(نشریه علوم دانشگاه خوارزمی)

رادیکال هونکه‌ای در توپوس Act-S

علی معدنشکاف، زینب خان‌جان‌زاده سرستی
دانشگاه سمنان، گروه ریاضی

دریافت ۹۷/۱۲/۱۲ پذیرش ۹۸/۰۵/۲۶

چکیده

یکی از مفاهیم مهم در نظریه توپوس‌ها، توپولوژی لاویر-تیرنی (ضعیف) است. یک رده از توپولوژی‌های لاویر-تیرنی (ضعیف) روی توپوس **Act-S**، متشکل از کنش‌های راست روی تکواره ثابت S، توپولوژی ایدآلی است که به‌وسیلهٔ نویسندگان در [۱۳] معرفی شده است. در این مقاله قصد داریم مشخصه‌سازی‌هایی از بافه‌ها نسبت به این گونه توپولوژی‌ها ارائه دهیم. در ادامه با استفاده از این توپولوژی، رادیکالی هونکه روی **Act-S** می‌سازیم. سرانجام، رابطهٔ بین بافه‌های متناظر با عملگر بستاری حاصل از این رادیکال و بافه‌های متناظر با توپولوژی ایدآلی را بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: S-کنش، عملگر بستاری ایدآلی، (پیش)رادیکال هونکه، تاب، توپولوژی ایدآلی.

مقدمه و پیش نیازها

امروزه کاربردهای فراوانی از توپولوژی‌های لاویر-تیرنی در توپوس‌ها و بافه‌های آنها، در شاخه‌های متفاوت ریاضی مانند نظریه اندازه [۸] و فیزیک کوانتوم [۱۸]، [۱۹] مشاهده شده است. یک رده از توپولوژی‌های لاویر-تیرنی (ضعیف) روی رسته کنش‌های روی یک تکواره ثابت، «توپولوژی ایدآلی»، با نمایش j^I است که به‌وسیلهٔ نویسندگان در [۱۳] معرفی شده و در [۱۰]، [۱۲] به‌طور دقیق بررسی شده‌اند. به‌عنوان کاربردی از توپولوژی ایدآلی، در [۱۲] مشاهده شده است که تعدادی از رسته‌های مشهور متشکل از کنش‌های جداشده[۱] روی یک تکواره، در حقیقت حالت‌های خاصی از رسته کنش‌های j^I-جداشده هستند. از این منظر مایلیم در اینجا توپولوژی ایدآلی و اشیای جداشده نسبت به آن را روی توپوس Act-S مطالعه کنیم. در حالت خاص، می‌خواهیم j^I-بافه‌های روی تکواره‌های به شکل $S=G\dot{\cup}I$، که در آن G یک گروه و I ایدآلی دوطرفه از S است، را بررسی کنیم. در [۵]، [۶] نشان داده شده است که برای کنش‌ها روی این نوع تکواره‌ها، S-کنش A هموار است اگر آن به‌عنوان یک I^1-کنش چنین باشد. در اینجا قصد داریم رابطه بین j^I-بافه ها در توپوس‌های Act-S و $\text{Act-}I^1$ را بیابیم.

در سراسر این مقاله، تکواره S با عضو همانی ۱ را ثابت می‌گیریم. هم‌چنین در همه جا که ذکر نشده است، I ایدآل چپی از S است. اکنون محتوای بخش‌های دیگر را به‌طور خلاصه بیان می‌کنیم: در بخش دوم، مشخصه‌سازی‌هایی از j^I-بافه ها در **Act-S** را ارائه می‌دهیم. هم‌چنین احکامی برای تکواره‌های به شکل $S=G\dot{\cup}I$،

*نویسنده مسئول amadanshekaf@semnan.ac.ir

1. Separated

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.13.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.139]

که در آن G یک گروه و I ایدآلی دوطرفه از S است را به‌دست می‌آوریم. در بخش سوم، برای یک ایدآل چپ خودتوان I از S نشان می‌دهیم ردهٔ **Act**-S توسیعی رادیکالی از ردهٔ $\mathrm{Sep}_{j^I}(\mathrm{Act}-S)$، متشکل از همهٔ S-کنش‌های I-جداشده، است یعنی رادیکالی روی **Act**-S موجود است که رده بی‌تاب[1] آن $\mathrm{Sep}_{j^I}(\mathrm{Act}-S)$ است. هم‌چنین نشان می‌دهیم این رادیکال، یک تاب (یا به بیان دقیق‌تر رادیکال موروثی) روی **Act**-S است. در نهایت، عملگر بستاری متناظر با این رادیکال را ساخته و نشان می‌دهیم هر j^I-بافه، یک بافه نسبت به این عملگر بستاری نیز هست.

در این مقاله، نمادگذاری‌ها و مفاهیم زیر را استفاده می‌کنیم که تعدادی از آنها را از مراجع [۱۴]، [۲۰] یادآوری می‌کنیم. یک «S-کنش (راست)» مجموعه A (با امکان تهی بودن) همراه با نگاشت $\mu: A\times S\to A$ ($\mu(a,s)$ را به‌صورت as نشان می‌دهیم)، با نام «کنش» S روی A، است به قسمی‌که برای هر $a\in A$ و $s,t\in S$، داریم $a1=a$ و $a(st)=(as)t$. یک «نگاشت حافظ کنش» $f: A\to B$ از یک S-کنش A به S-کنش دیگر B نگاشتی است که برای هر $a\in A$ و $s\in S$، $f(as)=f(a)s$. برای هر دو S-کنش A و B مجموعهٔ تمام نگاشت‌های حافظ کنش از A به B، را به‌صورت $\mathrm{Hom}_S(A,B)$ نشان می‌دهیم. ردهٔ همهٔ S-کنش‌ها و نگاشت‌های حافظ کنش بین آنها را به‌صورت **Act**-S نمایش می‌دهیم. از [۱۵] می‌دانیم این رسته یکریخت است با $\mathbf{Sets}^{S^{op}}$، توپوس پیش‌بافه‌های روی S که در آن تکواره S را به‌عنوان رسته‌ای با تنها یک شی در نظر می‌گیریم.

یک «پیش رادیکال[2]» (که ممکن است یک «پیش رادیکال نرمال» نیز نامیده شود) نگارندهٔ $r: A\mapsto r(A)$ است که به هر $A\in \mathrm{Act}-S$ هم‌نهشتی $r(A)\in \mathrm{Con}(A)$ را چنان نظیر می‌کند که هر نگاشت حافظ کنش $f: A\to B$ نگاشت حافظ کنش $r(f): r(A)\to r(B)$ را القا می‌کند، بدین‌معنی که برای هر نگاشت حافظ کنش $f: A\to B$، داشته باشیم $(f(a), f(a'))\in r(B)$ هرگاه $(a,a')\in r(A)$. توجه کنید که $r(A)$ و $r(B)$، به‌ترتیب، زیرکنش‌هایی از $A\times A$ و $B\times B$ هستند، زیرا $r(A)\in \mathrm{Con}(A)$ و $r(B)\in \mathrm{Con}(B)$. یک پیش رادیکال r یک «رادیکال» (یا یک «رادیکال هونکه[3]» در [۲۰]) است اگر برای هر S-کنش A، $r(A/r(A))=\Delta_{A/r(A)}$. متذکر می‌شویم برای رسته‌های نرمال، تعاریف از مرجع [۲] اقتباس می‌شوند. رادیکال r در **Act**-S را یک «تاب» (به شکل دقیق‌تر، «نگارنده تابی موروثی[4]») می‌نامیم اگر r موروثی باشد، یعنی r برای همهٔ زیرکنش‌های B از هر S-کنش A، دارای خاصیت $r(B)=r(A)\cap \nabla_B$ باشد. (همچنین، مرجع [۲۰] را مشاهده کنید.)

در ادامه به‌صورت کوتاه، مفهوم توپولوژی ایدآلی و مفاهیم مرتبط با آن را ذکر می‌کنیم. برای اطلاعات بیش‌تر در مورد توپولوژی‌ها روی **Act**-S و خواص آنها، به [۱۲] رجوع شود. در ابتدا عملگر بستاری $C=(C_A)_{A\in \mathrm{Act}-S}$ را یک «عملگر بستاری موجه[5]» روی **Act**-S می‌نامیم هرگاه برای همهٔ زیرکنش‌های B، B_1 و B_2 از A، این خواص را دارا باشد:

۱. $B\subseteq C_A(B)$ (توسیعی)،

1. Torsion-free
2. Preradical
3. Hoehnke
4. Hereditary
5. Modal

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.13.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.139]

۲. $B_1 \subseteq B_2$ نتیجه دهد $C_A(B_1) \subseteq C_A(B_2)$ (یکنوایی)،

۳. برای هر نگاشت حافظ کنش $f : E \to F$، داشته باشیم $C_E(f^{-1}(U)) \subseteq f^{-1}(C_F(U))$ برای هر زیرکنش U از F (پیوستگی)،

۴. برای هر نگاشت حافظ کنش $f : E \to F$، داشته باشیم $C_E(f^{-1}(U)) = f^{-1}(C_F(U))$ برای هر زیرکنش U از F (موجه).

متذکر می‌شویم C یک «عملگر بستاری» است هرگاه تنها در شرایط (۱)، (۲) و (۳) صدق کند. هم‌چنین گوییم عملگر بستاری C «خودتوان» است هرگاه برای هر زیرکنش $B \subseteq A$، داشته باشیم $C_A(C_A(B)) = C_A(B)$. برای اطلاعات بیش‌تر در مورد عملگرهای بستاری روی رسته‌های کلی‌تر و خواص آنها به [۳] مراجعه کنید.

می‌دانیم مجموعه همهٔ ایدآل‌های راست K از تکواره S همراه با کنش

$$K \cdot s = \{t \in S | \ st \in K\} \tag{۱}$$

یک S-کنش است که آن را به‌صورت RIdl(S) نمایش می‌دهیم. حال، نگاشت حافظ کنش $j : RIdl(S) \to RIdl(S)$ یک «توپولوژی (لاویر-تیرنی) ضعیف» روی **Act**- S نامیده می‌شود هرگاه این شرایط پیش آید:

الف) $j(S) = S$؛

ب) $j(K_1 \cap K_2) \subseteq j(K_1) \cap j(K_2)$، برای همه ایدآل‌های راست K_1 و K_2 از S.

علاوه براین، j «حاصل ضربی» است هرگاه در شرط (ب) به‌جای $\subseteq$، تساوی برقرار باشد. یک توپولوژی ضعیف خودتوان روی **Act**- S یک «توپولوژی» روی **Act**- S نامیده می‌شود.

از [۱۲] می‌دانیم عملگرهای بستاری موجه روی **Act**- S در تناظر دوسویی با توپولوژی‌های لاویر-تیرنی ضعیف (یا به اختصار توپولوژی‌های ضعیف) روی توپوس **Act**- S هستند. فرض می‌کنیم j یک توپولوژی (ضعیف) روی **Act**- S و $\overline{(\cdot)}$ عملگر بستاری موجه متناظر با j باشد. هم‌چنین، فرض کنیم $B \subseteq A$ یک زیرکنش باشد. گوییم B در A، « j-بسته» است اگر $\overline{B} = B$، و در A « j-چگال» است اگر $\overline{B} = A$. می‌توان فرض کرد در **Act**- S (در حد یکریختی) هر تکریختی یک نگاشت شمول است. این فرض به ما اجازه می‌دهد یک j-بافه در **Act**- S را با شکل کمی متفاوت از [۱۵] تعریف کنیم، به این‌صورت که، S-کنش C یک « j-بافه» نامیده می‌شود هرگاه برای هر زیرکنش j-چگال $B \subseteq A$، هر نگاشت حافظ کنش $h : B \to C$ را بتوان به یک نگاشت حافظ کنش یکتای $g : A \to C$ توسعه داد. گوییم C « j-جداشده» است اگر ریخت g در صورت وجود، یکتا باشد.

اکنون گیریم I ایدآل چپی از S باشد. در این صورت عملگر بستاری ایدآلی نسبت به I، معرفی شده در [۴]، با ضابطهٔ

$$C_A^I(B) = \{a \in A | \ \forall t \in I, at \in B\}, \tag{۲}$$

برای هر زیرکنش $B \subseteq A$ است، به‌آسانی دیده می‌شود C^I = C یک عملگر بستاری موجه روی توپوس **Act**- S است. حال، توپولوژی ضعیف متناظر با C^I روی **Act**- S، معرفی شده در [۱۳]، نگاشت حافظ کنش $j^I : RIdl(S) \to RIdl(S)$ با ضابطهٔ

$$j^I(K) = \{s \in S | \ \forall t \in I, st \in K\}, \tag{۳}$$

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.13.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.139]

برای هر $K \in RIdl(S)$، است. هم‌چنین متذکر می‌شویم که برای یـک ایـدآل (چـپ) I از S، j^I یـک توپولـوژی روی **Act-**S است اگر و تنها اگر $I^2 = I$ ($(IS)^2 = IS$). در ضمن، زیرکنش $B \subseteq A$، j^I-چگال است هرگاه $AI \subseteq B$.

مشخصه‌سازی‌هایی از j^I-بافه‌ها

در این بخش، قصد داریم j^I-بافه ها را در توپوس **Act-**S مشخصه‌سازی کنیم. سپس، j^I-بافه ها را برای تکواره‌هایی به شکل $S = G \dot\cup I$ بررسی می‌کنیم که در آن G یک گروه و I ایدآل دوطرفه‌ای از S است که کنش‌های روی این گونه از تکواره‌ها به‌وسیلهٔ برخی از ریاضیدانان، به‌طور مثال در [۵]، [۱۷]، بررسی شده‌اند.

در ابتدا از [۱۲] یادآوری می‌کنیم که برای ایدآل چپ I از تکواره S، S-کنش A را «I-جداشده» می‌نامیم هرگاه برای همه $a, b \in A$ داشته باشیم

$$(\forall s \in I, as = bs) \Longrightarrow a = b. \tag{۴}$$

حال نتیجه مهم و پایه‌ای زیر را از [۱۲] بیان می‌کنیم.

گزارهٔ ۱. برای ایدآل چپ I از S، یک S-کنش A، I-جداشده است اگر و تنها اگر آن j^I-جداشده باشد.

از این‌جا به بعد، طبق گزاره فوق، به‌جای مفهوم j^I-جداشده از مفهوم «I-جداشده» استفاده خواهیم کرد. حال تعریف می‌کنیم:

تعریف ۲. فرض می‌کنیم I ایدآلی راست از تکواره S است. S-کنش A را «(به‌طور یکتا) I-کامل» می‌نامیم هرگاه برای هر نگاشت حافظ کنش $f : I \to A$ عضو (یکتای) $a \in A$ موجود باشد به‌قسمی‌که $f = \lambda_a|_I$، یعنی، برای هر $s \in I$ داشته باشیم $f(s) = \lambda_a(s) = as$.

در حقیقت، منظور از یک کنش «I-کامل» A، کنش «دنباله‌ای کامل (یا به‌طور خلاصه s-کامل)» A نسبت به زیر نیم‌گروه I از تکواره S است، که در [۱۶، تعریف ۶.۲] معرفی شده است.

اکنون داریم:

لم ۳. فرض می‌کنیم I ایدآلی دوطرفه از تکواره S است. دراین‌صورت، S-کنش A به‌طور یکتا I-کامل است اگر و تنها اگر آن، I-کامل و I-جداشده باشد.

اثبات. اثبات سرراست است.

قضیهٔ ۴ مشخصه‌سازی‌های مهمی از j^I-بافه ها به‌دست می‌دهد.

قضیهٔ ۴. فرض می‌کنیم I ایدآلی دوطرفه از تکواره S است. برای S-کنش A، احکام زیر معادلند:

الف) A یک j^I-بافه است.

ب) هر نگاشت حافظ کنش $f : I \to A$ را می‌توان به‌طور یکتا به یک نگاشت حافظ کنش $\bar{f} : S \to A$ توسعه داد.

پ) A به‌طور یکتا I-کامل است.

ت) نگاشت $\lambda: A \longrightarrow Hom_S(I, A)$ با ضابطهٔ $\lambda(a) = \lambda_a$ برای هر $a \in A$، دوسویی است.

اثبات. (ب) $\Rightarrow$ (الف) از آن‌جاکه I در S چگال است، طبق (الف) نگاشت حافظ کنش یکتای $\bar{f} : S \to A$ موجود است به‌قسمی‌که $\bar{f}|_I = f$.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.13.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.139]

(پ) $\Rightarrow$ (ب) برای $f: I \to A$ مفروض، طبق (ب) نگاشت حافظ کنش یکتای $\bar{f}: S \to A$ موجود است به قسمی که $\bar{f}|_I = f$.

اکنون با در نظر گرفتن $a = \bar{f}(1)$، داریم $\bar{f} = \lambda_a$ و در نتیجه $f = \lambda_a|_I$. بنابراین، A، I-کامل است. علاوه براین، A، I-جدا شده است. زیرا برای هر $a, b \in A$ که داشته باشیم $at = bt$، برای هر $t \in I$، دو نگاشت انتقال چپ $\lambda_a, \lambda_b : I \to A$ مساویند. بنابراین طبق (ب)، دو توسیع آنها، که طبق یکتایی ریخت‌های $\bar{\lambda}_a, \bar{\lambda}_b : S \to A$، به‌ترتیب با ضابطه‌های $\bar{\lambda}_a(s) = as$ و $\bar{\lambda}_b(s) = bs$ هستند، نیز مساویند. از این‌رو، $a = \bar{\lambda}_a(1) = \bar{\lambda}_b(1) = b$. از این‌که A، I- جدا شده است، طبق لم ۳، نتیجه می‌شود که A به‌طور یکتا I-کامل است.

(الف) $\Rightarrow$ (پ) با استفاده از مرجع [۱۱]، کافی است نشان دهیم A درون‌بر مطلق یکتا[۱] است. برای انجام این کار، توسیع j^I-چگال B از A را در نظر بگیرید. برای هر $b \in B$، $\lambda_b : I \to A$ نگاشتی حافظ کنش از I به A است که چون A به‌طور یکتا I-کامل است، به‌صورت λ_{a_b}، برای عضو یکتای $a_b \in A$ است. اکنون نگارنده $b \mapsto a_b$ درون‌بری مورد نیاز را به‌دست می‌دهد. بنابراین A، درون‌بر مطلق و از این‌رو j^I-انژکتیو است. اکنون، نشان می‌دهیم A، I-جدا شده نیز هست. برای این منظور، عناصر $a, b \in A$ را چنان اختیار کنید که برای هر $n \in I$، $an = bn$. بنابراین، $\lambda_a = \lambda_b$ و طبق (پ)، $a = b$.

(ت) $\Rightarrow$ (پ) اثبات سرراست است.

در این‌جا نتیجه‌ای مانند محک بئر-اسخورنیاخف[۲] را برای j^I-بافه‌ها بیان می‌کنیم.

نتیجهٔ ۵. فرض می‌کنیم I ایدآلی دوطرفه از تکواره S است. برای S-کنش A، احکام زیر معادلند:

(الف) A، j^I-بافه است.

ب) برای هر نگاشت j^I-چگال $h: B \to cS$ به یک کنش دوری و هر نگاشت حافظ کنش $f: B \to A$ نگاشت حافظ کنش یکتای $g: cS \to A$ موجود است به‌طوری‌که $gh = f$.

پ) برای هر $c \in S$، هر نگاشت حافظ کنش $f: cI \to A$ می‌تواند به‌طور یکتا به نگاشت حافظ کنش $\bar{f}: cS \to A$ توسعه داده شود.

اثبات. (ب) $\Rightarrow$ (الف) واضح است.

(پ) $\Rightarrow$ (ب) در (ب)، قرار دهید $B = cI$. از آن‌جاکه I ایدآل چپی از S است، بنابراین $cSI \subseteq cI$، از این‌رو، $cI \subseteq cS$، j^I-چگال است.

(الف) $\Rightarrow$ (پ) با قرار دادن $c = ۱$، (پ) دقیقاً بند (ب) از قضیهٔ ۴ است که معادل با تعریف یک j^I-بافه است.

از [۱۴] یادآوری می‌کنیم که نیم‌گروه S «به‌طور یک‌به‌یک» روی S-کنش A عمل می‌کند هرگاه $as = bs$ به‌ازای یک عنصر $s \in S$ نتیجه دهد $a = b$. گزاره زیر مشخصه‌سازی دیگری از j^I-بافه‌ها به‌دست می‌دهد.

گزارهٔ ۶. گیریم ایدآل دوطرفه I از تکواره S، به‌عنوان یک نیم‌گروه، به‌طور یک‌به‌یک روی A عمل کند. در این صورت A، j^I-بافه است اگر و تنها اگر برای هر نگاشت حافظ کنش $f: S \to A$ و هر ایدآل راست متناهی مولد K از I (به‌عنوان یک نیم‌گروه)، عضو یکتای $a \in A$ موجود باشد طوری‌که $f|_K = \lambda_a|_K$.

1. Unique absolute retract
2. Baer-Skornjakov

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.13.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.139]

اثبات. برای اثبات جهت نابدیهی، گیریم $f: I \to A$ نگاشتی حافظ کنش باشد. عنصر $s \in I$ را اختیار کنید. از آن‌جاکه sS ایدآل راستی از I است بنابراین $f|_{sS}: sS \to A$ نگاشتی حافظ کنش است که طبق فرض، برای عضو یکتای $a_s \in A$، دارای شکل λ_{a_s} است. هم‌چنین برای $s \neq t \in I$، عضو یکتای $c \in A$ موجود است به‌طوری‌که $f|_{\{s,t\}S} = \lambda_c$. اکنون، داریم $a_s s = cs$ و بنابراین $a_s = c$، چون I به‌طور یک‌به‌یک روی A عمل می‌کند. به‌طور مشابه $a_t = c$، از این‌رو، $a_s = a_t$. در نتیجه همهٔ a_s ها یکسانند و برای عضو یکتای $a \in A$، داریم $f = \lambda_a|_I$. اکنون حکم از قضیهٔ ۴ نتیجه می‌شود.

گزارهٔ ۷. فرض کنیم M تکواره‌ای باشد که عضو معکوس‌پذیر راست و چپ (نابدیهی) نداشته باشد، یعنی $S = M \setminus \{1\}$ ایدآلی دو طرفه از M باشد. اگر هر ایدآل دوطرفهٔ M درون‌بری از M باشد، آن‌گاه یک M-کنش A، j^S-انژکتیو است اگر و تنها اگر برای هر ایدآل دو طرفه I از M، A، j^I-انژکتیو باشد.

اثبات: برای اثبات جهت نابدیهی، گیریم $f: I \to A$ نگاشت حافظ کنشی از یک ایدال دوطرفه I از M باشد. طبق فرض، درون‌بری $g: M \to I$ موجود است که $g|_I = id$. از این‌رو، نگاشت تحدید $fg|_S: S \to A$ حافظ کنش است و طبق j^S-انژکتیو بودن A، $a \in A$ چنان موجود است که $fg|_S = \lambda_a|_S$. بنابراین، f نیز به‌صورت λ_a است. زیرا اگر $s \in I$ را در نظر بگیرید آن‌گاه $g(s) = s$ و سپس $f(s) = fg(s) = as$

گزارهٔ ۸ خاصیت دیگری از j^I-بافه‌ها به‌دست می‌دهد. اثبات آن مشابه قضیهٔ ۳ .۲ از [۱۶] است.

گزارهٔ ۸. فرض می‌کنیم I ایدآل دوطرفه از تکواره S و $\{A_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ خانواده‌ای از S-کنش ها باشد. اگر هم حاصل ضرب این خانواده j^I-بافه باشد آن‌گاه هر A_α نیز چنین است.

بیش از این، با در نظر گرفتن ایدآل دوطرفه I به جای نیم گروه S در [۱۶]، نتایج دیگری از این مرجع را می‌توان دقیقاً برای j^I-بافه‌ها بیان کرد مانند گزارهٔ ۱۵.۲، قضیهٔ ۴.۳ و نتیجهٔ ۵.۳.

در ادامهٔ این بخش، تکواره‌های به‌صورت $S = G \dot\cup I$، که در آن G یک گروه و I ایدآل دوطرفه‌ای از S است، را بررسی می‌کنیم. در ابتدا، از [۱۴، گزارهٔ III. ۳. ۲]، تعریف (معادل) یک کنش انژکتیو ضعیف (اصلی) را یادآوری می‌کنیم:

تعریف ۹. S-کنش A «انژکتیو ضعیف (اصلی)[1]» نامیده می‌شود هرگاه برای هر ایدآل راست (اصلی) J از S و برای هر نگاشت حافظ کنش $f: J \to A$ عضو $a \in A$ موجود باشد به‌قسمی‌که $f = \lambda_a|_J$، یعنی برای هر $s \in J$ داشته باشیم $f(s) = as$.

اکنون، تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱۰. S-کنش A را «بافه ضعیف (اصلی)» می‌نامیم هرگاه برای هر ایدآل دوطرفه (اصلی) J از S، انژکتیو ضعیف (اصلی) و J-جداشده باشد.

حال داریم:

1. (principally) weakly injective

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.13.2]
[DOI: 10.52547/mmr.6.1.139]

قضیهٔ ۱۱. فرض کنیم $S=G\dot{\cup}I$ تکواره‌ای باشد که در آن G یک گروه و I ایدآل دوطرفه‌ای از S بوده است و A نیز یک S-کنش باشد. آن‌گاه، A به‌عنوان یک S-کنش، بافه ضعیف (اصلی) است هرگاه به‌عنوان یک I^1-کنش چنین باشد.

اثبات. به‌سادگی می‌توان مشاهده کرد که برای هر ایدآل دوطرفه J از S، داریم $J=S$ یا J ایدآلی از I^1 است. سپس فوراً نتیجه می‌شود که برای هر ایدآل دوطرفه J از S، A به‌عنوان یک I^1-کنش، J-جداشده است اگر و تنها اگر به‌عنوان یک S-کنش، J-جداشده باشد. اکنون تعریف ۱۰ و قضیه‌های ۲.۱و ۲.۲ از [۱۷] حکم را ثابت می‌کنند.

در قضیهٔ **۱۲**. رابطهٔ بین j^I-بافه‌ها در توپوس‌های $\mathbf{Act}\text{-}S$ و $\mathbf{Act}\text{-}I^1$ را بررسی می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۲. فرض کنید $S=G\dot{\cup}I$ یک تکواره است و همریختی نیم گروهی نابدیهی $h:S\to I^1$ با خاصیت $h(1)=1$ را اختیار کنید. در این صورت، A در توپوس $\mathbf{Act}\text{-}I^1$ یک j^I-بافه است اگر و تنها اگر A در توپوس $\mathbf{Act}\text{-}S$، j^I-بافه باشد.

اثبات. به‌آسانی دیده می‌شود S-کنش A در توپوس $\mathbf{Act}\text{-}I^1$، I-جداشده است اگر و تنها اگر در توپوس $\mathbf{Act}\text{-}S$ چنین باشد. حال قضیهٔ ۶.۳ از [۱۷] حکم را ثابت می‌کنند.

توسیع رادیکالی از S-کنش‌های جداشده

در این بخش، نشان می‌دهیم توپوس $\mathbf{Act}\text{-}S$ توسیع رادیکالی از رستهٔ $Sep_{j^I}(Act-S)$ برای یک ایدآل چپ خودتوان I از S است یعنی رادیکالی روی $\mathbf{Act}\text{-}S$ موجود است که رده بی‌تاب آن $Sep_{j^I}(Act-S)$ است؛ به‌عنوان مثالی از این نوع ایدآل‌ها، ایدآل $\mathbb{N}$ از اعداد طبیعی از تکواره $\mathbb{N}^\infty=\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ همراه با عمل کمینه را در نظر بگیرید. در ابتدا، از [۱۲] نتیجه **۱.۳** را می‌آوریم. با این وجود برای راحتی خواننده طرحی از اثبات را در این‌جا ذکر می‌کنیم.

گزارهٔ ۱۳. برای یک ایدآل (چپ) I از S با خاصیت $I^2=I$ ($(IS)^2=IS$)، تابعگون شمول $i:Sep_{j^I}(Act\text{-}S)\to Act\text{-}S$ الحاقی چپ $L:Act\text{-}S\to Sep_{j^I}(Act\text{-}S)$ با ضابطهٔ $L(A)=A/\sigma_A$ (روی اشیاء) را دارد که در آن σ_A همنهشتی S-کنشی (۵) روی A است

$$\sigma_A=\{(a,b)\in A\times A|\ \forall t\in I, at=bt\}. \tag{۵}$$

اثبات. یک بررسی ساده نشان می‌دهد که نگارنده

$$\alpha: id_{Act\text{-}S}\dot{\to} L\circ i;\ \ \alpha_A=\pi_A: A\to A/\sigma_A,$$

برای هر S-کنش A، که در آن π_A نگاشت کانونی است، یک تبدیل طبیعی است که در آن id_{Act-S} تابعگون همانی روی $\mathbf{Act}\text{-}S$ است. علاوه براین، α خاصیت جهانی یکهٔ الحاق چپ L به i را دارد (برای اطلاعات بیش‌تر، نتیجهٔ V. ۳. ۶ از [۱۵] را ملاحظه کنید).

تابعگون $L:Act\text{-}S\to Sep_{j^I}(Act\text{-}S)$ معرفی شده در گزارهٔ مذکور، به رادیکالی در رستهٔ $\mathbf{Act}\text{-}S$ به‌صورت قضیهٔ ۱۴ بالا می‌رود. متذکر می‌شویم در قضیهٔ ۱۴، I می‌تواند صرفاً ایدآل چپی از S باشد.

قضیهٔ ۱۴. گیریم I ایدآل چپی از S باشد. آن‌گاه نگارنده $r_I: A\mapsto\sigma_A$، که در آن σ_A در (۵) معرفی شده است، پیش رادیکالی در $\mathbf{Act}\text{-}S$ است. علاوه براین، r_I رادیکالی در $\mathbf{Act}\text{-}S$ است هرگاه I خودتوان باشد، یعنی $I^2=I$.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.1.13.2]

[DOI: 10.52547/mmr.6.1.139]

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم r_I پیش رادیکال است. برای انجام آن، گیریم $f: A \to B$ نگاشتی حافظ کنش باشد. باید رابطهٔ شمول $f(\sigma_A) \subseteq \sigma_B$ را ثابت کنیم. عضو دلخواه $(f(a),f(b)) \in f(\sigma_A)$ را اختیار کنید. از آن‌جاکه $(a, b) \in \sigma_A$، برای هر $t \in I$ داریم $at = bt$. این‌که f حافظ کنش است نتیجه می‌دهد برای هر $t \in I$، $f(a)t = f(b)t$. پس $(f(a), f(b)) \in \sigma_B$. اکنون فرض کنیم I خودتوان نیز باشد. سپس، برای هر S-کنش A، تساوی $r_I(A/\sigma_A) = \vartriangle_{A/\sigma_A}$ را ثابت می‌کنیم. برای هر زوج $(a/\sigma_A, b/\sigma_A) \in r_I(A/\sigma_A)$، داریم $as/\sigma_A = bs/\sigma_A$ برای هر $s \in I$. اما، طبق (۵)، تساوی $ast = bst$ برای هر $s,t \in I$ برقرار است. بنابراین، $a\,\sigma_A b$، از این‌رو، $a/\sigma_A = b/\sigma_A$، زیرا I خودتوان است. پس، $r_I(A/\sigma_A)$ مساوی با $\vartriangle_{A/\sigma_A}$ است.

نتیجهٔ ۱۵ زیر نشان می‌دهد، ردهٔ S-کنش‌های I-جداشده ردهٔ بی‌تاب از یک رادیکال است.

گزارهٔ ۱۵. اگر I ایدآل چپ خودتوانی از S باشد آن‌گاه ردهٔ متشکل از همه S-کنش‌های I-جداشده، دقیقاً ردهٔ بی‌تاب متناظر با رادیکال r_I است.

اثبات. از [۲۰] می‌دانیم ردهٔ بی‌تاب متناظر با رادیکال r_I ردهٔ همهٔ S-کنش‌های A است به‌قسمی‌که $\sigma_A = \vartriangle_A$. اما داریم $\sigma_A = \vartriangle_A$ است اگر و تنها اگر A یک S-کنش I-جداشده باشد.

رادیکال معرفی شده در قضیهٔ ۱۴ خاصیت بیش‌تری برای S-کنش‌ها دارد.

گزارهٔ ۱۶. اگر I ایدآل چپ خودتوانی از S باشد، آن‌گاه نگارنده $r_I : A \mapsto \sigma_A$، معرفی شده در (۵)، تابی در **Act-S** است.

اثبات. ابتدا، طبق قضیه ۱۴ می‌دانیم r_I یک رادیکال است. علاوه براین، برای هر S-کنش A و هر زیرکنش B از آن بی‌درنگ مشاهده می‌شود $\sigma_B = \sigma_A \cap \nabla_B$. از این رو، r_I رادیکالی موروثی است، از این‌رو، یک تاب است.

فرض کنیم B یک زیرکنش از S-کنش دلخواه A و r یک پیش‌رادیکال در رستهٔ **Act-S** باشد. در این صورت کلاس عضو B از S-کنش ریس A/B تحت هم‌نهشتی $r(A/B)$ را با $[B]_{r(A/B)}$ نشان می‌دهیم. در واقع داریم

$$[B]_{r(A/B)} = \{ a/B \in A/B \mid (a/B, B) \in r(A/B)\}.$$

حال قصد داریم به هر پیش رادیکال در **Act-S** یک عملگر بستاری نظیر کنیم (همچنین [۳] و [۷] ملاحظه شود).

لم ۱۷. متناظر با هر پیش رادیکال r در **Act-S**، با در نظر گرفتن همریختی طبیعی $\pi : A \to A/B$، عملگر بستاری C^r با ضابطهٔ $C^r_A(B) = \pi^{-1}([B]_{r(A/B)})$، برای هر S-کنش A و زیرکنش B از A موجود است. هم‌چنین، زیرکنش B از A، C^r-چگال است اگر و تنها اگر $r(A/B) = \nabla_{A/B}$.

اثبات. می‌توان مشاهده کرد که در واقع برای هر S-کنش A و هر زیر S-کنش B از A، داریم

$$C^r_A(B) = \{a \in A \mid \exists b \in B;\ (a/B, b/B) \in r(A/B)\}. \quad (۶)$$

افزون بر این به آسانی می‌توان مشاهده کرد عملگر C^r، در **Act-S** توسیعی و یکنوا است. هم‌چنین، خاصیت تعدی هم‌نهشتی $r(A/B)$ نتیجه می‌دهد زیرکنش $B \subseteq A$، C^r-چگال است اگر و تنها اگر $r(A/B) = \nabla_{A/B}$. حال ثابت می‌کنیم C^r پیوسته است. یعنی برای هر نگاشت حافظ کنش $f: A \to B$ و هر زیرکنش D از B، نشان می‌دهیم که داریم $C^r_A(f^{-1}(D)) \subseteq f^{-1}(C^r_B(D))$. اما بنا بر (۶) داریم

$$C^r_A(f^{-1}(D)) = \{a \in A \mid \exists b \in f^{-1}(D);\ (a/f^{-1}(D), b/f^{-1}(D)) \in r(A/f^{-1}(D))\} \quad (۷)$$

و

$$f^{-1}(C^r_B(D)) = \{a \in A|\ \exists d \in D;\ (f(a)/D,\ d/D) \in r(B/D)\}. \qquad (۸)$$

اکنون عضو دلخواه $a \in C^r_A(f^{-1}(D))$ را در نظر بگیرید. بنا بر رابطهٔ (۷)، عضو $b \in f^{-1}(D)$ موجود است به‌قسمی‌که $(a/f^{-1}(D), b/f^{-1}(D)) \in r(A/f^{-1}(D))$. حال به‌سادگی مشاهده می‌کنیم که نگاشت $\varphi_f : A/f^{-1}(D) \to B/D$ با ضابطهٔ $\varphi_f(a/f^{-1}(D)) = f(a)/D$ حافظ کنش است. از آن‌جاکه r پیش رادیکال است، از این‌رو، نگاشت حافظ کنش $r(\varphi_f): r(A/f^{-1}(D)) \to r(B/D)$ موجود است. حال $(a/f^{-1}(D), b/f^{-1}(D)) \in r(A/f^{-1}(D))$، نتیجه می‌دهد $(\varphi_f(a/f^{-1}(D)), \varphi_f(b/f^{-1}(D))) \in r(B/D)$، از این‌رو، $(f(a)/D, f(b)/D) \in r(B/D)$. اکنون، از آن‌جاکه $f(b) \in D$، بنا بر (۸)، $a \in f^{-1}(C^r_B(D))$.

اکنون، طبق (۵)، لم ۱۷ و قضیهٔ ۱۴، متناظر با هر پیش رادیکال r_I (برای هر ایدآل چپ I از S) در **Act**-S یک عملگر بستاری C^{r_I} با ضابطهٔ

$$C^{r_I}_A(B) = \{a \in A|\ \exists b \in B;\ \forall t \in I,\ at = bt\} \qquad (۹)$$

را داریم.

گزارهٔ ۱۸ رابطهٔ بین عملگرهای بستاری C^{r_I} و C^I را نشان می‌دهد.

گزارهٔ ۱۸. گیریم I ایدآل چپی از S باشد. آن‌گاه $C^{r_I} \subseteq C^I$. عکس شمول برقرار است اگر I همانی چپ داشته باشد.

اثبات. طبق روابط (۲) و(۹)، قسمت اول گزاره برقرار است. برای اثبات قسمت دوم، زیرکنش $B \subseteq A$ و عضو $a \in C^I_A(B)$ را در نظر بگیرید. هم‌چنین عضو همانی چپ I را با e نمایش می‌دهیم. طبق (۲)، برای هر $t \in I$ داریم $at \in B$. بنابراین، هم‌چنین $ae \in B$. اکنون برای هر $t \in I$ داریم $at = aet$. اکنون طبق (۹) حکم برقرار است.

به آسانی می‌توان مشاهده کرد که زیرکنش $B \subseteq A$، C^{r_I}-چگال است هرگاه برای هر عضو $a \in A$، عضو $b \in B$ موجود باشد طوری‌که برای هر $t \in I$، تساوی $at = bt$ برقرار باشد. علاوه براین، در [۱]، بافه‌ها نسبت به عملگرهای بستاری روی یک رسته با حدهای متناهی تعریف شده‌اند. به‌طور مشابه، در این‌جا نیز می‌توانیم S-کنش C را یک «C^{r_I}-بافه» بنامیم هرگاه برای هر زیرکنش C^{r_I}-چگال $B \subseteq A$، هر نگاشت حافظ کنش $h : B \to C$ را بتوان به یک نگاشت حافظ کنش یکتای $g : A \to C$ توسعه داد، یعنی $g|_B = h$. حال قضیهٔ ۱۹ که فوراً از گزارهٔ ۱۸ به‌دست می‌آید، ویژگی دیگری از j^I-بافه‌ها در **Act**-S را به‌دست می‌دهد.

قضیهٔ ۱۹. گیریم I ایدآل چپی از S باشد. در این صورت، اگر زیرکنش $B \subseteq A$، C^{r_I}-چگال باشد آن‌گاه j^I-چگال نیز هست. در ضمن، هر j^I-بافه یک C^{r_I}-بافه نیز هست.

منابع

1. Carboni A., Mantovani S., "An Elementary Characterization of Categories of Separated Objects", J. Pure and Appl. Alg., 89 (1993) 63-92.
2. Clementino M. M., Dikranjan D., Tholen W., "Torsion Theories and Radicals in Normal Categories", J. Algebra 305 (2006) 98-129.

3. Dikranjan D., Tholen W., "Categorical Structure of Closure Operators. Kluwer", Netherlands, (1995).

4. Ebrahimi M. M., "On Ideal Closure Operators of *M*-Sets", Southeast Asian Bull, of Math., 30 (2006) 439-444.

5. Golchin A., Renshow J., "Periodic Monoids over which all Flat Cyclic Right Acts Satisfy Condition (P)", Semigroup Forum, 54 (2) (1997) 261-263.

6. Golchin A., "On Flatness of Acts", Semigroup Forum, 67 (2003) 262-270.

7. Haddadi M., Sheykholislamia S. M. N., "Radical-Injectivy in the Category *S*-Act", arXiv:1806.07077v1.

8. Jackson M., "A Sheaf Theoretic Approach to Measure Theory", PhD Thesis, University of Pittsburgh (2006).

9. Kashu A. I., "On Preradicals Associated to Principal Functors of Module Categories", I, Bul. A. S. R. M., Matematica, 2 (60) (2009) 62-72.

10. Khanjanzadeh Z., "Topologies on Topos *M*-**Act** and on Some Models of SDG", Ph.D. Thesis, Semnan University, March (2017).

11. Khanjanzadeh Z., Madanshekaf A., "Lawvere-Tierney Sheaves, Factorization Systems, Sections and *j*-essential Monomorphisms in a Topos", Italian J. Pure Appl. Math., 39 (2018) 55-72.

12. Khanjanzadeh Z., Madanshekaf A., "Weak Ideal Topology in the Topos of Right Acts over a Monoid", Comm. Alg., 46 (5) (2018) 1868-1888.

13. Khanjanzadeh Z., Madanshekaf A., "Weak Topologies on Toposes", Bull. Iran. Math. Soc. (2020). https://doi.org/10.1007/s41980-020-00393-7.

14. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A., "Monoids, Acts and Categories", Walter de Gruyter, Berlin, New York, (2000).

15. Mac Lane S., Moerdijk I., "Sheaves in Geometry and Logic", Springer-Verlag, New York, (1992).

16. Mahmoudi M., Shahbaz L., "Characterizing Semigroups by Sequentially Dense Injective Acts", Semigroup Forum, 75 (2007) 116-128.

17. Moghaddasi Gh., Haddadi M., Delavari S., "On Injectivity of Acts", U.P.B. Sci. Bull., Series A, 79 (4) (2017) 189-198.

18. Nakayama K., "Topologies on Quantum Topoi Induced by Quantization", J. Math. Phys., 54 (2013) 072102.

19. Nakayama K., "Topos Quantum Theory on Quantization-Induced Sheaves", J. Math. Phys., 55 (2014) 102103.

20. Wiegandt R., "Radical and Torsion Theory for Acts", Semigroup Forum, 72 (2006) 312-328.