

## بررسی زیرجمعی بودن توابع روی عملگرهای مثبت بدون فرض یکنوایی و تحدب عملگری

### احسان انجیدنی

دانشگاه نیشابور، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

پذیرش ۹۸/۰۴/۲۶

دریافت ۹۸/۰۱/۰۲

### چکیده

در این مقاله، زیرجمعی بودن توابع روی عملگرهای مثبت را بدون فرض یکنوایی عملگری و تحدب عملگری بررسی می‌کنیم. گیریم  $A$  و  $B$  عملگرهای مثبت روی یک فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$  باشند و  $0 \leq AB + BA$ . فرض کنید برای عملگر

$$E = (A + B)^{-\frac{1}{2}}(A^2 + B^2)(A + B)^{-\frac{1}{2}},$$

بازه باز  $(m_E, M_E)$ ، که در آن،  $m_E$  و  $M_E$  کران‌های عملگر  $E$  هستند، با طیف‌های مربوط به عملگرهای  $A$  و  $B$  اشتراک نداشته باشد. در این صورت، برای هر تابع پیوسته  $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$  که برای آن، تابع  $f(t) = \frac{g(t)}{t}$  محدب و نزولی باشد، داریم:

$$g(A + B) \leq c(m, M, f)(g(A) + g(B)),$$

که در آن،  $m$  و  $M$  کران‌های عملگر  $A + B$  هستند و

$$c(m, M, f) := \max_{m \leq t \leq M} \left\{ \frac{\frac{f(M) - f(m)}{M - m} t + \frac{Mf(m) - mf(M)}{M - m}}{f(t)} \right\}.$$

**واژه‌های کلیدی:** ترتیب ماتریسی، نامساوی عملگری زیرجمعی، تابع یکنوا، تابع محدب، نامساوی عملگری یسنن.

### مقدمه

در سراسر این مقاله،  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$  را  $C^*$ -جبر همه عملگرهای خطی کراندار روی یک فضای هیلبرت  $\mathcal{H}$  و  $1_{\mathcal{H}}$  را عملگر همانی روی  $\mathcal{H}$  در نظر می‌گیریم. کران‌های یک عملگر خودالحاق  $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$  را به صورت

$$m_A = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle, \quad M_A = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle,$$

تعریف می‌کنیم. یک عملگر  $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$  را مثبت<sup>۲</sup> گوئیم اگر به‌ازای هر  $x \in \mathcal{H}$  داشته باشیم  $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ . وقتی که  $A$  یک عملگر مثبت است، می‌نویسیم  $A \geq 0$ . برای عملگرهای خودالحاق  $A$  و  $B$  در  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ ، می‌نویسیم  $A \leq B$  اگر  $0 \leq B - A$ . یک نگاشت  $\Phi$  روی  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$  را مثبت گوئیم اگر به‌ازای هر  $0 \leq A$  داشته باشیم  $\Phi(A) \geq 0$ .

فرض کنیم  $J$  یک بازه حقیقی و  $f$  تابعی پیوسته و حقیقی روی آن باشد. برای یک عملگر خودالحاق  $A$  که طیف<sup>۳</sup> آن، زیرمجموعه‌ای از  $J$  است (طیف  $A$  را با  $\sigma(A)$  نشان می‌دهیم)،  $f(A)$  نشان‌دهنده حساب تابعی<sup>۴</sup> است. یادآوری

\*نویسنده مسئول [ehsan.mathematics@gmail.com](mailto:ehsan.mathematics@gmail.com)

1. Self-adjoint operator  
2. Positive  
3. Spectrum  
4. Functional calculus

می‌کنیم که طبق قضیه‌ای در نظریه عملگرها، اگر  $A$  یک عملگر خودالحاق در فضای  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$  بوده است و  $Z$  تابع شمول از  $\sigma(A)$  به میدان اعداد مختلط  $\mathbb{C}$  باشد، آن‌گاه هم‌ریختی یکتای  $\varphi: \mathcal{C}(\sigma(A)) \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H})$  موجود است به طوری که  $\varphi(1) = 1_{\mathcal{H}}$  و  $\varphi(z) = A$  تابع  $\varphi$  حساب تابعی در  $A$  گفته شده و به‌ازای هر  $f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$  عملگر  $\varphi(f)$  با  $f(A)$  نمایش داده می‌شود. در این‌جا منظور از  $\mathcal{C}(\sigma(A))$ ، مجموعه تمام توابع پیوسته و مختلط روی  $\sigma(A)$  است.

تابع  $f$ ، یکنوای عملگری<sup>۱</sup> نامیده می‌شود اگر برای عملگرهای خودالحاق  $A$  و  $B$  با  $A \leq B$ ، داشته باشیم  $f(A) \leq f(B)$ . همچنین، تابع  $f$  را تابع محدب عملگری<sup>۲</sup> گوئیم اگر برای هر  $0 < t < 1$  و برای هر دو عملگر خودالحاق  $A$  و  $B$  که طیف آنها در  $J$  است، داشته باشیم

$$f(tA + (1-t)B) \leq tf(A) + (1-t)f(B).$$

در مرجع [۶]، نشان داده شده است که برای عملگرهای مثبت  $A$  و  $B$ ، اگر  $0 \leq AB + BA$ ، آن‌گاه برای هر تابع نامنفی و یکنوای عملگری  $f$  روی  $[0, \infty)$  داریم:

$$f(A + B) \leq f(A) + f(B). \quad (۱)$$

در [۸]، همین نتیجه برای تعدادی متناهی از عملگرهای مثبت، با روشی متفاوت اثبات شده است. در ادامه، نتیجه مذکور را می‌آوریم.

قضیه ۱. [۸] قضیه ۲. ۱، فرض کنید عملگرهای  $A_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) عملگرهای مثبت در  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$  باشند. در این صورت، گزاره‌های زیر با هم معادلند:

$$\text{الف) } \sum_{i \neq j} A_i A_j \geq 0$$

ب) برای هر تابع محدب عملگری  $g$  روی  $[0, \infty)$  با شرط  $g(0) \leq 0$  داریم

$$g(A_1 + \dots + A_n) \geq g(A_1) + \dots + g(A_n);$$

پ) برای هر تابع یکنوای عملگری و نامنفی  $f$  روی  $[0, \infty)$  داریم

$$f(A_1 + \dots + A_n) \leq f(A_1) + \dots + f(A_n).$$

اکنون سوال این است که اگر شرط‌های ضعیف‌تر یکنوایی و تحدب معمولی را جایگزین یکنوایی عملگری و تحدب عملگری کنیم، تحت چه شرایطی نامساوی عملگری زیرجمعی (۱)، برقرار است؟ می‌دانیم که اگر  $h$  تابعی مقعر و نامنفی روی بازه  $[0, \infty)$  باشد، آن‌گاه به‌ازای هر  $a \geq 0$ ، تابع  $x \mapsto \frac{h(x)-h(a)}{x-a}$  نزولی است. از این‌رو، تابع  $\frac{h(x)}{x}$  نزولی است. از این‌جا به‌ازای هر  $0 < a, b$  داریم:

$$\frac{h(a)}{a} \geq \frac{h(a+b)}{a+b}, \quad \frac{h(b)}{b} \geq \frac{h(a+b)}{a+b}.$$

بنابراین تابع  $h$ ، زیرجمعی<sup>۳</sup> است [۸]، به‌عبارت دیگر

$$h(a+b) \leq h(a) + h(b).$$

در مرجع [۳]، یک نسخه عملگری از این نامساوی ثابت می‌شود: برای ماتریس‌های مثبت  $A$  و  $B$  و برای هر نرم پایای یکانی<sup>۴</sup>  $\|\cdot\|$  داریم:

$$\|h(A+B)\| \leq \|h(A) + h(B)\|.$$

یادآوری می‌کنیم که نرم  $\|\cdot\|$  روی  $\mathcal{M}_n$ ، فضای ماتریس‌های  $n \times n$ ، پایای یکانی گفته می‌شود اگر برای هر

1. Operator monotone  
2. Operator convex  
3. Subadditive  
4. Unitorily invariant

$A \in \mathcal{M}_n$  و هر دو ماتریس یکانی  $U, V \in \mathcal{M}_n$  داشته باشیم  $\|UAV\| = \|A\|$ .

در این مقاله، با استفاده از یک نتیجه کلی که برقراری نامساوی عملگری یسنس<sup>۱</sup> را برای توابع محدب نشان می‌دهد [۱]، [۴]. یک نسخه از نامساوی عملگری (۱) را بدون فرض یکنوایی عملگری یا تحدب عملگری، اثبات می‌کنیم. برای اثبات این مطلب، هم‌چنین از نتیجه‌ای استفاده می‌کنیم که بر پایه نامساوی‌های نوع کانتورویچ<sup>۲</sup>، نوعی یکنوایی عملگری را برای توابع محدب معمولی نشان می‌دهد [۵]، [۷].

### نتایج اصلی

قضیه ۲، که مربوط به نامساوی‌های عملگری بر پایه نامساوی‌های نوع کانتورویچ برای توابع محدب است، در [۵] اثبات شده است.

قضیه ۲. فرض کنید  $A$  و  $B$  عملگرهای مثبت در  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$  باشند به طوری که  $0 < B \leq A$  و  $\sigma(B) \subseteq [m, M]$  که در آن  $0 < m < M$ . گیریم  $f$  یک تابع حقیقی-مقدار پیوسته و محدب روی  $[m, M]$  است و  $g$  یک تابع حقیقی-مقدار پیوسته روی بازه  $J$  باشد، که در آن  $J \cup \sigma(A) \subseteq [m, M]$ . هم‌چنین فرض کنید که یکی از این شرایط برقرار باشد:

(الف) تابع  $g$  روی بازه  $J$ ، محدب و صعودی است، یا

(ب) تابع  $g$  روی بازه  $J$ ، مقعر و نزولی است.

در این صورت، برای عدد حقیقی مثبت  $\alpha$  در حالت (الف) و یا عدد حقیقی منفی  $\alpha$  در حالت (ب)، نامساوی

$$\alpha g(A) + \beta 1_{\mathcal{H}} \geq f(B)$$

به دست می‌آید که در آن،

$$\beta = \max_{m \leq t \leq M} \left\{ \frac{f(M) - f(m)}{M - m} t + \frac{Mf(m) - mf(M)}{M - m} - \alpha g(t) \right\}.$$

برای اثبات نتیجه اصلی در این مقاله، قضیه زیر را به کار می‌گیریم که نتیجه‌ای از قضیه ۲، ۱ می‌باشد.

قضیه ۳. [۲]، نتیجه ۳.۳، فرض کنید  $A$  و  $B$  عملگرهای مثبت در  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$  باشند به طوری که  $\sigma(B) \subseteq [m, M]$  تابع  $f > 0$  را تابعی پیوسته و محدب روی بازه  $J$  شامل مجموعه  $J \cup \sigma(A)$  در نظر می‌گیریم. هم‌چنین فرض کنید که یکی از این شرایط به دست آید:

(الف)  $0 < B \leq A$  و  $f$  صعودی است، یا

(ب)  $0 < A \leq B$  و  $f$  نزولی است.

در این صورت داریم

$$f(B) \leq c(m, M, f) f(A),$$

که در آن،

$$c(m, M, f) := \max_{m \leq t \leq M} \left\{ \frac{\frac{f(M) - f(m)}{M - m} t + \frac{Mf(m) - mf(M)}{M - m}}{f(t)} \right\}.$$

در اثبات نتیجه اصلی این مقاله، هم‌چنین از یک قضیه مربوط به نامساوی عملگری یسنس برای توابع محدب معمولی استفاده می‌کنیم. این قضیه بدین صورت است:

1. Jensen's operator inequality  
2. Kantorovich

قضیه ۴. [۴] فرض کنید  $A_1, \dots, A_n$  عملگرهای خودالحاق در  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$  با کران‌های  $m_i$  و  $M_i$   $m_i \leq M_i$  باشند. گیریم  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$  نگاشت‌های خطی مثبت روی  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$  باشند به طوری که  $\sum_{i=1}^n \Phi_i(1_{\mathcal{H}}) = 1_{\mathcal{H}}$  هم‌چنین فرض می‌کنیم به ازای هر  $1 \leq i \leq n$

$$(m_C, M_C) \cap [m_i, M_i] = \emptyset, \quad (2)$$

که در آن،  $m_C$  و  $M_C$  کران‌های عملگر خودالحاق  $C = \sum_{i=1}^n \Phi_i(A_i)$  هستند. اگر  $f$  تابعی حقیقی-مقدار، محدب و پیوسته روی بازه  $J$  شامل  $m_i$  و  $M_i$ ‌ها باشد، آن‌گاه داریم:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \Phi_i(A_i)\right) \leq \sum_{i=1}^n \Phi_i(f(A_i)). \quad (3)$$

اکنون نتیجه اصلی این مقاله را ثابت می‌کنیم. در این قضیه، نامساوی عملگری زیرجمعی (۱)، بدون فرض یکنوایی و تحذب عملگری، ثابت می‌شود. در اثبات این قضیه، از قضیه‌های ۳ و ۴ استفاده می‌کنیم.

قضیه ۵. عملگرهای مثبت و وارون‌پذیر  $A$  با کران‌های  $m_1$  و  $M_1$  و  $B$  با کران‌های  $m_2$  و  $M_2$  را در  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$  در نظر می‌گیریم به قسمی که  $AB + BA \geq 0$  قرار می‌دهیم  $E = (A + B)^{-\frac{1}{2}}(A^2 + B^2)(A + B)^{-\frac{1}{2}}$  فرض می‌کنیم:

$$(m_E, M_E) \cap [m_i, M_i] = \emptyset \quad (i = 1, 2), \quad (4)$$

که در آن،  $m_E$  و  $M_E$  کران‌های عملگر  $E$  هستند. در این صورت، برای هر تابع پیوسته و مثبت  $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  که برای آن، تابع  $f(t) = \frac{g(t)}{t}$  تابعی محدب و نزولی باشد، داریم:

$$g(A + B) \leq c(m, M, f)(g(A) + g(B)), \quad (5)$$

که در آن،  $m$  و  $M$  کران‌های عملگر  $A + B$  هستند و

$$c(m, M, f) := \max_{m \leq t \leq M} \left\{ \frac{\frac{f(M) - f(m)}{M - m} t + \frac{Mf(m) - mf(M)}{M - m}}{f(t)} \right\}.$$

برهان. با توجه به این که  $AB + BA \geq 0$  داریم:

$$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA \geq A^2 + B^2 > 0.$$

از این رو داریم  $A + B \geq E > 0$ . تابع مثبت و پیوسته  $g$  را روی بازه  $(0, \infty)$  طوری در نظر می‌گیریم که تابع  $f(t) = \frac{g(t)}{t}$  تابعی محدب و نزولی باشد. طبق قضیه ۳ داریم:

$$f(A + B) \leq c(m, M, f)f(E).$$

در نتیجه داریم

$$(A + B)^{-1}g(A + B) \leq c(m, M, f)E^{-1}g(E). \quad (6)$$

اکنون نگاشت‌های  $\Phi_1$  و  $\Phi_2$  را روی  $\mathbb{B}(\mathcal{H})$  با ضابطه‌های

$$\Phi_1(X) = (A + B)^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}XA^{\frac{1}{2}}(A + B)^{-\frac{1}{2}},$$

و

$$\Phi_2(X) = (A + B)^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}XB^{\frac{1}{2}}(A + B)^{-\frac{1}{2}}$$

تعریف می‌کنیم. واضح است که  $\Phi_1$  و  $\Phi_2$  عملگرهای خطی مثبت است و داریم  $\Phi_1(1_{\mathcal{H}}) + \Phi_2(1_{\mathcal{H}}) = 1_{\mathcal{H}}$

هم‌چنین داریم  $\Phi_1(A) + \Phi_2(B) = E$ . اکنون با استفاده از قضیه ۴، نامساوی

$$f(E) \leq (A + B)^{-\frac{1}{2}} \left( A^{\frac{1}{2}}f(A)A^{\frac{1}{2}} + B^{\frac{1}{2}}f(B)B^{\frac{1}{2}} \right) (A + B)^{-\frac{1}{2}}$$

را داریم. از این جا نامساوی

$$E^{-1}g(E) \leq (A+B)^{-\frac{1}{2}}(g(A)+g(B))(A+B)^{-\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

به دست می آید. بنابراین، با استفاده از نامساوی های (۶) و (۷) داریم:

$$(A+B)^{-1}g(A+B) \leq c(m, M, f)(A+B)^{-\frac{1}{2}}(g(A)+g(B))(A+B)^{-\frac{1}{2}}.$$

از این جا، نامساوی (۵) به دست می آید.

چنان که در بخش مقدمه اشاره شد، نتایجی که در [۶] و [۸]، نامساوی عملگری (۱) را به دست می دهند، با فرض یکنوایی عملگری یا تحدب عملگری توابع روی بازه  $[0, \infty)$  حاصل شده اند. در مثال زیر، روی تابعی بحث می کنیم که یکنوایی عملگری و محدب عملگری نیست اما در شرایط نتیجه اصلی این مقاله صدق می کند. از این رو، مثال ۶، کاربرد قضیه ۵ را در به دست آوردن نامساوی عملگری زیرجمعی برای دسته ای از توابع که لزوماً محدب و یکنوایی عملگری نیستند، نشان می دهد.

**مثال ۶.** ماتریس همانی  $A = I$  و ماتریس  $B = 2I$  را در فضای ماتریس های مختلط  $2 \times 2$ ،  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  و تابع  $g(t) = \frac{1}{t^2}$  را روی بازه  $(0, \infty)$  در نظر می گیریم. واضح است که تابع  $g$  در نقطه صفر تعریف نشده است از این رو، قضیه ۱ را نمی توان برای به دست آوردن نامساوی عملگری (۱) در مورد این تابع به کار برد. همچنین خاطر نشان می کنیم که تابع  $g$ ، یکنوایی عملگری نیست. این تابع، محدب عملگری نیز نیست. به طور مثال، اگر ماتریس های مثبت

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 10 \end{pmatrix}$$

را در نظر بگیریم، آن گاه داریم:

$$\frac{g(M) + g(N)}{2} - g\left(\frac{M+N}{2}\right) = \frac{M^{-2} + N^{-2}}{2} - \left(\frac{M+N}{2}\right)^{-2} \not\geq 0.$$

با وجود همه این موارد، شرایط قضیه ۵ برقرار است، زیرا مشاهده می کنیم که تابع  $f(t) = \frac{1}{t^3}$ ، تابعی محدب و نزولی روی  $(0, \infty)$  است. همچنین، به راحتی دیده می شود که عملگر  $E$  در قضیه ۵ برابر است با ماتریس

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

از این رو،  $m_E = M_E = \frac{5}{3}$ . پس شرایط (۴) برقرار است. بنابراین، برای این مثال، می توان از قضیه ۵ استفاده کرد.

**نکته ۷.** [۱]، نتیجه ۳.۳، نتیجه ای کلی تر از قضیه ۴ اثبات شده است. در واقع، در آن مقاله، با فرض

$$\sigma(A_j) \subseteq J \setminus (m_A, M_A), \quad (8)$$

که ضعیف تر از شرط (۲) است، نامساوی (۳) نتیجه می شود. این جا،  $m_A$  و  $M_A$ ، کران های عملگر خودالحاق روی  $\mathcal{H}$  هستند. در ادامه، با جایگزینی شرط (۸) با (۴) در قضیه ۵، نتیجه قوی تر ۸ را به دست می آوریم.

**قضیه ۸.** عملگرهای مثبت و وارون پذیر  $A$  و  $B$  را طوری در نظر می گیریم که  $0 \leq AB + BA$  و عملگر  $E$  را همان عملگر تعریف شده در قضیه ۵ فرض می کنیم. اگر  $\sigma(A)$  و  $\sigma(B)$  زیرمجموعه های  $(0, \infty) \setminus (m_E, M_E)$  باشند،

آن‌گاه برای توابع  $g$  و  $f$  با شرایط گفته شده در قضیه ۵، نامساوی (۵) برقرار است. برهان. اثبات مشابه برهان قضیه ۵ است.

در مثال زیر، قوی‌تر بودن قضیه ۸ را نسبت به قضیه ۵ نشان می‌دهیم.

مثال ۹. توابع  $g$  و  $f$  را همان توابع مثال ۶ در نظر می‌گیریم. ماتریس‌های

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

دو ماتریس مثبت بوده و داریم  $0 \leq AB + BA$ . هم‌چنین محاسبه نشان می‌دهد که  $\sigma(A) = \{0.19, 1.13\}$ ,  $\sigma(B) = \{2.58, 5.41\}$

و نیز

$$[m_E, M_E] \subseteq [3.3, 4.82].$$

بنابراین، شرایط قضیه ۸ برقرار است و در نتیجه داریم:

$$(A + B)^{-2} \leq c(m, M, f)(A^{-2} + B^{-2}), \quad (9)$$

که در آن،

$$c(m, M, f) = 2.94.$$

این در حالی است که شرط (۴) برای این ماتریس‌ها صدق نمی‌کند از این‌رو، نمی‌توان (۹) را با استفاده از قضیه ۵ به‌دست آورد.

### منابع

1. Anjidani E., "On operator inequalities of Jensen type for convex functions", *Linear and Multilinear Algebra*, 65 (2017) 1493-1502.
2. Anjidani E., Changalvaiy M. R., "Reverse Jensen–Mercer type operator inequalities", *Electron J Linear Algebra*, 31 (2016) 87-99.
3. Bourin J. C., Uchiyama M., "A matrix subadditivity inequality for  $f(A + B)$  and  $f(A) + f(B)$ ", *Linear Algebra Appl.*, 423 (2007) 512-518.
4. Mičić J., Pavić Z., Pečarić J., "Jensen's inequality for operators without operator convexity", *Linear Algebra Appl.*, 434 (2011) 1228-1237.
5. Mičić J., Pečarić J., Seo Y., "Function order of positive operators based on the Mond–Pečarić method", *Linear Algebra Appl.*, 360 (2003) 15-34.
6. Moslehian M. S., Najafi H., "Around operator monotone functions", *Integral Equations Operator Theory*, 71 (2011) 575-582.
7. Pečarić J., Mičić J., "Some functions reversing the order of positive operators", *Linear Algebra Appl.*, 396 (2005) 175-187.
8. Uchiyama M., Uchiyama A., Giga M., "Superadditivity and derivative of operator functions", *Linear Algebra Appl.*, 465 (2015) 401-411.