

بررسی زیرجمعی بودن توابع روی عملگرهای مثبت بدون فرض یکنوایی و تحدب عملگری

احسان انجیدنی

دانشگاه نیشابور، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

پذیرش ۹۸/۰۴/۲۶

دریافت ۹۸/۰۱/۰۲

چکیده

در این مقاله، زیرجمعی بودن توابع روی عملگرهای مثبت را بدون فرض یکنوایی عملگری و تحدب عملگری بررسی می‌کنیم. گیریم A و B عملگرهای مثبت روی یک فضای هیلبرت \mathcal{H} باشند و $0 \leq AB + BA$. فرض کنید برای عملگر

$$E = (A + B)^{-\frac{1}{2}}(A^2 + B^2)(A + B)^{-\frac{1}{2}},$$

بازه باز (m_E, M_E) ، که در آن، m_E و M_E کران‌های عملگر E هستند، با طیف‌های مربوط به عملگرهای A و B اشتراک نداشته باشد. در این صورت، برای هر تابع پیوسته $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ که برای آن، تابع $f(t) = \frac{g(t)}{t}$ محدب و نزولی باشد، داریم:

$$g(A + B) \leq c(m, M, f)(g(A) + g(B)),$$

که در آن، m و M کران‌های عملگر $A + B$ هستند و

$$c(m, M, f) := \max_{m \leq t \leq M} \left\{ \frac{\frac{f(M) - f(m)}{M - m} t + \frac{Mf(m) - mf(M)}{M - m}}{f(t)} \right\}.$$

واژه‌های کلیدی: ترتیب ماتریسی، نامساوی عملگری زیرجمعی، تابع یکنوا، تابع محدب، نامساوی عملگری یسنس.

مقدمه

در سراسر این مقاله، $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ را C^* -جبر همه عملگرهای خطی کراندار روی یک فضای هیلبرت \mathcal{H} و $1_{\mathcal{H}}$ را عملگر همانی روی \mathcal{H} در نظر می‌گیریم. کران‌های یک عملگر خودالحاق $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ را به صورت

$$m_A = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle, \quad M_A = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle,$$

تعریف می‌کنیم. یک عملگر $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ را مثبت^۲ گوئیم اگر به‌ازای هر $x \in \mathcal{H}$ داشته باشیم $\langle Ax, x \rangle \geq 0$. وقتی که A یک عملگر مثبت است، می‌نویسیم $A \geq 0$. برای عملگرهای خودالحاق A و B در $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ ، می‌نویسیم $A \leq B$ اگر $0 \leq B - A$. یک نگاشت Φ روی $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ را مثبت گوئیم اگر به‌ازای هر $0 \leq A$ داشته باشیم $\Phi(A) \geq 0$.

فرض کنیم J یک بازه حقیقی و f تابعی پیوسته و حقیقی روی آن باشد. برای یک عملگر خودالحاق A که طیف^۳ آن، زیرمجموعه‌ای از J است (طیف A را با $\sigma(A)$ نشان می‌دهیم)، $f(A)$ نشان‌دهنده حساب تابعی^۴ است. یادآوری

*نویسنده مسئول ehsan.mathematics@gmail.com

1. Self-adjoint operator
2. Positive
3. Spectrum
4. Functional calculus

می‌کنیم که طبق قضیه‌ای در نظریه عملگرها، اگر A یک عملگر خودالحاق در فضای $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ بوده است و Z تابع شمول از $\sigma(A)$ به میدان اعداد مختلط \mathbb{C} باشد، آن‌گاه هم‌ریختی یکتای $\varphi: \mathcal{C}(\sigma(A)) \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H})$ موجود است به طوری که $\varphi(1) = 1_{\mathcal{H}}$ و $\varphi(z) = A$ تابع φ حساب تابعی در A گفته شده و به‌ازای هر $f \in \mathcal{C}(\sigma(A))$ عملگر $\varphi(f)$ با $f(A)$ نمایش داده می‌شود. در این‌جا منظور از $\mathcal{C}(\sigma(A))$ ، مجموعه تمام توابع پیوسته و مختلط روی $\sigma(A)$ است.

تابع f ، یکنوای عملگری^۱ نامیده می‌شود اگر برای عملگرهای خودالحاق A و B با $A \leq B$ ، داشته باشیم $f(A) \leq f(B)$. همچنین، تابع f را تابع محدب عملگری^۲ گوئیم اگر برای هر $0 < t < 1$ و برای هر دو عملگر خودالحاق A و B که طیف آنها در J است، داشته باشیم

$$f(tA + (1-t)B) \leq tf(A) + (1-t)f(B).$$

در مرجع [۶]، نشان داده شده است که برای عملگرهای مثبت A و B ، اگر $0 \leq AB + BA$ ، آن‌گاه برای هر تابع نامنفی و یکنوای عملگری f روی $[0, \infty)$ داریم:

$$f(A + B) \leq f(A) + f(B). \quad (۱)$$

در [۸]، همین نتیجه برای تعدادی متناهی از عملگرهای مثبت، با روشی متفاوت اثبات شده است. در ادامه، نتیجه مذکور را می‌آوریم.

قضیه ۱. [۸] قضیه ۲. ۱، فرض کنید عملگرهای A_i ($1 \leq i \leq n$) عملگرهای مثبت در $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ باشند. در این‌صورت، گزاره‌های زیر با هم معادلند:

$$\text{الف) } \sum_{i \neq j} A_i A_j \geq 0$$

ب) برای هر تابع محدب عملگری g روی $[0, \infty)$ با شرط $g(0) \leq 0$ داریم

$$g(A_1 + \dots + A_n) \geq g(A_1) + \dots + g(A_n);$$

پ) برای هر تابع یکنوای عملگری و نامنفی f روی $[0, \infty)$ داریم

$$f(A_1 + \dots + A_n) \leq f(A_1) + \dots + f(A_n).$$

اکنون سوال این است که اگر شرط‌های ضعیف‌تر یکنوایی و تحدب معمولی را جایگزین یکنوایی عملگری و تحدب عملگری کنیم، تحت چه شرایطی نامساوی عملگری زیرجمعی (۱)، برقرار است؟ می‌دانیم که اگر h تابعی مقعر و نامنفی روی بازه $[0, \infty)$ باشد، آن‌گاه به‌ازای هر $a \geq 0$ ، تابع $x \mapsto \frac{h(x)-h(a)}{x-a}$ نزولی است. از این‌رو، تابع $\frac{h(x)}{x}$ نزولی است. از این‌جا به‌ازای هر $0 < a, b$ داریم:

$$\frac{h(a)}{a} \geq \frac{h(a+b)}{a+b}, \quad \frac{h(b)}{b} \geq \frac{h(a+b)}{a+b}.$$

بنابراین تابع h ، زیرجمعی^۳ است [۸]، به‌عبارت دیگر

$$h(a+b) \leq h(a) + h(b).$$

در مرجع [۳]، یک نسخه عملگری از این نامساوی ثابت می‌شود: برای ماتریس‌های مثبت A و B و برای هر نرم پایای یکانی^۴ $\|\cdot\|$ داریم:

$$\|h(A+B)\| \leq \|h(A) + h(B)\|.$$

یادآوری می‌کنیم که نرم $\|\cdot\|$ روی \mathcal{M}_n ، فضای ماتریس‌های $n \times n$ ، پایای یکانی گفته می‌شود اگر برای هر

1. Operator monotone
2. Operator convex
3. Subadditive
4. Unitaly invariant

$A \in \mathcal{M}_n$ و هر دو ماتریس یکانی $U, V \in \mathcal{M}_n$ داشته باشیم $\|UAV\| = \|A\|$.

در این مقاله، با استفاده از یک نتیجه کلی که برقراری نامساوی عملگری یسنس^۱ را برای توابع محدب نشان می‌دهد [۱]، [۴]. یک نسخه از نامساوی عملگری (۱) را بدون فرض یکنوایی عملگری یا تحدب عملگری، اثبات می‌کنیم. برای اثبات این مطلب، هم‌چنین از نتیجه‌ای استفاده می‌کنیم که بر پایه نامساوی‌های نوع کانتورویچ^۲، نوعی یکنوایی عملگری را برای توابع محدب معمولی نشان می‌دهد [۵]، [۷].

نتایج اصلی

قضیه ۲، که مربوط به نامساوی‌های عملگری بر پایه نامساوی‌های نوع کانتورویچ برای توابع محدب است، در [۵] اثبات شده است.

قضیه ۲. فرض کنید A و B عملگرهای مثبت در $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ باشند به طوری که $0 < B \leq A$ و $\sigma(B) \subseteq [m, M]$ که در آن $0 < m < M$. گیریم f یک تابع حقیقی-مقدار پیوسته و محدب روی $[m, M]$ است و g یک تابع حقیقی-مقدار پیوسته روی بازه J باشد، که در آن $[m, M] \cup \sigma(A) \subseteq J$. هم‌چنین فرض کنید که یکی از این شرایط برقرار باشد:

(الف) تابع g روی بازه J محدب و صعودی است، یا

(ب) تابع g روی بازه J مقعر و نزولی است.

در این صورت، برای عدد حقیقی مثبت α در حالت (الف) و یا عدد حقیقی منفی α در حالت (ب)، نامساوی

$$\alpha g(A) + \beta 1_{\mathcal{H}} \geq f(B)$$

به دست می‌آید که در آن،

$$\beta = \max_{m \leq t \leq M} \left\{ \frac{f(M) - f(m)}{M - m} t + \frac{Mf(m) - mf(M)}{M - m} - \alpha g(t) \right\}.$$

برای اثبات نتیجه اصلی در این مقاله، قضیه زیر را به کار می‌گیریم که نتیجه‌ای از قضیه ۲، ۱ می‌باشد.

قضیه ۳. [۲]، نتیجه ۳.۳، فرض کنید A و B عملگرهای مثبت در $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ باشند به طوری که $\sigma(B) \subseteq [m, M]$ تابع $f > 0$ را تابعی پیوسته و محدب روی بازه J شامل مجموعه $[m, M] \cup \sigma(A)$ در نظر می‌گیریم. هم‌چنین فرض کنید که یکی از این شرایط به دست آید:

(الف) $0 < B \leq A$ و f صعودی است، یا

(ب) $0 < A \leq B$ و f نزولی است.

در این صورت داریم

$$f(B) \leq c(m, M, f) f(A),$$

که در آن،

$$c(m, M, f) := \max_{m \leq t \leq M} \left\{ \frac{\frac{f(M) - f(m)}{M - m} t + \frac{Mf(m) - mf(M)}{M - m}}{f(t)} \right\}.$$

در اثبات نتیجه اصلی این مقاله، هم‌چنین از یک قضیه مربوط به نامساوی عملگری یسنس برای توابع محدب معمولی استفاده می‌کنیم. این قضیه بدین صورت است:

1. Jensen's operator inequality
2. Kantorovich

قضیه ۴. [۴] فرض کنید A_1, \dots, A_n عملگرهای خودالحاق در $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ با کران‌های m_i و M_i $m_i \leq M_i$ باشند. گیریم Φ_1, \dots, Φ_n نگاشت‌های خطی مثبت روی $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ باشند به طوری که $\sum_{i=1}^n \Phi_i(1_{\mathcal{H}}) = 1_{\mathcal{H}}$. همچنین فرض می‌کنیم به ازای هر $1 \leq i \leq n$

$$(m_C, M_C) \cap [m_i, M_i] = \emptyset, \quad (2)$$

که در آن، m_C و M_C کران‌های عملگر خودالحاق $C = \sum_{i=1}^n \Phi_i(A_i)$ هستند. اگر f تابعی حقیقی-مقدار، محدب و پیوسته روی بازه J شامل m_i و M_i ها باشد، آن‌گاه داریم:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \Phi_i(A_i)\right) \leq \sum_{i=1}^n \Phi_i(f(A_i)). \quad (3)$$

اکنون نتیجه اصلی این مقاله را ثابت می‌کنیم. در این قضیه، نامساوی عملگری زیرجمعی (۱)، بدون فرض یکنوایی و تحذب عملگری، ثابت می‌شود. در اثبات این قضیه، از قضیه‌های ۳ و ۴ استفاده می‌کنیم.

قضیه ۵. عملگرهای مثبت و وارون‌پذیر A با کران‌های m_1 و M_1 و B با کران‌های m_2 و M_2 را در $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ در نظر می‌گیریم به قسمی که $AB + BA \geq 0$ قرار می‌دهیم $E = (A + B)^{-\frac{1}{2}}(A^2 + B^2)(A + B)^{-\frac{1}{2}}$ فرض می‌کنیم:

$$(m_E, M_E) \cap [m_i, M_i] = \emptyset \quad (i = 1, 2), \quad (4)$$

که در آن، m_E و M_E کران‌های عملگر E هستند. در این صورت، برای هر تابع پیوسته و مثبت $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ که برای آن، تابع $f(t) = \frac{g(t)}{t}$ تابعی محدب و نزولی باشد، داریم:

$$g(A + B) \leq c(m, M, f)(g(A) + g(B)), \quad (5)$$

که در آن، m و M کران‌های عملگر $A + B$ هستند و

$$c(m, M, f) := \max_{m \leq t \leq M} \left\{ \frac{\frac{f(M) - f(m)}{M - m} t + \frac{Mf(m) - mf(M)}{M - m}}{f(t)} \right\}.$$

برهان. با توجه به این که $AB + BA \geq 0$ داریم:

$$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA \geq A^2 + B^2 > 0.$$

از این رو داریم $A + B \geq E > 0$. تابع مثبت و پیوسته g را روی بازه $(0, \infty)$ طوری در نظر می‌گیریم که تابع $f(t) = \frac{g(t)}{t}$ تابعی محدب و نزولی باشد. طبق قضیه ۳ داریم:

$$f(A + B) \leq c(m, M, f)f(E).$$

در نتیجه داریم

$$(A + B)^{-1}g(A + B) \leq c(m, M, f)E^{-1}g(E). \quad (6)$$

اکنون نگاشت‌های Φ_1 و Φ_2 را روی $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ با ضابطه‌های

$$\Phi_1(X) = (A + B)^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}XA^{\frac{1}{2}}(A + B)^{-\frac{1}{2}},$$

و

$$\Phi_2(X) = (A + B)^{-\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}XB^{\frac{1}{2}}(A + B)^{-\frac{1}{2}}$$

تعریف می‌کنیم. واضح است که Φ_1 و Φ_2 عملگرهای خطی مثبت است و داریم $\Phi_1(1_{\mathcal{H}}) + \Phi_2(1_{\mathcal{H}}) = 1_{\mathcal{H}}$. همچنین داریم $\Phi_1(A) + \Phi_2(B) = E$. اکنون با استفاده از قضیه ۴، نامساوی

$$f(E) \leq (A + B)^{-\frac{1}{2}} \left(A^{\frac{1}{2}}f(A)A^{\frac{1}{2}} + B^{\frac{1}{2}}f(B)B^{\frac{1}{2}} \right) (A + B)^{-\frac{1}{2}}$$

را داریم. از این جا نامساوی

$$E^{-1}g(E) \leq (A+B)^{-\frac{1}{2}}(g(A)+g(B))(A+B)^{\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

به دست می آید. بنابراین، با استفاده از نامساوی های (۶) و (۷) داریم:

$$(A+B)^{-1}g(A+B) \leq c(m, M, f)(A+B)^{-\frac{1}{2}}(g(A)+g(B))(A+B)^{\frac{1}{2}}.$$

از این جا، نامساوی (۵) به دست می آید.

چنان که در بخش مقدمه اشاره شد، نتایجی که در [۶] و [۸]، نامساوی عملگری (۱) را به دست می دهند، با فرض یکنوایی عملگری یا تحدب عملگری توابع روی بازه $[0, \infty)$ حاصل شده اند. در مثال زیر، روی تابعی بحث می کنیم که یکنوایی عملگری و محدب عملگری نیست اما در شرایط نتیجه اصلی این مقاله صدق می کند. از این رو، مثال ۶، کاربرد قضیه ۵ را در به دست آوردن نامساوی عملگری زیرجمعی برای دسته ای از توابع که لزوماً محدب و یکنوایی عملگری نیستند، نشان می دهد.

مثال ۶. ماتریس همانی $A = I$ و ماتریس $B = 2I$ را در فضای ماتریس های مختلط 2×2 ، $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ و تابع $g(t) = \frac{1}{t^2}$ را روی بازه $(0, \infty)$ در نظر می گیریم. واضح است که تابع g در نقطه صفر تعریف نشده است از این رو، قضیه ۱ را نمی توان برای به دست آوردن نامساوی عملگری (۱) در مورد این تابع به کار برد. هم چنین خاطر نشان می کنیم که تابع g ، یکنوایی عملگری نیست. این تابع، محدب عملگری نیز نیست. به طور مثال، اگر ماتریس های مثبت

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 10 \end{pmatrix}$$

را در نظر بگیریم، آن گاه داریم:

$$\frac{g(M) + g(N)}{2} - g\left(\frac{M+N}{2}\right) = \frac{M^{-2} + N^{-2}}{2} - \left(\frac{M+N}{2}\right)^{-2} \not\geq 0.$$

با وجود همه این موارد، شرایط قضیه ۵ برقرار است، زیرا مشاهده می کنیم که تابع $f(t) = \frac{1}{t^3}$ ، تابعی محدب و نزولی روی $(0, \infty)$ است. هم چنین، به راحتی دیده می شود که عملگر E در قضیه ۵ برابر است با ماتریس

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

از این رو، $m_E = M_E = \frac{5}{3}$. پس شرایط (۴) برقرار است. بنابراین، برای این مثال، می توان از قضیه ۵ استفاده کرد.

نکته ۷. [۱]، نتیجه ۳.۳، نتیجه ای کلی تر از قضیه ۴ اثبات شده است. در واقع، در آن مقاله، با فرض

$$\sigma(A_j) \subseteq J \setminus (m_A, M_A), \quad (8)$$

که ضعیف تر از شرط (۲) است، نامساوی (۳) نتیجه می شود. این جا، m_A و M_A ، کران های عملگر خودالحاق روی \mathcal{H} هستند. در ادامه، با جایگزینی شرط (۸) با (۴) در قضیه ۵، نتیجه قوی تر ۸ را به دست می آوریم.

قضیه ۸. عملگرهای مثبت و وارون پذیر A و B را طوری در نظر می گیریم که $0 \leq AB + BA$ و عملگر E را همان عملگر تعریف شده در قضیه ۵ فرض می کنیم. اگر $\sigma(A)$ و $\sigma(B)$ زیرمجموعه های $(0, \infty) \setminus (m_E, M_E)$ باشند،

آن‌گاه برای توابع g و f با شرایط گفته شده در قضیه ۵، نامساوی (۵) برقرار است. برهان. اثبات مشابه برهان قضیه ۵ است.

در مثال زیر، قوی‌تر بودن قضیه ۸ را نسبت به قضیه ۵ نشان می‌دهیم.

مثال ۹. توابع g و f را همان توابع مثال ۶ در نظر می‌گیریم. ماتریس‌های

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

دو ماتریس مثبت بوده و داریم $0 \leq AB + BA$. هم‌چنین محاسبه نشان می‌دهد که $\sigma(A) = \{0.19, 1.13\}$, $\sigma(B) = \{2.58, 5.41\}$

و نیز

$$[m_E, M_E] \subseteq [3.3, 4.82].$$

بنابراین، شرایط قضیه ۸ برقرار است و در نتیجه داریم:

$$(A + B)^{-2} \leq c(m, M, f)(A^{-2} + B^{-2}), \quad (9)$$

که در آن،

$$c(m, M, f) = 2.94.$$

این در حالی است که شرط (۴) برای این ماتریس‌ها صدق نمی‌کند از این‌رو، نمی‌توان (۹) را با استفاده از قضیه ۵ به‌دست آورد.

منابع

1. Anjidani E., "On operator inequalities of Jensen type for convex functions", *Linear and Multilinear Algebra*, 65 (2017) 1493-1502.
2. Anjidani E., Changalvaiy M. R., "Reverse Jensen–Mercer type operator inequalities", *Electron J Linear Algebra*, 31 (2016) 87-99.
3. Bourin J. C., Uchiyama M., "A matrix subadditivity inequality for $f(A + B)$ and $f(A) + f(B)$ ", *Linear Algebra Appl.*, 423 (2007) 512-518.
4. Mičić J., Pavić Z., Pečarić J., "Jensen's inequality for operators without operator convexity", *Linear Algebra Appl.*, 434 (2011) 1228-1237.
5. Mičić J., Pečarić J., Seo Y., "Function order of positive operators based on the Mond–Pečarić method", *Linear Algebra Appl.*, 360 (2003) 15-34.
6. Moslehian M. S., Najafi H., "Around operator monotone functions", *Integral Equations Operator Theory*, 71 (2011) 575-582.
7. Pečarić J., Mičić J., "Some functions reversing the order of positive operators", *Linear Algebra Appl.*, 396 (2005) 175-187.
8. Uchiyama M., Uchiyama A., Giga M., "Superadditivity and derivative of operator functions", *Linear Algebra Appl.*, 465 (2015) 401-411.