و رأس  $v$  رأس انتهایی مسیر  $P_s$  است. همین‌طور چون  $u_i \in \Gamma(Z) \subseteq V_1$  داریم  $i \neq m$ . رأس  $w$  را رأس بلافاصله بعد از  $u_i$  در مسیر  $P_s$  با شروع از  $u_0$  قرار دهید. لذا مسیری وجود دارد که از تغییر شکل مسیر  $P_s$  به دست آمده و رأس پایانی آن است. بنابراین  $w \in Z$ . اگر  $w \in \{u_{i-1}, u_{i+1}\}$  اثبات ادعا تمام است. فرض کنید  $w \notin \{u_{i-1}, u_{i+1}\}$ . بنابراین حداقل یکی از یال‌های  $u_{i-1}u_i$  یا  $u_iu_{i+1}$ ، مثلاً دومی، در مسیر  $P_s$  نیست. لذا یک اندیس  $1 \leq j \leq s-1$  وجود دارد به طوری که  $u_iu_{i+1} \in E(P_j)$  اما  $u_iu_{i+1} \notin E(P_{j+1})$ . در نتیجه رأس انتهایی مسیر  $P_{j+1}$  است. بنابراین  $u_{i+1} \in Z$  (توجه کنید که  $u_i$  نمی‌تواند در  $Z$  باشد، زیرا  $u_i \in V_1$ ). در نتیجه، ادعا در این حالت نیز ثابت می‌شود.

در ادامه دو نامساوی بسیار مفید را برای توزیع‌های دوجمله‌ای  $Bin(n, p)$  بیان می‌کنیم. این نامساوی‌ها در واقع حالت‌های دیگری از نامساوی معروف چرنوف هستند. جزئیات این نامساوی‌ها و اثبات آنها را می‌توان در مراجع [۱۶] و [۱۷] مشاهده کرد.

لم ۵. [۱۷] فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی با توزیع دوجمله‌ای  $Bin(n, p)$  و امید ریاضی  $\mathbb{E}(X) = \mu$  است. برای هر  $\varepsilon \in (0, 3/2)$  داریم

$$Pr(|X - \mu| \geq \varepsilon \mu) \leq 2e^{-\frac{\varepsilon^2 \mu}{3}}.$$

لم ۶. [۱۶] فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی با توزیع دوجمله‌ای  $Bin(n, p)$  و امید ریاضی  $\mathbb{E}(X) = \mu$  است. برای هر  $\delta \in (0, 1)$  داریم

$$Pr(X \geq (1 + \delta)\mu) \leq 2e^{-\frac{\delta^2 \mu}{3}}$$

گراف دوبخشی تصادفی دوجمله‌ای  $\mathcal{G}(N, N, p)$  گراف دوبخشی تصادفی  $G(V_0 \cup V_1, E)$  با دو بخش  $n$  رأسی  $V_0$  و  $V_1$  است به طوری که هر زوج  $\{i, j\} \in V_0 \times V_1$  به طور مستقل و با احتمال  $p$  به عنوان یک یال در گراف  $G$  ظاهر می‌شود. توجه کنید که ممکن است  $p = p(n)$  تابعی برحسب  $n$  باشد که اگر  $n$  به سمت بی‌نهایت میل کند، آن‌گاه  $p$  به سمت صفر میل کند (البته معمولاً این اتفاق رخ می‌دهد). علاوه براین، می‌گوییم پیشامد  $A_n$  در یک فضای احتمال به طور تقریباً قطعی برقرار است، هرگاه  $n$  به بی‌نهایت میل کند، احتمال پیشامد  $A_n$  برقرار باشد به ۱ میل کند.

لم ۷. فرض کنید  $f, d, \varepsilon$  و  $\alpha$  اعداد مثبتی باشند به طوری که  $d \geq 1$  و  $\alpha > \frac{1}{2} \sqrt{9f \ln d + 2}$ . این که در این صورت،  $n_0 = n_0(f, d, \varepsilon)$  وجود دارد به طوری که برای هر  $n \geq n_0$  و  $p = f/n$  یک گراف دوبخشی  $G = G(V_0, V_1)$  چنان وجود دارد که برای هر  $i \in \{0, 1\}$  داریم  $|V_i| = N = dn$  و

$$(1) \quad \text{برای هر دو زیرمجموعه } U \subseteq V_i(G) \text{ و } W \subseteq V_{i+1}(G) \text{ که } u = |U| \leq n/4 \text{ و } w = |W| = 2u \text{ داریم}$$

$$e_G(U, W) < puw + \alpha\sqrt{uw}$$

$$(2) \quad (22.1 - \varepsilon)fd \leq \bar{d}(G) \leq (1 + \varepsilon)fd.$$

اثبات. نشان می‌دهیم که گراف دوبخشی تصادفی  $\mathcal{G}(N, N, p)$  با دو بخش  $V_0$  و  $V_1$  به طور تقریباً قطعی شرایط (۱) و (۲) را دارد. فرض کنید  $U \subseteq V_i$  و  $W \subseteq V_{i+1}$  دو زیرمجموعه ثابت از رأس‌های گراف  $G$  هستند، به طوری که  $u = |U| \leq n/4$  و  $w = |W| = 2u_0$ . فرض کنید  $X_{U,W}$  یک متغیر تصادفی است که تعداد یال‌های بین دو مجموعه‌ی  $U$  و  $W$  را شمارش می‌کند. واضح است که  $X_{U,W}$  دارای توزیع دو جمله‌ای  $Bin(uw, p)$  و امید ریاضی  $\mathbb{E}(X_{U,W}) = puw$  است. حال اگر نامساوی لم ۶ را برای  $\delta = \frac{\alpha n}{f\sqrt{uw}}$  به کار ببریم، آن‌گاه احتمال آنکه  $U$  و  $W$  در شرط (۱) صدق نکنند دارای کران بالایی به صورت زیر است

$$Pr(X_{U,W} \geq puw + \alpha\sqrt{uw}) \leq e^{-\frac{\delta^2}{\tau}puw} = e^{-\frac{n\alpha^2}{\tau f}}$$

از طرفی با در نظر گرفتن نامساوی  $\binom{N}{k} \leq \left(\frac{Ne}{k}\right)^k$ ، تعداد انتخاب‌های ممکن برای  $U$  و  $W$  دارای کران بالایی به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^{n/\tau} \binom{N}{u} \binom{N}{w} &\leq n/\tau \binom{dn}{n/\tau} \binom{dn}{n/\tau} \leq (n/\tau) (\tau de)^{n/\tau} (\tau de)^{n/\tau} \\ &= (n/\tau) e^{(n/\tau)(\ln(\tau de) + \tau \ln(\tau dn))} \\ &\leq (n/\tau) e^{(n/\tau)(\tau \ln d + \epsilon)}. \end{aligned}$$

از این‌رو، اگر  $A$  پیشامد آن باشد که شرط (۱) در گراف  $G$  صدق نکند، کافی است نشان دهیم که احتمال رخ دادن پیشامد  $A$  در گراف  $G$  از مرتبه  $o(1)$  است. به عبارت دقیق‌تر، داریم،

$$Pr(A) \leq \sum_{u=1}^{n/\tau} \binom{N}{u} \binom{N}{w} Pr(X_{U,W} \geq puw + \alpha\sqrt{uw}) \leq (n/\tau) e^{(n/\tau)(\tau \ln d + \epsilon)} e^{-\frac{n\alpha^2}{\tau f}} = o(1).$$

بنابراین با توجه به نحوه انتخاب،  $\alpha$  شرط (۱) در گراف  $G$  به طور تقریباً قطعی صدق می‌کند. حال نشان می‌دهیم که شرط (۲) نیز در گراف  $G$  به طور تقریباً قطعی صدق می‌کند. برای این منظور فرض کنید که متغیر تصادفی  $X$ ، تعداد یال‌های گراف  $G$  را شمارش کند. می‌توان دید که  $X = \bar{d}(G) \times N$ . به وضوح  $X$  دارای توزیع دوجمله‌ای  $Bin(N, p)$  است، به طوری‌که

$$E(X) = Np = fdn.$$

با به کار بردن نامساوی چرنوف (لم ۵) داریم

$$Pr(|\bar{d}(G) - fd| \geq \epsilon fd) = Pr(|\bar{d}(G)N - Np| \geq \epsilon Np) \leq 2e^{-\frac{\epsilon^2 Np}{\tau}} \leq 2e^{-\frac{\epsilon^2 d^2 fn}{\tau}} = o(1).$$

بنابراین به طور تقریباً قطعی در گراف  $G$  داریم

$$|\bar{d}(G) - fd| < \epsilon fd.$$

لذا شرط (۲) به‌طور تقریباً قطعی برقرار است. این نشان می‌دهد که یک گراف  $G$  وجود دارد که در شرایط (۱) و (۲) صدق می‌کند. لم زیر نتیجه‌ای قدیمی از اردوش است که در ادامه از آن استفاده خواهیم کرد.

لم ۸. [۱۲] هر گراف  $H$  با میانگین درجه  $\bar{d}(H)$  شامل یک زیرگراف القایی  $J \subseteq H$  است به طوری که درجه هر رأس در  $J$  حداقل  $\frac{1}{\gamma} \bar{d}(H)$  است.

### نتایج اصلی

در این بخش نتیجه اساسی این مقاله که یک کران بالا برای  $\hat{r}(P_n, r)$  است را اثبات کنیم. ابتدا در قضیه زیر نشان می‌دهیم که تحت شرایطی گراف  $G$  وجود دارد که هر زیرگراف پُرپال از آن شامل یک مسیر  $P_n$  است.

قضیه ۹. فرض کنید اعداد مثبت  $\gamma, f, d$  و  $\varepsilon$  داده شده است که  $d > \frac{1}{\gamma} \geq 1$  و  $f > \frac{\gamma(\ln d + 2)}{((1-\varepsilon)\gamma d - 1)^2}$  برای عدد طبیعی به اندازه کافی بزرگ  $n$ ، گراف دوبخشی  $G$  با بخش‌هایی از اندازه  $nd$  وجود دارد به طوری که  $\bar{d}(G) \leq (1 + \varepsilon)fd$  و هر زیرگراف فراگیر  $H$  از  $G$  که  $e(H) \geq \gamma e(G)$ ، شامل یک مسیر  $P_n$  است.

اثبات. فرض کنید اعداد  $\gamma, f, d$  و  $\varepsilon$  داده شده‌اند. عدد مثبت  $\alpha$  را به گونه‌ای انتخاب کنید که

$$\frac{1}{\gamma} \sqrt{\gamma f (\ln d + 2)} < \alpha \leq \frac{1}{\sqrt{2}} f \left( (1 - \varepsilon) \gamma d - 1 \right).$$

فرض کنید گراف  $G = G(V, U, V_1, E)$  گراف دوبخشی به دست آمده از لم ۷ (با ثابت‌های  $d, f, \varepsilon$  و  $\alpha$ ) است. نشان می‌دهیم که گراف  $G$  در شرایط قضیه فوق صدق می‌کند. برای این منظور فرض کنید  $H$  زیرگرافی فراگیر از گراف  $G$  است که  $e(H) \geq \gamma e(G)$  همچنین فرض کنید  $J \subseteq H$  زیرگراف القایی به دست آمده از لم ۸ است. ادعا می‌کنیم که گراف  $J$  حاوی یک مسیر  $P_n$  است. به برهان خلف فرض کنید چنین نباشد. در نتیجه بنابر لم ۴ زیرمجموعه  $U \subseteq V_i(J)$  (که  $i \in \{0, 1\}$ ) وجود دارد که  $|U| \leq n/4$  و  $\Gamma_J(U) < \gamma u$  با توجه به لم ۸، مینیمم درجه در گراف  $J$  حداقل  $(1/\gamma) \bar{d}(H)$  است. بنابراین، داریم  $e_J(U, V(J)) \geq (1/\gamma) \bar{d}(H)u$ . حال زیرمجموعه  $W \subseteq V_{i+1}$  را چنان انتخاب کنید که  $w = |W| = \gamma u$  و  $\Gamma_J(U) \subseteq W$  در این صورت، رابطه زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon)fd \frac{\gamma}{\gamma} u &\leq \frac{\gamma}{\gamma} \bar{d}(G)u \leq \frac{1}{\gamma} \bar{d}(H)u \leq e_J(U, V(J)) \leq e_G(U, W) \\ &< puw + \alpha \sqrt{uw} = \frac{\gamma f u^2}{n} + \sqrt{\gamma} \alpha u \leq \left( \frac{f}{\gamma} + \sqrt{\gamma} \alpha \right) u. \end{aligned}$$

بنابراین، داریم  $(1 - \varepsilon)fd \frac{\gamma}{\gamma} < \frac{f}{\gamma} + \sqrt{\gamma} \alpha$ . در نتیجه  $\alpha > \frac{1}{\sqrt{2}} f \left( (1 - \varepsilon) \gamma d - 1 \right)$  که این با نحوه انتخاب  $\alpha$  در تناقض است. از تناقض اخیر نتیجه می‌گیریم که زیر گراف  $J$  و در نتیجه گراف  $H$  حاوی یک مسیر  $P_n$  است.

در ادامه، به کمک قضیه ۹، کران بالایی برای عدد رمزی اندازه‌های چندرنگی مسیره‌های  $P_n$  آن‌گاه به دست می‌آوریم.

قضیه ۱۰. اگر  $r \geq 2$  یک عدد صحیح و  $n$  به اندازه کافی بزرگ باشد،

$$\hat{r}(P_n, r) \leq \gamma \left( 1 + o_r(1) \right) r^2 (\ln r) n.$$

اثبات. فرض کنید  $r \geq 2$  یک عدد صحیح دلخواه است. قرار دهید.  $\gamma = 1/r$  همچنین فرض کنید اعداد ثابت  $d, f$  و  $\mathcal{E}$  در شرایط قضیه ۹ صدق می‌کنند و  $G$  گراف دوبخشی به دست آمده از آن قضیه است. ادعا می‌کنیم  $G \rightarrow (P_n)_r$ . برای این منظور یک رنگ‌آمیزی دلخواه از یال‌های گراف  $G$  با رنگ  $r, 1, 2, \dots, r$  را در نظر بگیرید. واضح است که زیرگراف فراگیر القایی روی یکی از رنگ‌ها، مثلاً رنگ  $i$ ، دارای حداقل  $\frac{e(G)}{r}$  یال است. در نتیجه، طبق قضیه ۹ یک مسیر  $P_n$  تک‌رنگ (از رنگ  $i$ ) در  $G$  تحت این رنگ‌آمیزی وجود دارد. بنابراین  $G \rightarrow (P_n)_r$  از این رو داریم  $\hat{r}(P_n, r) \leq e(G)$ . بنابراین، به منظور دست یافتن به کران بالای ادعا شده، کافی است نشان دهیم که

$$e(G) \leq 18 \left(1 + o_r(1)\right) r^\gamma (\ln r) n.$$

لازم به یادآوری است که با توجه به قضیه ۹، داریم

$$e(G) \leq (1 + \varepsilon) d^\gamma f n \sim (1 + \varepsilon) d^\gamma \frac{18 \ln d + 36}{((1 - \varepsilon)\gamma d - 1)^\gamma} n.$$

فرض می‌کنیم  $\mathcal{E}$  به اندازه کافی کوچک است. بنابراین، کافی است مقدار  $d$  را چنان بیابیم که تابع

$$f(\gamma, d) = \frac{18 \ln d + 36}{(\gamma d - 1)^\gamma} d^\gamma$$

با شرط  $d > \frac{1}{\gamma} = r$  مینیمم شود. قرار می‌دهیم  $d = cr$  که  $c > 1$ ، آن‌گاه داریم

$$f(\gamma, d) = \frac{c^\gamma}{(c - 1)^\gamma} \left(18 r^\gamma \ln r + (18 \ln c + 36) r^\gamma\right).$$

مقدار  $c > 1$  را به گونه‌ای قرار می‌دهیم که  $c = o_r(r)$  و  $c = w_r(1)$  (مثلاً  $c = \ln r + 1$ ). بنابراین داریم

$$\text{لذا } (18 \ln c + 36) r^\gamma = o_r(1) r^\gamma \ln r \text{ و } \frac{c}{c-1} \sim 1$$

$$f(\gamma, d) \sim 18 \left(1 + o_r(1)\right) r^\gamma \ln r$$

و اثبات کامل می‌شود.

## References

1. D. Bal and L. DeBiasio, New lower bounds on the size-Ramsey number of a path, ArXiv e-prints, <https://arxiv.org/abs/1909.06354>.
2. J. Beck, On size Ramsey number of paths, trees, and circuits. I, *J. Graph Theory*, vol. 7 (1983), no. 1, 115–129.
3. J. Beck, On size Ramsey number of paths, trees and circuits. II, *Mathematics of Ramsey theory*, *Algorithms Combin.*, vol. 5, Springer, Berlin, 1990, pp. 34–45.
4. B. Bollobás, *Extremal graph theory with emphasis on probabilistic methods*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 62, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.
5. B. Bollobás, *Random graphs*, second ed., *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, vol. 73, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
6. J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, vol. 290. Macmillan London, 2008.
7. D. Conlon, J. Fox, B. Sudakov, Recent developments in graph Ramsey theory, in: *Surveys in Combinatorics 2015*, Cambridge University press, 2015, 49–118.
8. A. Dudek and P. Prałat, An alternative proof of the linearity of the size-Ramsey number of paths, *Combin. Probab. Comput.*, vol. 24 (2015), no. 3, 551–555.
9. A. Dudek and P. Prałat, On some multicolor Ramsey properties of random graphs, *SIAM J. Discrete Math.*, vol. 31 (2017), no. 3, 2079–2092.
10. A. Dudek and P. Prałat, Note on the multicolor size-Ramsey number for paths. *Electron. J. Combin.* vol. 25 (2018), no. 3, 3-35.
11. P. Erdős, Some remarks on the theory of graphs, *Bull. Amer. Math. Soc.* vol. 53 (1947), 292–294.
12. P. Erdős, On an extremal problem in graph theory, *Colloq. Math.* vol. 13 (1964/1965), 251–254.
13. P. Erdős, On the combinatorial problems which I would most like to see solved, *Combinatorica* vol. , 1 (1981), no. 1, 25–42.

14. P. Erdős, R. J. Faudree, C. C. Rousseau, and R. H. Schelp, The size Ramsey number, *Period. Math. Hungar.* vol. 9 (1978), no. 1-2, 145–161.
15. P. Erdős and G. Szekeres, A combinatorial problem in geometry, *Compositio Math.* vol. 2 (1935), 463–470.
16. M. Mitzenmacher and E. Upfal, *Probability and computing: Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
17. S. Janson, T. Łuczak, and A. Ruciński, *Random graphs*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley-Interscience, New York, 2000.
18. M. Krivelevich, Long cycles in locally expanding graphs, with applications, *Combinatorica*, vol. 39 (2019), no. 1, 135-151.
19. S. Letzter, Path Ramsey number for random graphs, *Combin. Probab. Comput.* vol. 25 (2016), no. 4, 612–622.
20. L. Pósa, Hamiltonian circuits in random graphs. *Discrete Math.* vol. 14 (1976), no. 4, 359–364.
21. S. P. Radziszowski, Small Ramsey numbers. *Electron. J. Combin.* vol. 1 (1994), *Dynamic Surveys*, DS1. 14 (Jan 9, 2014).
22. F. P. Ramsey, On a problem of formal logic, *Proc. London Math. Soc.* Vol. 30 (1930), 264–286.