عدد رمزی اندازه‌ای چند رنگی مسیرها

رامین جوادی*، میثم میرعلایی
دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان

دریافت: ۹۷/۱۲/۰۱ پذیرش: ۹۸/۰۹/۱۳

چکیده

عدد رمزی اندازه‌ای r رنگی گراف F که با نماد $\hat{r}(F,r)$ نشان داده می‌شود، کوچک‌ترین عدد صحیح m تعریف می‌شود به طوری که یک گراف G با m یال وجود داشته باشد که در هر رنگ‌آمیزی از یال‌های گراف G با r رنگ، یک کپی تک‌رنگ از گراف F وجود داشته باشد. کریولویچ و به طور جداگانه، دودک و پرالات برای مسیر P_n نشان داده‌اند که برای n به اندازهٔ کافی بزرگ، $\hat{r}(P_n, r) \leq 60 \cdot r^2 \ln r\, n$. در این مقاله با اثباتی کاملاً متفاوت این کران بالا را بهبود داده و ثابت می‌کنیم $\hat{r}(P_n, r) \leq 18\big(1+o_r(1)\big)r^2 \ln r\ n$. لازم به ذکر است که کران بالای به‌دست آمده تقریباً بهینه است.

واژه‌های کلیدی: عدد رمزی، عدد رمزی اندازه‌ای، مسیر.

مقدمه

همهٔ گراف‌های این مقاله، متناهی، ساده و غیر جهت‌دار در نظر گرفته شده‌اند. از نماد P_n برای نشان دادن مسیر با n رأس استفاده می‌کنیم. منظور از طول یک مسیر تعداد یال‌های آن است. برای یک گراف G از نمادهای $V(G)$، $E(G)$ و $e(G)$ به ترتیب برای نشان دادن مجموعهٔ رأس‌ها، مجموعهٔ یال‌ها و تعداد یال‌های گراف G استفاده می‌کنیم.

برای دو گراف G و F و عدد طبیعی $r \geq ۲$ گوییم گراف G یک گراف r- رمزی برای گراف F است و آن را با نماد $G \rightarrow (F)_r$ نشان می‌دهیم، هرگاه در هر رنگ‌آمیزی از یال‌های گراف G با r رنگ دلخواه، یک کپی تک‌رنگ F وجود داشته باشد. قضیهٔ رمزی [۲۲] نشان می‌دهد که برای هر $r \geq ۲$ و هر گراف دلخواه F، عدد طبیعی n چنان وجود دارد که $K_n \rightarrow (F)_r$. کوچک‌ترین مقدار که دارای این خاصیت است را عدد رمزی گراف F می‌نامیم و آن را با نماد $R(F,r)$ نشان می‌دهیم. تخمین زدن مقدار $R(K_n, ۲)$ یکی از مسائل اساسی در نظریهٔ رمزی است. اردوش [۱۱] و اردوش و زکرس [۱۵] نشان داده‌اند که $۲^{n/۲} \leq R\left(K_n, ۲\right) \leq ۲^{۲n}$. با وجود تلاش‌های بسیار صورت گرفته در این راستا، تاکنون پیشرفت جزیی در جهت بهبود توان‌ها در کران‌های اخیر صورت گرفته است. برای مشاهدهٔ نتایج بیشتر در مورد اعداد رمزی گراف‌ها می‌توان به مراجع [۷, ۲۱] مراجعه کرد.

عدد رمزی اندازه‌ای $\hat{r}(F,r)$ برای گراف F، کوچک‌ترین عدد طبیعی m است به طوری که یک گراف G با m یال چنان وجود داشته باشد که $G \rightarrow (F)_r$. به عبارت دیگر، $\hat{r}(F,r) = \max\{|E(G)| : G \rightarrow (F)_r\}$. برای $r > ۲$ از

* نویسندهٔ مسئول rjavadi@cc.iut.ac.ir

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.485]

اصطلاح عدد رمزی اندازه‌ای چند رنگی استفاده می‌کنیم. عدد رمزی اندازه‌ای گراف‌ها نخستین بار در سال ۱۹۷۸ در حالتی که تعداد رنگ‌ها برابر با دو باشد (یعنی $r = 2$)، توسط اردوش، فیودری، روسی و شلپ [۱۴] مورد مطالعه قرار گرفت.
در این مقاله، عدد رمزی اندازه‌ای مسیرهای n رأسی P_n را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. واضح است که $\hat{r}(P_n, r) = \Omega(n)$. از طرفی چون $K_{2n} \to (P_n)_2$ داریم $\hat{r}(P_n, r) = O\left(n^2\right)$. اما رفتار دقیق $\hat{r}\left(P_n, 2\right)$ تا مدت زیادی ناشناخته بود.

در واقع اردو [۱۳] مبلغ ۱۰۰ دلار را برای اثبات یا رد این که $\hat{r}\left(P_n, 2\right)/n \to \infty$ یا $\hat{r}\left(P_n, 2\right)/n^2 \to 0$ پیشنهاد داد. این سوال در سال ۱۹۹۳ توسط بک [۳] پاسخ داده شد. در واقع بک به کمک یک ساختار احتمالاتی نشان داد که عدد رمزی اندازه‌ای مسیر P_n بر حسب n خطی است. به بیان دقیق‌تر، او نشان داد که $\hat{r}\left(P_n, 2\right) < 900\, n$ (در این مقاله هر گاه به نامساوی‌هایی مانند نامساوی اخیر ارجاع می‌دهیم، منظور این است که این نامساوی به ازای مقادیر به اندازهٔ کافی بزرگ n برقرار است). بالوباش [۴] با ایجاد تغییر کوچکی در اثبات ارائه شده توسط بک، نشان داد که $\hat{r}\left(P_n, 2\right) < 720\, n.$ اخیراً دودک و پرالات [۸] با استفاده از ایده‌ای متفاوت اما ابتدایی‌تر، نشان دادند که $\hat{r}\left(P_n, 2\right) < 137\, n.$ لتزر [۱۹] با استفاده از این ایده نشان داد که $\hat{r}\left(P_n, 2\right) < 91\, n$. همچنین اخیراً دودک و پرالات [۹] این کران را بهبود داده و نشان دادند که $\hat{r}\left(P_n, 2\right) < 74\, n.$ از طرف دیگر، نخستین کران پایین نابدیهی برای $\hat{r}\left(P_n, 2\right)$ توسط بک [۳] به اثبات رسید. این کران پایین توسط بالوباش [۵] بهتر شده است. بالوباش نشان داد که $\hat{r}\left(P_n, 2\right) \geq \left(1 + \sqrt{2}\right)n - O\left(1\right)$. بهترین کران پایین به‌دست آمده، کران $\hat{r}\left(P_n, 2\right) \geq \left(3.75 - o\left(1\right)\right) n$ است که توسط بال و دیبیاسیو [۱] اثبات شده است.

اکنون حالت چندرنگی عدد رمزی اندازه‌ای مسیرهای P_n را در نظر می‌گیریم. در مرجع [۷] دودک و پرالات نشان دادند که:

$$\frac{(r+3)r}{4} n - O\left(r^2\right) < \hat{r}(P_n, r) < 33\, r 4^r\, n$$

بنابراین، نتیجه می‌گیریم که $\hat{r}(P_n, r)$ برای هر مقدار ثابت r برحسب n خطی است. در حالی‌که اختلاف کران‌های بالا و پایین بر حسب میزان وابستگی آن‌ها به مقدار r بسیار زیاد است. از این‌رو، کریولویچ [۱۸] نشان داد که کران بالای $\hat{r}(P_n, r)$ بر حسب r تقریباً از درجه‌ی دو است، یعنی $\hat{r}(P_n, r) = r^{2+o_r(1)}\, n.$ به بیان دقیق‌تر کریولویچ قضیهٔ زیر را اثبات کرد.

قضیهٔ ۱. فرض کنید ثابت‌های $C > 5$ و $r \geq 2$ داده شده‌اند. اگر n به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، آن‌گاه

$$\hat{r}(P_n, r) < 400^5\, C\, r^{2+\frac{1}{C-4}}\, n.$$

می‌توان نشان داد که اگر ثابت $C = C(r)$ از مرتبهٔ $\ln r$ باشد، آن‌گاه کران بالای قضیهٔ ۱ مینیمم می‌شود. در نتیجه داریم:

$$\hat{r}(P_n, r) < O\left(r^2 \ln r\right) n.$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.485]

همچنین دودک و پرالات [۱۰] اثبات دیگری از قضیهٔ (۱) ارائه دادند.

قضیهٔ ۲. برای هر عدد صحیح $r \geq ۲$ و n های به اندازهٔ کافی بزرگ داریم

$$\hat{r}(P_n, r) < ۶۰۰ \left(r^{۲} \ln r \right) n.$$

در این مقاله اثبات دیگری را برای کران بالای $\hat{r}(P_n, r)$ ارائه می‌دهیم. علاوه بر این، ثابت ۶۰۰ در قضیهٔ ۲ را به اندازهٔ قابل توجهی بهبود داده و تا $۱۸ + o_r\left(۱\right)$ کاهش می‌دهیم. به بیان دقیق‌تر نشان می‌دهیم که:

$$\hat{r}(P_n, r) < \left(۱۸ + o_r\left(۱\right)\right)\left(r^{۲} \ln r \right) n.$$

اصطلاحات و نمادگذاری‌ها. در ادامه خلاصه‌ای از اصطلاحات نظریهٔ گراف و نمادهایی که در این مقاله استفاده می‌کنیم را معرفی می‌کنیم. برای اطلاعات بیشتر در مورد مفاهیم نظریه گراف خواننده را به [۶] ارجاع می‌دهیم. فرض کنید G گرافی با مجموعه رأس‌های $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ باشد. برای یک رأس خاص $v \in V(G)$ مجموعه رأس‌هایی که v را ملاقات می‌کنند را همسایه‌های v نامیده و با نماد $N_G(v)$ نشان می‌دهیم. همچنین $|N_G(v)|$ را درجهٔ v گفته و با نماد $d_G(v)$ نشان می‌دهیم. اگر u و v دو رأس دلخواه در گراف G باشند، آن‌گاه نماد $u{\sim}v$ نشان دهندهٔ این است که u و v در گراف G با یکدیگر مجاور هستند. فرض کنید. $X \subseteq V(G)$ در این‌صورت نماد $G[X]$ نشان دهندهٔ زیرگراف القایی G با مجموعه رأس‌های X است. منظور از $G \setminus X$ زیرگراف القایی $G[V(G) \setminus X]$ است. به علاوه، $\Gamma_G(X)$ مجموعه رأس‌هایی از گراف G است که حداقل با یک رأس از X مجاور باشند.
فرض کنید $A, B \subseteq V(G)$. در این‌صورت $e_G(A,B) = |\{xy \in E(G): x \in A,\ y \in B\}|$ نشان دهندهٔ تعداد یال‌هایی در G است که یک رأس از A را به رأسی از B وصل می‌کنند. وقتی ابهامی وجود نداشته باشد از اندیس G در نمادها صرف‌نظر می‌کنیم. برای گراف دلخواه G، میانگین درجهٔ رأس‌های G که با $\bar{d}(G)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{d}(G)=|V(G)|^{-۱} \sum_{v\in V(G)} d_G(v).$$

نماد $G(A \cup B, E)$ نشان دهندهٔ گراف دوبخشی G با بخش‌های A و B و مجموعه یال‌های E است.

پیش‌نیازها

در این بخش به اثبات نتایج اولیه‌ای می‌پردازیم که در بخش بعدی به آن‌ها نیاز داریم. در مرجع [۲۰] پُشا شرایط کافی برای وجود یک مسیر با طول نسبتاً بزرگ را بررسی کرد.

لم ۳. [۲۰] (لم پُشا) فرض کنید k عددی طبیعی و G گرافی است که در آن برای هر زیرمجموعه از رأس‌ها مانند S که $|S| \leq k$، داشته باشیم. $|\Gamma(S) \setminus S| \geq ۲|S| - ۱$ در این صورت گراف G شامل یک مسیر $P_{۳k-۲}$ است.

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.485]

در لم زیر شرایط مطرح شده در لم پُشا را برای گراف‌های دوبخشی بررسی می‌کنیم و به دنبال یافتن مسیر طولانی‌تری هستیم. اثباتی که برای این لم ارائه می‌دهیم مشابه اثبات بیان شده در لم پُشا است.

لم ۴. فرض کنید k یک عدد طبیعی و $G\left(V_{\cdot} \cup V_{۱},\ E\right)$ یک گراف دوبخشی است که در آن برای هر زیرمجموعهٔ $S \subseteq V_i$، $i\epsilon\{0,1\}$ که $|S| \leq k$ داشته باشیم $|\Gamma(S)| \geq ۲|S|$ آن‌گاه G شامل مسیری با حداقل $۴k$ رأس است.

اثبات. فرض کنید $P = \left(u_0,u_۱, \dots ,u_m\right)$ یک مسیر با بیشترین طول در گراف G است. بدون کم شدن کلیت فرض کنید $u_m\epsilon\ V_0$ اگر برای یک $۱ \leq i \leq m - ۲$ داشته باشیم $u_i{\sim}_G u_m$ آن‌گاه مسیر $P' = \left(u_0,u_۱, \dots ,u_i,u_m,u_{m-۱},u_{i+۱}\right)$ را مسیر به دست آمده از تغییر شکل مسیر P می‌نامیم. خانواده $\mathcal{P}$ را خانواده همه مسیرهایی قرار دهید که با دنباله‌ای از تغییر شکل‌ها از مسیر P به دست می‌آیند. واضح است که همهٔ مسیرها در $\mathcal{P}$ از u_0 شروع شده و به رأسی در V_0 ختم می‌شوند. مجموعه Z را مجموعهٔ همهٔ رأس‌های پایانی مسیرهای در $\mathcal{P}$ قرار دهید. داریم $Z = \left\{u_{i_۱}, u_{i_۲}, \dots ,u_{i_t},u_m\right\}$. واضح است که $Z \subseteq V_0$ و $\Gamma(Z) \subseteq V_۱$. ادعای زیر را در مورد $\Gamma(Z)$ مطرح می‌کنیم.

ادعا. $\Gamma(Z) = \left\{u_{m-۱}, u_{i_\nu \pm ۱} : \nu = ۱, \dots ,t\right\}$

اگر ادعای فوق درست باشد، آن‌گاه داریم

$$|\Gamma(Z)| \leq ۲t + ۱ < ۲|Z| = ۲t + ۲.$$

در نتیجه، بنا بر فرض داریم $|Z| \geq k + ۱$. حال زیر مجموعهٔ $Z_۱ \subseteq Z$ را چنان انتخاب کنید که $\left|Z_۱\right| = k$. در نتیجه $\left|\Gamma\left(Z_۱\right)\right| \geq ۲\left|Z_۱\right| = ۲k$. چون $\Gamma\left(Z_۱\right) \subseteq V_۱ \cap V(P)$، مسیر P دارای حداقل $۲k$ رأس در بخش $V_۱$ و در نتیجه $۲k$ رأس در بخش V_0 است. بنابراین $|V(P)| \geq ۴k$ و اثبات کامل می‌شود. از این‌رو کافی است ادعای فوق را اثبات کنیم.

اثبات ادعا. اولاً چون مسیرهای در $\mathcal{P}$ با طول ماکسیمم هستند، داریم $\Gamma(Z) \subseteq V(P)$. حال فرض کنید $u_i \subseteq \Gamma(Z)$. پس رأسی مانند $v \in Z$ چنان وجود دارد که $u_i \sim v$. طبق تعریف مجموعهٔ Z، مسیرهای $P_0,P_۱, \dots ,P_s$ چنان وجود دارند که مسیر $P_{j+۱}$ مسیر به دست آمده از تغییر شکل مسیر P_j (برای $j = 0, \dots ,s - ۱$) بوده و رأس v رأس انتهایی مسیر P_s است. همین طور چون $u_i \in \Gamma(Z) \subseteq V_۱$، داریم $i \neq m$. رأس w را رأس بلافاصله بعد از u_i در مسیر P_s با شروع از u_0 قرار دهید. لذا مسیری وجود دارد که از تغییر شکل مسیر P_s به‌دست آمده و w رأس پایانی آن است. بنابراین $w \in Z$. اگر $w \in \left\{u_{i-۱}, u_{i+۱}\right\}$ اثبات ادعا تمام است. فرض کنید $w \notin \left\{u_{i-۱}, u_{i+۱}\right\}$. بنابراین حداقل یکی از یال‌های $u_{i-۱}u_i$ یا $u_iu_{i+۱}$، مثلاً دومی، در مسیر P_s نیست. لذا یک اندیس $۱ \leq j \leq s - ۱$ وجود دارد به طوری که $u_iu_{i+۱} \in E\left(P_j\right)$ اما $u_iu_{i+۱} \notin E\left(P_{j+۱}\right)$. در نتیجه $u_{i+۱}$ رأس انتهایی مسیر $P_{j+۱}$ است. بنابراین $u_{i+۱} \in Z$ (توجه کنید که u_i نمی‌تواند در Z باشد، زیرا $u_i \in V_۱$). در نتیجه، ادعا در این حالت نیز ثابت می‌شود.

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.485]

در ادامه دو نامساوی بسیار مفید را برای توزیع‌های دوجمله‌ای $Bin(n,p)$ بیان می‌کنیم. این نامساوی‌ها در واقع حالت‌های دیگری از نامساوی معروف چرنوف هستند. جزئیات این نامساوی‌ها و اثبات آنها را می‌توان در مراجع [۱۶] و [۱۷] مشاهده کرد.

لم ۵. [۱۷] فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیع دوجمله‌ای $Bin(n,p)$ و امید ریاضی $\mathbb{E}(X) = \mu$ است. برای هر $\varepsilon \in \left(0, 3/2\right]$ داریم

$$Pr(|X-\mu| \geq \varepsilon\mu) \leq 2e^{-\frac{\varepsilon^2\mu}{3}}.$$

لم ۶. [۱۶] فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیع دوجمله‌ای $Bin(n,p)$ و امید ریاضی $\mathbb{E}(X) = \mu$ است. برای هر $\delta \in (0,1)$ داریم

$$Pr\left(X \geq \left(1+\delta\right)\mu\right) \leq 2e^{-\frac{\delta^2\mu}{3}}$$

گراف دوبخشی تصادفی دوجمله‌ای $\mathcal{G}(N,N,p)$ گراف دوبخشی تصادفی $G\left(V_0 \cup V_1, E\right)$ با دو بخش n رأسی V_0 و V_1 است به طوری که هر زوج $\{i,j\} \in V_0 \times V_1$ به طور مستقل و با احتمال p به عنوان یک یال در گراف G ظاهر می‌شود. توجه کنید که ممکن است $p = p(n)$ تابعی برحسب n باشد که اگر n به سمت بی‌نهایت میل کند، آن‌گاه p به سمت صفر میل کند (البته معمولاً این اتفاق رخ می‌دهد). علاوه براین، می‌گوییم پیشامد A_n در یک فضای احتمال به‌طور تقریباً قطعی برقرار است، هرگاه n به بی‌نهایت میل کند، احتمال پیشامد A_n برقرار باشد به ۱ میل کند.

لم ۷. فرض کنید f، d، ε و α اعداد مثبتی باشند به طوری که $d \geq 1$ و $\alpha > \frac{1}{2}\sqrt{9f\ln d + 2}.$ این‌که در این صورت، $n_0 = n_0(f,d,\varepsilon)$ وجود دارد به طوری که برای هر $n \geq n_0$ و $p = f/n$، یک گراف دوبخشی $G = G\left(V_0,V_1\right)$ چنان وجود دارد که برای هر $i \in \left\{0,1\right\}$ داریم $|V_i| = N = dn$ و

۱) برای هر دو زیرمجموعهٔ $U \subseteq V_i(G)$ و $W \subseteq V_{i+1}(G)$ که $u = |U| \leq n/4$ و $w = |W| = 2u$، داریم $e_G(U,W) < puw + \alpha\sqrt{uw}$.

۲) $\left(22.1-\varepsilon\right)fd \leq \bar{d}(G) \leq \left(1+\varepsilon\right)fd.$

اثبات. نشان می‌دهیم که گراف دوبخشی تصادفی $\mathcal{G}(N,N,p)$ با دوبخش V_0 و V_1 به طور تقریباً قطعی شرایط ۱) و ۲) را دارد. فرض کنید $U \subseteq V_i$ و $W \subseteq V_{i+1}$ دو زیرمجموعهٔ ثابت از رأس‌های گراف G هستند، به طوری که $u = |U| \leq n/4$ و $w = |W| = 2u_0.$ فرض کنید $X_{U,W}$ یک متغیر تصادفی است که تعداد یال‌های بین دو مجموعه‌ی U و W را شمارش می‌کند. واضح است که $X_{U,W}$ دارای توزیع دو جمله‌ای $Bin(uw,p)$ و امید ریاضی $\mathbb{E}\left(X_{U,W}\right) = puw$ است. حال اگر نامساوی لم ۶ را برای $\delta = \frac{\alpha n}{f\sqrt{uw}}$ به‌کار ببریم، آن‌گاه احتمال آنکه U و W در شرط ۱) صدق نکنند دارای کران بالایی به صورت زیر است

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.485]

$$Pr\left(X_{U,W} \geq puw + \alpha\sqrt{uw}\right) \leq e^{-\frac{\delta^{۲}}{۳}puw} = e^{-\frac{n}{۳}\frac{\alpha^{۲}}{f}}.$$

از طرفی با در نظر گرفتن نامساوی $\binom{N}{K} \leq \left(\frac{Ne}{k}\right)^{k}$، تعداد انتخاب‌های ممکن برای U و W دارای کران بالایی به صورت زیر است

$$\sum_{u=۱}^{n/۴}\binom{N}{u}\binom{N}{w} \leq n/۴\binom{dn}{n/۴}\binom{dn}{n/۲} \leq \left(n/۴\right)\left(۴de\right)^{n/۴}\left(۲de\right)^{n/۲}$$
$$= \left(n/۴\right)e^{\left(n/۴\right)\left(\ln\left(۴de\right)+۲\ln\left(۲dn\right)\right)}$$
$$\leq \left(n/۴\right)e^{\left(n/۴\right)\left(۳\ln d+۶\right)}.$$

از این‌رو، اگر A پیشامد آن باشد که شرط ۱) در گراف G صدق نکند، کافی است نشان دهیم که احتمال رخ دادن پیشامد A در گراف G از مرتبهٔ $o\left(۱\right)$ است. به عبارت دقیق‌تر، داریم،

$$Pr(A) \leq \sum_{u=۱}^{n/۴}\binom{N}{u}\binom{N}{w}\ Pr\left(X_{U,W} \geq puw + \alpha\sqrt{uw}\right) \leq \left(n/۴\right)e^{\left(n/۴\right)\left(۳\ln d+۶\right)}e^{-\frac{n}{۳}\frac{\alpha^{۲}}{f}} = o\left(۱\right).$$

بنابراین با توجه به نحوهٔ انتخاب α، شرط ۱) در گراف G به طور تقریباً قطعی صدق می‌کند.

حال نشان می‌دهیم که شرط ۲) نیز در گراف G به طور تقریباً قطعی صدق می‌کند. برای این منظور فرض کنید که متغیر تصادفی X، تعداد یال‌های گراف G را شمارش کند. می‌توان دید که $X = \bar{d}(G) \times N$. به وضوح X دارای توزیع دوجمله‌ای $Bin\left(N^{۲},p\right)$ است، به طوری‌که

$$\mathbb{E}(X) = N^{۲}p = fd^{۲}n.$$

با به‌کار بردن نامساوی چرنوف (لم ۵) داریم

$$Pr\left(\left|\bar{d}(G) - fd\right| \geq \varepsilon fd\right) = Pr\left(\left|\bar{d}(G)N - N^{۲}p\right| \geq \varepsilon N^{۲}p\right) \leq ۲e^{-\frac{\varepsilon^{۲}N^{۲}p}{۳}} \leq ۲e^{-\frac{\varepsilon^{۲}d^{۲}fn}{۳}} = o\left(۱\right).$$

بنابراین به طور تقریباً قطعی در گراف G داریم

$$\left|\bar{d}(G) - fd\right| < \varepsilon fd.$$

لذا شرط ۲) به‌طور تقریباً قطعی برقرار است. این نشان می‌دهد که یک گراف G وجود دارد که در شرایط ۱) و ۲) صدق می‌کند.

لم زیر نتیجه‌ای قدیمی از اردوش است که در ادامه از آن استفاده خواهیم کرد.

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.485]

لم ۸. $\left[۱۲\right]$ هر گراف H با میانگین درجه $\bar{d}(H)$ شامل یک زیرگراف القایی $J \subseteq H$ است به طوری که درجه هر رأس در J حداقل $\frac{۱}{۲}\bar{d}(H)$ است.

نتایج اصلی

در این بخش نتیجه اساسی این مقاله که یک کران بالا برای $\hat{r}(P_n,r)$ است را اثبات کنیم. ابتدا در قضیهٔ زیر نشان می‌دهیم که تحت شرایطی گراف G وجود دارد که هر زیرگراف پُریال از آن شامل یک مسیر P_n است.

قضیهٔ ۹. فرض کنید اعداد مثبت γ، f، d و ε داده شده است که $۱ \geq \frac{۱}{\gamma}$ و $d > \frac{۱}{\gamma}$. $f > \frac{۱۸\left(\ln d+۲\right)}{\left(\left(۱-\varepsilon\right)\gamma d-۱\right)^۲}$ برای عدد طبیعی به اندازهٔ کافی بزرگ n، گراف دوبخشی G با بخش‌هایی از اندازه nd وجود دارد به طوری‌که $\bar{d}(G) \leq \left(۱+\varepsilon\right)fd$ و هر زیرگراف فراگیر H از G که $e(H) \geq \gamma e(G)$، شامل یک مسیر P_n است.

اثبات. فرض کنید اعداد γ، f، d و ε داده شده‌اند. عدد مثبت α را به گونه‌ای انتخاب کنید که

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{۹f\left(\ln d+۲\right)} < \alpha \leq \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}f\left(\left(۱-\varepsilon\right)\gamma d-۱\right).$$

فرض کنید گراف $G = G\left(V_۰ \cup V_۱,E\right)$ گراف دوبخشی به دست آمده از لم ۷ (با ثابت‌های f، d، ε و α) است. نشان می‌دهیم که گراف G در شرایط قضیهٔ فوق صدق می‌کند. برای این منظور فرض کنید H زیرگرافی فراگیر از گراف G است که $e(H) \geq \gamma e(G)$ همچنین فرض کنید $J \subseteq H$ زیرگراف القایی به دست آمده از لم ۸ است. ادعا می‌کنیم که گراف J حاوی یک مسیر P_n است. به برهان خلف فرض کنید چنین نباشد. در نتیجه بنابر لم ۴ زیرمجموعهٔ $U \subseteq V_i(J)$(که $i \in \{0,1\}$) وجود دارد که $u = |U| \leq n/۴$ و $\Gamma_J(U) < ۲u$. با توجه به لم ۸، مینیمم درجه در گراف J حداقل $\left(۱/۲\right)\bar{d}(H)$ است. بنابراین، داریم $e_J\left(U,V(J)\right) \geq \left(۱/۲\right)\bar{d}(H)u$. حال زیرمجموعهٔ $W \subseteq V_{i+۱}$ را چنان انتخاب کنید که $\Gamma_J(U) \subseteq W$ و $w = |W| = ۲u$. در این صورت، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\left(۱-\varepsilon\right)fd\frac{\gamma}{۲}u \leq \frac{\gamma}{۲}\bar{d}(G)u \leq \frac{۱}{۲}\bar{d}(H)u \leq e_J\left(U,V(J)\right) \leq e_G(U,W)$$
$$< puw + \alpha\sqrt{uw} = \frac{۲fu^۲}{n} + \sqrt{۲}\alpha u \leq \left(\frac{f}{۲}+\sqrt{۲}\alpha\right)u.$$

بنابراین، داریم $\left(۱-\varepsilon\right)fd\frac{\gamma}{۲} < \frac{f}{۲}+\sqrt{۲}\alpha$. در نتیجه $\alpha > \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}f\left(\left(۱-\varepsilon\right)\gamma d-۱\right)$، که این با نحوهٔ انتخاب α در تناقض است. از تناقض اخیر نتیجه می‌گیریم که زیر گراف J و در نتیجه گراف H، حاوی یک مسیر P_n است.

در ادامه، به کمک قضیهٔ ۹، کران بالایی برای عدد رمزی اندازه‌ای چندرنگی مسیرهای P_n آن‌گاه به دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۱۰. اگر $r \geq ۲$ یک عدد صحیح و n به اندازهٔ کافی بزرگ باشد،

$$\hat{r}(P_n,r) \leq ۱۸\left(۱+o_r\left(۱\right)\right)r^۲(\ln r)n.$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.485]

اثبات. فرض کنید $r \geq ۲$ یک عدد صحیح دلخواه است. قرار دهید. $\gamma = ۱/r$ همچنین فرض کنید اعداد ثابت f، d و ε در شرایط قضیهٔ۹ صدق می‌کنند و G گراف دوبخشی به دست آمده از آن قضیه است.

ادعا می‌کنیم $G \to (P_n)_r$. برای این منظور یک رنگ‌آمیزی دلخواه از یال‌های گراف G با r رنگ دلخواه ۱، ۲، ... ،r را در نظر بگیرید. واضح است که زیرگراف فراگیر القایی روی یکی از رنگ‌ها، مثلا رنگ i، دارای حداقل $\frac{e(G)}{r}$ یال است. در نتیجه، طبق قضیهٔ ۹ یک مسیر P_n تک‌رنگ (از رنگ i) در G تحت این رنگ‌آمیزی وجود دارد. بنابراین $G \to (P_n)_r$. از این‌رو داریم $\hat{r}(P_n,r) \leq e(G)$. بنابراین، به منظور دست یافتن به کران بالای ادعا شده، کافی است نشان دهیم که

$$e(G) \leq ۱۸\left(۱ + o_r\left(۱\right)\right) r^{۲} (\ln r) n.$$

لازم به یادآوری است که با توجه به قضیهٔ ۹، داریم

$$e(G) \leq \left(۱+\varepsilon\right) d^{۲} f n \sim \left(۱+\varepsilon\right) d^{۲} \frac{۱۸ \ln d + ۳۶}{\left(\left(۱-\varepsilon\right)\gamma d - ۱\right)^{۲}} n.$$

فرض می‌کنیم ε به اندازهٔ کافی کوچک است. بنابراین، کافی است مقدار d را چنان بیابیم که تابع

$$f(\gamma,d) = \frac{۱۸\ \ln d + ۳۶}{\left(\gamma d - ۱\right)^{۲}} d^{۲}$$

با شرط $d > \frac{۱}{\gamma} = r$ مینیمم شود. قرار می‌دهیم $d = cr$ که $c > ۱$، آن‌گاه داریم

$$f(\gamma,d) = \frac{c^{۲}}{\left(c-۱\right)^{۲}} \left(۱۸ r^{۲} \ln r + \left(۱۸\ \ln c + ۳۶\right) r^{۲}\right).$$

مقدار $c > ۱$ را به‌گونه‌ای قرار می‌دهیم که $c = o_r(r)$ و $c = w_r\left(۱\right)$ (مثلاً $c = \ln r + ۱$). بنابراین داریم $\frac{c}{c-۱} \sim ۱$ و $\left(۱۸\ \ln c + ۳۶\right) r^{۲} = o_r\left(۱\right) r^{۲} \ln r$. لذا

$$f(\gamma, d) \sim ۱۸\left(۱ + o_r\left(۱\right)\right) r^{۲} \ln r$$

و اثبات کامل می‌شود.

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.485]

References

1. D. Bal and L. DeBiasio, New lower bounds on the size-Ramsey number of a path, ArXiv e-peints, https://arxiv. org/abs/1909. 06354.

2. J. Beck, On size Ramsey number of paths, trees, and circuits. I, J. Graph Theory, vol. 7 (1983), no. 1, 115–129.

3. J. Beck, On size Ramsey number of paths, trees and circuits. II, Mathematics of Ramsey theory, Algorithms Combin. , vol. 5, Springer, Berlin, 1990, pp. 34–45.

4. B. Bollobás, Extremal graph theory with emphasis on probabilistic methods, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 62, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.

5. B. Bollobás, Random graphs, second ed. , Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 73, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

6. J. A. Bondy and U. S. R. Murty, Graph Theory with Applications, vol. 290. Macmillan London, 2008.

7. D. Conlon, J. Fox, B. Sudakov, Recent developments in graph Ramsey theory, in: Surveys in Combinatorics 2015, Cambridge University press, 2015, 49–118.

8. A. Dudek and P. Prałat, An alternative proof of the linearity of the size-Ramsey number of paths, Combin. Probab. Comput. , vol. 24 (2015), no. 3, 551–555.

9. A. Dudek and P. Prałat, On some multicolor Ramsey properties of random graphs, SIAM J. Discrete Math. , vol. 31 (2017), no. 3, 2079–2092.

10. A. Dudek and P. Prałat, Note on the multicolor size-Ramsey number for paths. Electron. J. Combin. vol. 25 (2018), no. 3, 3-35.

11. P. Erdős, Some remarks on the theory of graphs, Bull. Amer. Math. Soc. vol. 53 (1947), 292–294.

12. P. Erdős, On an extremal problem in graph theory, Colloq. Math. vol. 13 (1964/1965), 251–254.

13. P. Erdős, On the combinatorial problems which I would most like to see solved, Combinatorica vol. , 1 (1981), no. 1, 25–42.

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.485]

14. P. Erdős, R. J. Faudree, C. C. Rousseau, and R. H. Schelp, The size Ramsey number, Period. Math. Hungar. vol. , 9 (1978), no. 1-2, 145–161.

15. P. Erdős and G. Szekeres, A combinatorial problem in geometry, Compositio Math. vol. 2 (1935), 463–470.

16. M. Mitzenmacher and E. Upfal, Probability and computing: Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

17. S. Janson, T. łuczak, and A. Rucinski, Random graphs, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley-Interscience, New York, 2000.

18. M. Krivelevich, Long cycles in locally expanding graphs, with applications, Combinatorica, vol. 39 (2019), no. 1, 135-151.

19. S. Letzter, Path Ramsey number for random graphs, Combin. Probab. Comput. vol. 25 (2016), no. 4, 612–622.

20. L. Pósa, Hamiltonian circuits in random graphs. Discrete Math. vol. 14 (1976), no. 4, 359–364.

21. S. P. Radziszowski, Small Ramsey numbers. Electron. J. Combin. vol. 1 (1994), Dynamic Surveys, DS1. 14 (Jan 9, 2014).

22. F. P. Ramsey, On a problem of formal logic, Proc. London Math. Soc. Vol. 30 (1930), 264–286.

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.485]