بررسی زیرجمعی بودن توابع روی عملگرهای مثبت بدون فرض یکنوایی و تحدب عملگری

احسان انجیدنی
دانشگاه نیشابور، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی

دریافت ۹۸/۰۱/۰۲ پذیرش ۹۸/۰۴/۲۶

چکیده

در این مقاله، زیرجمعی بودن توابع روی عملگرهای مثبت را بدون فرض یکنوایی عملگری و تحدب عملگری بررسی می‌کنیم. گیریم A و B عملگرهای مثبت روی یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند و $AB+BA \leq 0$. فرض کنید برای عملگر

$$E=(A+B)^{-\frac{1}{2}}(A^2+B^2)(A+B)^{-\frac{1}{2}},$$

بازه باز (m_E, M_E)، که در آن، m_E و M_E کران‌های عملگر E هستند، با طیف‌های مربوط به عملگرهای A و B اشتراک نداشته باشد. در این‌صورت، برای هر تابع پیوسته $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}^+$ که برای آن، تابع $f(t)=\frac{g(t)}{t}$ محدب و نزولی باشد، داریم:

$$g(A+B)\leq c(m,M,f)(g(A)+g(B)),$$

که در آن، m و M کران‌های عملگر $A+B$ هستند و

$$c(m,M,f):=\max_{m\leq t\leq M}\left\{\frac{\frac{f(M)-f(m)}{M-m}t+\frac{Mf(m)-mf(M)}{M-m}}{f(t)}\right\}.$$

واژه‌های کلیدی: ترتیب ماتریسی، نامساوی عملگری زیرجمعی، تابع یکنوا، تابع محدب، نامساوی عملگری ینسن.

مقدمه

در سراسر این مقاله، $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ را C^*-جبر همه عملگرهای خطی کراندار روی یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ و $1_{\mathcal{H}}$ را عملگر همانی روی $\mathcal{H}$ در نظر می‌گیریم. کران‌های یک عملگر خودالحاق[1] $A\in\mathbb{B}(\mathcal{H})$ را به‌صورت

$$m_A=\inf_{\|x\|=1}\langle Ax,x\rangle,\quad M_A=\sup_{\|x\|=1}\langle Ax,x\rangle,$$

تعریف می‌کنیم. یک عملگر $A\in\mathbb{B}(\mathcal{H})$ را مثبت[2] گوییم اگر به‌ازای هر $x\in\mathcal{H}$ داشته باشیم $\langle Ax,x\rangle\geq 0$. وقتی که A یک عملگر مثبت است، می‌نویسیم $A\geq 0$. برای عملگرهای خودالحاق A و B در $\mathbb{B}(\mathcal{H})$، می‌نویسیم $A\leq B$ اگر $0\leq B-A$. یک نگاشت Φ روی $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ را مثبت گوییم اگر به‌ازای هر $A\leq 0$، داشته باشیم $\Phi(A)\geq 0$.

فرض کنیم J یک بازه حقیقی و f تابعی پیوسته و حقیقی روی آن باشد. برای یک عملگر خودالحاق A که طیف[3] آن، زیرمجموعه‌ای از J است (طیف A را با $\sigma(A)$ نشان می‌دهیم)، $f(A)$ نشان‌دهندهٔ حساب تابعی[4] است. یادآوری

*نویسنده مسئول ehsan.mathematics@gmail.com

1. Self-adjoint operator
2. Positive
3. Spectrum
4. Functional calculus

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.15.0]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.521]

می‌کنیم که طبق قضیه‌ای در نظریه عملگرها، اگر A یک عملگر خودالحاق در فضای $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ بوده است و z تابع شمول از $\sigma(A)$ به میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ باشد، آن‌گاه هم‌ریختی یکتای $\varphi: \mathcal{C}\big(\sigma(A)\big) \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$ موجود است به‌طوری‌که $\varphi(1) = 1_{\mathcal{H}}$ و $\varphi(z) = A$. تابع φ حساب تابعی در A گفته شده و به‌ازای هر $f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$، عملگر $\varphi(f)$ با $f(A)$ نمایش داده می‌شود. در این‌جا منظور از $\mathcal{C}\big(\sigma(A)\big)$، مجموعهٔ تمام توابع پیوسته و مختلط روی $\sigma(A)$ است.

تابع f، یکنوای عملگری[1] نامیده می‌شود اگر برای عملگرهای خودالحاق A و B با $A \le B$، داشته باشیم $f(A) \le f(B)$. هم‌چنین، تابع f را تابع محدب عملگری[2] گوییم اگر برای هر $0 < t < 1$ و برای هر دو عملگر خودالحاق A و B که طیف آنها در J است، داشته باشیم

$$f(tA + (1-t)B) \le tf(A) + (1-t)f(B).$$

در مرجع [۶]، نشان داده شده است که برای عملگرهای مثبت A و B، اگر $0 \le AB + BA$، آن‌گاه برای هر تابع نامنفی و یکنوای عملگری f روی $[0,\infty)$ داریم:

$$f(A+B) \le f(A) + f(B). \tag{۱}$$

در [۸]، همین نتیجه برای تعدادی متناهی از عملگرهای مثبت، با روشی متفاوت اثبات شده است. در ادامه، نتیجهٔ مذکور را می‌آوریم.

قضیهٔ ۱. [۸، قضیهٔ ۲.۱]. *فرض کنید عملگرهای* A_i $(1 \le i \le n)$، *عملگرهای مثبت در* $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ *باشند. در این‌صورت، گزاره‌های زیر با هم معادلند:*

الف) $\sum_{i\neq j} A_iA_j \ge 0$؛

ب) برای هر تابع محدب عملگری g روی $[0,\infty)$ با شرط $g(0) \le 0$ داریم

$$g(A_1 + \cdots + A_n) \ge g(A_1) + \cdots + g(A_n);$$

پ) برای هر تابع یکنوای عملگری و نامنفی f روی $[0,\infty)$ داریم

$$f(A_1 + \cdots + A_n) \le f(A_1) + \cdots + f(A_n).$$

اکنون سوال این است که اگر شرط‌های ضعیف‌تر یکنوایی و تحدب معمولی را جای‌گزین یکنوایی عملگری و تحدب عملگری کنیم، تحت چه شرایطی نامساوی عملگری زیرجمعی (۱)، برقرار است؟ می‌دانیم که اگر h تابعی مقعر و نامنفی روی بازه $[0,\infty)$ باشد، آن‌گاه به‌ازای هر $a \ge 0$، تابع $x \mapsto \frac{h(x)-h(a)}{x-a}$ نزولی است. از این‌رو، تابع $\frac{h(x)}{x}$ نزولی است. از این‌جا به‌ازای هر $0 < a, b$، داریم:

$$\frac{h(a)}{a} \ge \frac{h(a+b)}{a+b} \quad , \quad \frac{h(b)}{b} \ge \frac{h(a+b)}{a+b}.$$

بنابراین تابع h، زیرجمعی[3] است [۸]، به‌عبارت دیگر

$$h(a+b) \le h(a) + h(b).$$

در مرجع [۳]، یک نسخه عملگری از این نامساوی ثابت می‌شود: برای ماتریس‌های مثبت A و B و برای هر نرم پایای یکانی[4] $\|\cdot\|$ داریم:

$$\| h(A+B) \| \le \| h(A) + h(B) \|.$$

یادآوری می‌کنیم که نرم $\|\cdot\|$ روی $\mathcal{M}_n$، فضای ماتریس‌های $n \times n$، پایای یکانی گفته می‌شود اگر برای هر

1. Operator monotone
2. Operator convex
3. Subadditive
4. Unitarily invariant

$A \in \mathcal{M}_n$ و هر دو ماتریس یکانی $U, V \in \mathcal{M}_n$ داشته باشیم $\| UAV \| = \| A \|$.

در این مقاله، با استفاده از یک نتیجهٔ کلی که برقراری نامساوی عملگری ینسن[1] را برای توابع محدب نشان می‌دهد [۱]، [۴]. یک نسخه از نامساوی عملگری (۱) را بدون فرض یکنوایی عملگری یا تحدب عملگری، اثبات می‌کنیم. برای اثبات این مطلب، هم‌چنین از نتیجه‌ای استفاده می‌کنیم که بر پایه نامساوی‌های نوع کانتوروویچ[2]، نوعی یکنوایی عملگری را برای توابع محدب معمولی نشان می‌دهد[۵]،[۷].

نتایج اصلی

قضیهٔ ۲، که مربوط به نامساوی‌های عملگری بر پایه نامساوی‌های نوع کانتوروویچ برای توابع محدب است، در [۵] اثبات شده است.

قضیهٔ ۲. *فرض کنید* A *و* B *عملگرهای مثبت در* $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ *باشند به‌طوری‌که* $0 < B \le A$ *و* $\sigma(B) \subseteq [m, M]$*، که در آن* $0 < m < M$*. گیریم* f *یک تابع حقیقی-مقدار پیوسته و محدب روی* $[m, M]$ *است و* g *یک تابع حقیقی-مقدار پیوسته روی بازه* J *باشد، که در آن* $[m, M] \cup \sigma(A) \subseteq J$*. هم‌چنین فرض کنید که یکی از این شرایط برقرار باشد:*

الف) تابع g روی بازهٔ J، محدب و صعودی است، یا

ب) تابع g روی بازهٔ J، مقعر و نزولی است.

در این‌صورت، برای عدد حقیقی مثبت α در حالت (الف) و یا عدد حقیقی منفی α در حالت (ب)، نامساوی

$$\alpha g(A) + \beta 1_{\mathcal{H}} \ge f(B)$$

به‌دست می‌آید که در آن،

$$\beta = \max_{m \le t \le M} \left\{ \frac{f(M) - f(m)}{M - m} t + \frac{Mf(m) - mf(M)}{M - m} - \alpha g(t) \right\}.$$

برای اثبات نتیجه اصلی در این مقاله، قضیه زیر را به‌کار می‌گیریم که نتیجه‌ای از قضیه ۲،۱ می‌باشد.

قضیهٔ ۳. [۲، نتیجهٔ ۳.۳]. *فرض کنید* A *و* B *عملگرهای مثبت در* $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ *باشند به‌طوری‌که* $\sigma(B) \subseteq [m, M]$*. تابع* $f > 0$ *را تابعی پیوسته و محدب روی بازهٔ* J *شامل مجموعه* $[m, M] \cup \sigma(A)$ *در نظر می‌گیریم. هم‌چنین فرض کنید که یکی از این شرایط به‌دست آید:*

الف) $0 < B \le A$ و f صعودی است، یا

ب) $0 < A \le B$ و f نزولی است.

در این‌صورت داریم

$$f(B) \le c(m, M, f) f(A),$$

که در آن،

$$c(m, M, f) := \max_{m \le t \le M} \left\{ \frac{\frac{f(M) - f(m)}{M - m} t + \frac{Mf(m) - mf(M)}{M - m}}{f(t)} \right\}.$$

در اثبات نتیجه اصلی این مقاله، هم‌چنین از یک قضیه مربوط به نامساوی عملگری ینسن برای توابع محدب معمولی استفاده می‌کنیم. این قضیه بدین‌صورت است:

1. Jensen’s operator inequality
2. Kantorovich

[DOR: 20.1001.1.25882546.1399.6.4.15.0]
[DOI: 10.52547/mmr.6.4.521]

قضیهٔ ۴. [۴]، *فرض کنید $A_1, \dots, A_n$ عملگرهای خودالحاق در $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ با کران‌های m_i و M_i، $m_i \leq M_i$ باشند. گیریم $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ نگاشت‌های خطی مثبت روی $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ باشند به‌طوری‌که $\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(1_{\mathcal{H}}) = 1_{\mathcal{H}}$. هم‌چنین* فرض می‌کنیم به ازای هر $1 \leq i \leq n$،

$$(m_C, M_C) \cap [m_i, M_i] = \emptyset, \tag{۲}$$

که در آن، m_C و M_C کران‌های عملگر خودالحاق $C = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(A_i)$ هستند. اگر f تابعی حقیقی-مقدار، محدب و پیوسته روی بازهٔ J شامل m_i و M_iها باشد، آن‌گاه داریم:

$$\mathrm{f}\left(\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(A_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \Phi_i\big(\mathrm{f}(A_i)\big). \tag{۳}$$

اکنون نتیجهٔ اصلی این مقاله را ثابت می‌کنیم. در این قضیه، نامساوی عملگری زیرجمعی (۱)، بدون فرض یکنوایی و تحدب عملگری، ثابت می‌شود. در اثبات این قضیه، از قضیه‌های ۳ و ۴ استفاده می‌کنیم.

قضیهٔ ۵. *عملگرهای مثبت و وارون‌پذیر A با کران‌های m_1 و M_1 و B با کران‌های m_2 و M_2 را در $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ در نظر می‌گیریم به قسمی که $AB + BA \geq 0$. قرار می‌دهیم $E = (A+B)^{-\frac{1}{2}}(A^2+B^2)(A+B)^{-\frac{1}{2}}$. فرض می‌کنیم:*

$$(m_E, M_E) \cap [m_i, M_i] = \emptyset \quad (i = 1,2), \tag{۴}$$

که در آن، m_E و M_E کران‌های عملگر E هستند. در این‌صورت، برای هر تابع پیوسته و مثبت $g: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ که برای آن، تابع $f(t) = \frac{g(t)}{t}$، تابعی محدب و نزولی باشد، داریم:

$$g(A+B) \leq c(m, M, f)\big(g(A) + g(B)\big), \tag{۵}$$

که در آن، m و M کران‌های عملگر $A+B$ هستند و

$$c(m, M, f) := \max_{m \leq t \leq M} \left\{ \frac{\frac{f(M)-f(m)}{M-m} t + \frac{Mf(m)-mf(M)}{M-m}}{f(t)} \right\}.$$

برهان. با توجه به این‌که $AB + BA \geq 0$، داریم:

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA \geq A^2 + B^2 > 0.$$

از این‌رو داریم $A + B \geq E > 0$. تابع مثبت و پیوسته g را روی بازهٔ $(0,\infty)$ طوری در نظر می‌گیریم که تابع $f(t) = \frac{g(t)}{t}$، تابعی محدب و نزولی باشد. طبق قضیهٔ ۳ داریم:

$$f(A+B) \leq c(m, M, f) f(E).$$

در نتیجه داریم

$$(A+B)^{-1} g(A+B) \leq c(m, M, f) E^{-1} g(E). \tag{۶}$$

اکنون نگاشت‌های Φ_1 و Φ_2 را روی $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ با ضابطه‌های

$$\Phi_1(X) = (A+B)^{-\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} X A^{\frac{1}{2}} (A+B)^{-\frac{1}{2}},$$

و

$$\Phi_2(X) = (A+B)^{-\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} X B^{\frac{1}{2}} (A+B)^{-\frac{1}{2}}$$

تعریف می‌کنیم. واضح است که Φ_1 و Φ_2 عملگرهای خطی مثبت است و داریم $\Phi_1(1_{\mathcal{H}}) + \Phi_2(1_{\mathcal{H}}) = 1_{\mathcal{H}}$. هم‌چنین داریم $\Phi_1(A) + \Phi_2(B) = E$. اکنون با استفاده از قضیهٔ ۴، نامساوی

$$f(E) \leq (A+B)^{-\frac{1}{2}} \left(A^{\frac{1}{2}} f(A) A^{\frac{1}{2}} + B^{\frac{1}{2}} f(B) B^{\frac{1}{2}} \right) (A+B)^{-\frac{1}{2}}$$

را داریم. از این‌جا نامساوی

$$E^{-1}g(E) \leq (A+B)^{-\frac{1}{2}}(g(A)+g(B))(A+B)^{-\frac{1}{2}}, \tag{۷}$$

به‌دست می‌آید. بنابراین، با استفاده از نامساوی‌های (۶) و (۷) داریم:

$$(A+B)^{-1}g(A+B) \leq c(m,M,f)(A+B)^{-\frac{1}{2}}(g(A)+g(B))(A+B)^{-\frac{1}{2}}.$$

از این‌جا، نامساوی (۵) به‌دست می‌آید.

چنان‌که در بخش مقدمه اشاره شد، نتایجی که در [۶] و [۸]، نامساوی عملگری (۱) را به‌دست می‌دهند، با فرض یکنوایی عملگری یا تحدب عملگری توابع روی بازه $[0,\infty)$ حاصل شده‌اند. در مثال زیر، روی تابعی بحث می‌کنیم که یکنوای عملگری و محدب عملگری نیست اما در شرایط نتیجه اصلی این مقاله صدق می‌کند. از این‌رو، مثال ۶، کاربرد قضیهٔ ۵ را در به‌دست آوردن نامساوی عملگری زیرجمعی برای دسته‌ای از توابع که لزوماً محدب و یکنوای عملگری نیستند، نشان می‌دهد.

مثال ۶. *ماتریس همانی $A=I$ و ماتریس $B=2I$ را در فضای ماتریس‌های مختلط 2×2، $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ و تابع $g(t)=\frac{1}{t^2}$ را روی بازه $(0,\infty)$ در نظر می‌گیریم. واضح است که تابع g در نقطه صفر تعریف نشده* است از این‌رو، قضیهٔ ۱ را نمی‌توان برای به‌دست آوردن نامساوی عملگری (۱) در مورد این تابع به‌کار برد. هم‌چنین خاطرنشان می‌کنیم که *تابع g، یکنوای عملگری نیست. این تابع، محدب عملگری نیز نیست. به‌طور مثال، اگر ماتریس‌های مثبت*

$$M=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\quad,\quad N=\begin{pmatrix}2 & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & 10\end{pmatrix}$$

را در نظر بگیریم، آن‌گاه داریم:

$$\frac{g(M)+g(N)}{2}-g\left(\frac{M+N}{2}\right)=\frac{M^{-2}+N^{-2}}{2}-\left(\frac{M+N}{2}\right)^{-2}\ngeq 0.$$

با وجود همهٔ این موارد، شرایط قضیهٔ ۵ برقرار است، زیرا مشاهده می‌کنیم که تابع $f(t)=\frac{1}{t^3}$، تابعی محدب و نزولی روی $(0,\infty)$ است. هم‌چنین، به‌راحتی دیده می‌شود که عملگر E در قضیهٔ ۵ برابر است با ماتریس

$$\begin{pmatrix}\frac{5}{3} & 0\\ 0 & \frac{5}{3}\end{pmatrix}.$$

از این‌رو، $m_E=M_E=\frac{5}{3}$. پس شرایط (۴) برقرار است. بنابراین، برای این مثال، می‌توان از قضیهٔ ۵ استفاده کرد.

نکتهٔ ۷. [۱، نتیجهٔ ۳.۳]، *نتیجه‌ای کلی‌تر از قضیهٔ ۴ اثبات شده است. در واقع، در آن مقاله، با فرض*

$$\sigma(A_j)\subseteq J\backslash(m_A,M_A), \tag{۸}$$

که ضعیف‌تر از شرط (۲) است، نامساوی (۳) نتیجه می‌شود. این‌جا، m_A و M_A، کران‌های عملگر خودالحاق $A=\sum_{j=1}^{n}\Phi_j(A_j)$ است که در آن، Φ_jها نگاشت‌های خطی مثبت روی $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ و A_j ها عملگرهای خودالحاق روی $\mathcal{H}$ هستند. در ادامه، با جای‌گزینی شرط (۸) با (۴) در قضیهٔ ۵، نتیجهٔ قوی‌تر ۸ را به‌دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۸. *عملگرهای مثبت و وارون‌پذیر A و B را طوری در نظر می‌گیریم که $0\leq AB+BA$ و عملگر E را همان عملگر تعریف شده در قضیهٔ ۵ فرض می‌کنیم. اگر $\sigma(A)$ و $\sigma(B)$ زیرمجموعه‌های $(0,\infty)\backslash(m_E,M_E)$ باشند،*

آن‌گاه برای توابع g و f با شرایط گفته شده در قضیۀ ۵، نامساوی (۵) برقرار است.

برهان. اثبات مشابه برهان قضیۀ ۵ است.

در مثال زیر، قوی‌تر بودن قضیۀ ۸ را نسبت به قضیۀ ۵ نشان می‌دهیم.

مثال ۹. *توابع g و f را همان توابع مثال ۶ در نظر می‌گیریم. ماتریس‌های*

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$$

دو ماتریس مثبت بوده و داریم $0 \leq AB+BA$. هم‌چنین محاسبه نشان می‌دهد که

$$\sigma(A)=\{0.19,1.13\},\quad \sigma(B)=\{2.58,5.41\}$$

و نیز

$$[m_E,M_E]\subseteq[3.3,4.82].$$

بنابراین، شرایط قضیۀ ۸ برقرار است و در نتیجه داریم:

$$(A+B)^{-2}\leq c(m,M,f)(A^{-2}+B^{-2}),\tag{۹}$$

که در آن،

$$c(m,M,f)=2.94.$$

این در حالی است که شرط (۴) برای این ماتریس‌ها صدق نمی‌کند از این‌رو، نمی‌توان (۹) را با استفاده از قضیۀ ۵ به‌دست آورد.

منابع

1. Anjidani E., "On operator inequalities of Jensen type for convex functions", Linear and Multilinear Algebra, 65 (2017) 1493-1502.
2. Anjidani E., Changalvaiy M. R., "Reverse Jensen–Mercer type operator inequalities", Electron J Linear Algebra, 31 (2016) 87-99.
3. Bourin J. C., Uchiyama M., "A matrix subadditivity inequality for f(A + B) and f(A) + f(B)", Linear Algebra Appl., 423 (2007) 512-518.
4. Mićić J., Pavić Z., Pečarić J., "Jensen’s inequality for operators without operator convexity", Linear Algebra Appl., 434 (2011) 1228-1237.
5. Mićić J., Pečarić J., Seo Y., "Function order of positive operators based on the Mond–Pečarić method", Linear Algebra Appl., 360 (2003) 15-34.
6. Moslehian M. S., Najafi H., "Around operator monotone functions", Integral Equations Operator Theory, 71 (2011) 575-582.
7. Pečarić J., Mićić J., "Some functions reversing the order of positive operators", Linear Algebra Appl., 396 (2005) 175-187.
8. Uchiyama M., Uchiyama A., Giga M., "Superadditivity and derivative of operator functions", Linear Algebra Appl., 465 (2015) 401-411.