

# انشعاب و آشوب در یک مدل گسسته همزیستی با نرخ برداشت

## متناسب

محمد حسین اکرمی\*

دانشگاه یزد، دانشکده علوم ریاضی

پذیرش ۹۸/۱۱/۰۲

دریافت ۹۸/۰۱/۱۹

## چکیده

در این مقاله یک مدل پیوسته همزیستی بین دو گونه با نرخ برداشت متناسب را با استفاده از روش اویلر به یک مدل گسسته تبدیل کرده و دینامیک آن را مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم. با استفاده از نظریه منیفلد مرکزی نشان می‌دهیم که مدل تحت انشعاب دوبرابری دوره تناوب قرار می‌گیرد. همچنین با استفاده از نمای لیاپانف ماکزیمال نشان می‌دهیم که مدل، آشوبناک است و سپس با استفاده از روش کنترل بازخورد به کنترل آشوب در این مدل می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: مدل همزیستی، انشعاب دوبرابری دوره تناوب، آشوب، کنترل آشوب.

## ۱- مقدمه

همزیستی یک تعامل است که در آن گونه‌ها به یکدیگر کمک می‌کنند و از کنار هم بودن سود می‌برند [۲]. به عنوان مثال تعامل بین گوسفندان و باکتری درون روده آن‌ها یک رابطه همزیستی است. زیرا حیوان از سلولز تولید شده توسط باکتری که باعث تسهیل در هضم می‌شود، سود می‌برد و از طرفی باکتری‌ها از داشتن یک منبع پایدار مواد مغذی در محیط میزبان سود می‌برند [۳]. روابط همزیستی بین گونه‌ها بسیار پیچیده است ولی معمولاً می‌توان روابط همزیستی را به چهار دسته زیر تقسیم کرد: همزیستی بذرافشانی، همزیستی گرده افشانی، همزیستی گوارشی و همزیستی حمایت متقابل. برای جزئیات و مثال‌های بیشتر از این دسته‌ها به [۴] مراجعه کنید. در جمعیت‌شناسی نظری توجه کمتری به روابط همزیستی نسبت به تعاملات شکار-شکارچی یا رقابت‌های بین گونه‌ای شده است. بنابراین مدل‌های ریاضی ارائه شده برای تعاملات همزیستی در مقابل مدل‌های ارائه شده برای تعاملات شکار-شکارچی بسیار کمتر است [۴، ۵]. بیشتر مدل‌های همزیستی ارائه شده در مقالات، تعامل بین گونه‌ها را به صورت دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل (عادی) مدل‌بندی می‌کنند. به عنوان نمونه، لئون در [۶] به بررسی پایداری سراسری یک مدل دوگونه‌ای از همزیستی می‌پردازد. در [۴] نویسندگان با استفاده از تابع لیاپانف و اصل پایایی لاسال به بررسی پایداری در یک مدل همزیستی می‌پردازند. برخی از نویسندگان نیز به بررسی تأثیر برداشت در مدل می‌پردازند. در حقیقت حذف تعدادی از گونه‌های جمعیت از زیستگاه آن‌ها به عنوان برداشت شناخته می‌شود. معمولاً برداشت از یک جمعیت برای کنترل

\* نویسنده مسئول akrami@yazd.ac.ir

جمعیت افزایش یافته، رفع نیازهای عمومی برای کنترل آسیب به حیوانات، برداشت تفریحی یا تجاری مورد استفاده قرار می‌گیرد [۷]. همان‌طور که گفتیم اکثر مدل‌های ریاضی ارائه شده برای تعاملات همزیستی مدل‌های پیوسته هستند. اما مدل‌های گسسته برای توصیف فرآیندهای با زمان‌های مشخص، واقع‌گرایانه‌تر هستند. زیرا می‌توانند برای واحدهای گام زمانی دلخواه ویژگی‌های اساسی مدل پیوسته متناظر (مانند تعداد نقاط ثابت و نوع آن‌ها) را حفظ کرده و دینامیک غنی‌تری نسبت به مدل پیوسته از خود بروز دهند. همچنین در شبیه‌سازی کامپیوتری، زمان اجرا را به‌طور چشمگیری کاهش می‌دهند. علاوه بر این می‌توان از ابزارهای دستگاه دینامیکی گسسته و معادلات تفاضلی برای تحلیل مدل استفاده نمود [۸]. با توجه به مباحث فوق، در این مقاله یک مدل پیوسته همزیستی بین دو گونه که در [۹] معرفی شده است را با استفاده از روش اویلر به یک مدل گسسته تبدیل کرده و دینامیک آن را به عنوان یک دستگاه دینامیکی گسسته مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم.

این مقاله دارای ۸ بخش است. در بخش ۲ به معرفی مدل و پارامترهای آن می‌پردازیم. در بخش ۳ نقاط ثابت مدل را به دست آورده و پایداری موضعی آن‌ها را تعیین می‌کنیم. در بخش ۴ نشان می‌دهیم که مدل تحت انشعاب دوبرابرسازی دوره تناوب قرار می‌گیرد. در بخش ۵ شبیه‌سازی عددی مدل را برای مقادیری از پارامترها انجام داده و دیاگرام انشعاب موجود در مدل را ترسیم می‌کنیم. در بخش ۶ با استفاده از نمای لیاپانف ماکزیمال نشان می‌دهیم که در مدل آشوب وجود دارد. در بخش ۷ به کنترل آشوب در مدل پرداخته و با استفاده از کنترل بازخورد نشان می‌دهیم که آشوب قابل کنترل است. در بخش پایانی در مورد نتایج به دست آمده در این مقاله بحث می‌کنیم.

## ۲- معرفی مدل

مدل همزیستی با نرخ برداشت متناسب

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(r_1 - ax + \alpha y - h_x), \\ \dot{y} &= y(r_2 - by + \beta x - h_y), \end{aligned} \quad (1)$$

را در نظر بگیرید که در آن  $x$  و  $y$  به ترتیب اندازه جمعیت گونه اول و دوم،  $a = \frac{r_1}{K_x}$  و  $b = \frac{r_2}{K_y}$  و  $r_1$  و  $r_2$  به ترتیب نرخ رشد ذاتی جمعیت گونه اول و دوم،  $K_x$  و  $K_y$  ظرفیت آستانه،  $\alpha$  و  $\beta$  به ترتیب اثر همزیستی  $x$  بر  $y$  و  $y$  بر  $x$  و همچنین  $h_x$  و  $h_y$  نسبت‌های برداشت متناسب با جمعیت مربوطه هستند. علاوه بر این تمامی پارامترهای مدل، ثابت مثبت هستند. حال با در نظر گرفتن  $r = r_1 - h_x$  و  $s = r_2 - h_y$  می‌توان مدل را به صورت

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(r - ax + \alpha y), \\ \dot{y} &= y(s - by + \beta x), \end{aligned} \quad (2)$$

نوشت. حال با استفاده از روش اویلر پیشرو دستگاه (۲) را به صورت دستگاه گسسته

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n[1 + h(r - ax_n + \alpha y_n)], \\ y_{n+1} &= y_n[1 + h(s - by_n + \beta x_n)], \end{aligned} \quad (3)$$

به دست می‌آوریم که در آن  $h > 0$  طول گام است.

### ۳- نقاط ثابت و پایداری موضعی آنها

دستگاه (۳) چهار نقطه ثابت به صورت  $p_0 = (0,0)$ ،  $p_1 = (0, \frac{s}{b})$ ،  $p_2 = (\frac{r}{a}, 0)$  و  $p_3 = (\frac{as+br}{ab-\alpha\beta}, \frac{as+\beta r}{ab-\alpha\beta})$  است. نقاط  $p_0$ ،  $p_1$  و  $p_2$  نقاط مرزی (کرانه‌ای) هستند و نقطه  $p_3$  با شرط  $ab - \alpha\beta > 0$  یک نقطه ثابت درونی یا مثبت است. برای تعیین پایداری موضعی نقاط ثابت، ابتدا ماتریس ژاکوبی را محاسبه می‌کنیم. ماتریس ژاکوبی دستگاه (۳) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + h(r - 2ax + \alpha y) & \alpha hx \\ \beta hy & 1 + h(s - 2by + \beta x) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

ماتریس ژاکوبی در نقطه ثابت  $p_0$  دارای مقادیر ویژه  $\lambda_1 = 1 + hr$  و  $\lambda_2 = 1 + hs$  است که با توجه به مثبت بودن پارامترها، این مقادیر ویژه خارج از دایره واحد بوده و بنابراین مبدأ یا همان نقطه ثابت  $p_0$  ناپایدار است. نوع پایداری نقطه ثابت  $p_1$  را در گزاره زیر بررسی می‌کنیم.  
گزاره ۱. اگر  $0 < hs < 2$  در این صورت نقطه ثابت  $p_1 = (0, \frac{s}{b})$  یک نقطه زین، اگر  $hs > 2$  یک نقطه ناپایدار و اگر  $hs = 2$  یک زین غیرهذلولوی است.  
اثبات. ماتریس ژاکوبی دستگاه (۳) در نقطه ثابت  $p_1$  به صورت

$$J(0, \frac{s}{b}) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{hs\alpha + bhr}{b} & 0 \\ \frac{\beta hs}{b} & 1 - hs \end{pmatrix}, \quad (5)$$

به دست می‌آید. مقادیر ویژه ماتریس فوق به صورت  $\lambda_1 = 1 + \frac{hs\alpha + bhr}{b}$  و  $\lambda_2 = 1 - hs$  هستند. واضح است که  $\lambda_1 > 1$ . حال اگر  $0 < hs < 2$  در این صورت  $\lambda_2 < 1$  و بنابر این نقطه ثابت  $p_1$  یک نقطه زین و اگر  $hs > 2$  آن‌گاه  $\lambda_2 > 1$  و یک نقطه ناپایدار است. همچنین اگر  $hs = 2$  آن‌گاه این نقطه غیرهذلولوی است زیرا  $\lambda_2 = -1$  از طرفی محورهای مختصات برای دستگاه (۳) خطوط پایا هستند و  $\lambda_1 > 1$  پس در راستای محور  $x$  مدارها دور شونده هستند. حال اگر دستگاه را به محور  $y$  محدود کنیم، نگاشت زیر را به دست می‌آوریم.

$$y \mapsto y(1 + hs - hby). \quad (6)$$

تنها نقطه ثابت نگاشت فوق  $y = \frac{s}{b}$  است که متناظر با نقطه  $p_1$  دستگاه (۳) است. در این نقطه  $f'(\frac{s}{b}) = -1$  برای تعیین پایداری از مشتق شوارتزی استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$Sf(\frac{s}{b}) = -\frac{3}{2}(2hb)^2 < 0. \quad (7)$$

در نتیجه در راستای محور  $y$  نقطه ثابت پایدار است (قضیه ۱.۶ در [۱] را ببینید). پس نقطه ثابت  $p_1$  برای دستگاه

(۳) در این حالت یک زین غیرهذلولوی است.

به‌طور مشابه پایداری نقطه ثابت  $p_2$  را در گزاره زیر بیان می‌کنیم.

گزاره ۲. اگر  $0 < hr < 2$  در این صورت نقطه ثابت  $p_2 = (\frac{r}{a}, 0)$  یک نقطه زین، اگر  $hr > 2$  یک نقطه ناپایدار و اگر  $hr = 2$  یک زین غیرهذلولوی است.

اثبات. اثبات این گزاره مشابه اثبات گزاره ۱ است و در این جا آن را حذف می‌کنیم.

برای تعیین پایداری نقطه ثابت درونی  $p_3$  لم زیر را به کار می‌بریم که ارتباط بین ریشه‌های چندجمله‌ای درجه دوم با ضرایب آن را بیان می‌کند.

لم ۱.  $([10])$  تابع  $F(\lambda) = \lambda^2 + B\lambda + C$  را در نظر بگیرید که در آن  $B$  و  $C$  ثابت‌های حقیقی هستند و  $F(1) > 0$ . فرض کنید  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  ریشه‌های معادله  $F(\lambda) = 0$  باشند. آن‌گاه گزاره‌های زیر برقرارند.

$$1. \quad |\lambda_1| < 1 \text{ و } |\lambda_2| < 1 \text{ اگر و تنها اگر } F(-1) > 0 \text{ و } C < 1.$$

$$2. \quad |\lambda_1| < 1 \text{ و } |\lambda_2| > 1 \text{ اگر و تنها اگر } F(-1) < 0.$$

$$3. \quad |\lambda_1| > 1 \text{ و } |\lambda_2| > 1 \text{ اگر و تنها اگر } F(-1) > 0 \text{ و } C > 1.$$

$$4. \quad \lambda_1 = -1 \text{ و } \lambda_2 \neq -1 \text{ اگر و تنها اگر } F(-1) = 0 \text{ و } B \neq 0, 2.$$

$$5. \quad \lambda_1 \text{ و } \lambda_2 \text{ یک جفت ریشه مختلط مزدوج هستند و } |\lambda_1| = |\lambda_2| = 1 \text{ اگر و تنها اگر}$$

$$-2 < B < 2 \text{ و } C = 1.$$

$$6. \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \text{ اگر و تنها اگر } F(-1) = 0 \text{ و } B = 2.$$

ماتریس ژاکوبی دستگاه (۳) در نقطه ثابت درونی  $p_3$  به صورت

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 1 - ahx^* & \alpha hx^* \\ \beta hy^* & 1 - hby^* \end{pmatrix}, \quad (8)$$

است. بنابراین معادله مشخصه نظیر ماتریس (۸) به صورت

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (2 - hP)\lambda + (1 - hP + Qh^2), \quad (9)$$

به دست می‌آید که در آن

$$P = ax^* + by^* = \frac{a(\alpha s + br) + b(as + \beta r)}{ab - \alpha \beta},$$

$$Q = (ab - \alpha \beta)x^*y^* = \frac{(\alpha s + br)(as + \beta r)}{ab - \alpha \beta}. \quad (10)$$

فرض کنید  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  ریشه‌های معادله مشخصه (۹) باشند. داریم  $p(1) = Qh^2 > 0$  و همچنین

$$p(-1) = 4 - 2Ph + Qh^2.$$

از طرفی چون

$$(2 - hP)^2 - 4(1 - hP + Qh^2) = P^2 - 4Q,$$

و با توجه به تعریف  $P$  و  $Q$  در رابطه (۱۰) داریم:

$$P^2 - 4Q = (ax^* - by^*)^2 + \alpha\beta x^*y^* > 0. \quad (11)$$

بنابر این  $p(\lambda)$  همواره دو ریشه حقیقی دارد. با استفاده از لم ۱ گزاره ۱ زیر نتیجه می‌شود.

گزاره ۳. نقطه ثابت درونی  $p_3$  برای دستگاه (۳)

$$1. \text{ یک چاه است اگر } 0 < h < \frac{P - \sqrt{P^2 - 4Q}}{Q}$$

$$2. \text{ یک منبع است اگر } h > \frac{P + \sqrt{P^2 - 4Q}}{Q}$$

$$3. \text{ یک زین است اگر } \frac{P - \sqrt{P^2 - 4Q}}{Q} < h < \frac{P + \sqrt{P^2 - 4Q}}{Q}$$

$$4. \text{ یک نقطه غیرهذلولوی است اگر } h = \frac{P \pm \sqrt{P^2 - 4Q}}{Q}, \frac{2}{P}, \frac{4}{P}, h \neq \frac{4}{P}, \frac{2}{P}$$

با توجه به اینکه در نقاط غیرهذلولوی ممکن است انشعاب رخ بدهد، در بخش بعد به بررسی وجود انشعاب در این دستگاه می‌پردازیم.

#### ۴- آنالیز انشعاب

یکی از پدیده‌های مهم در دستگاه‌های دینامیکی پدیده انشعاب است. بر اساس مباحث ارائه شده در بخش قبل می‌دانیم که به ازای مقدار مشخصی از پارامترها دستگاه (۳) یک نقطه ثابت درونی غیرهذلولوی پیدا می‌کند. بنابراین با تغییر مقدار پارامتر در نزدیکی این مقدار خاص خواص کیفی دستگاه تغییر می‌کند که به پدیده انشعاب منجر می‌شود. به طور دقیق‌تر اگر شرط (۴) گزاره ۳ برقرار باشد، یکی از مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبی دستگاه در نقطه ثابت درونی  $p_3$  برابر ۱- و دیگری مقداری به جز ۱ و ۱- است. در نتیجه احتمال انشعاب دوبرابر سازی دوره تناوب در این دستگاه وجود دارد [۱۱، ۱]. حال شرط (۴) گزاره ۳ را به صورت مجموعه‌های زیر می‌نویسیم:

$$FB_1 = \left\{ (a, b, r, s, \alpha, \beta, h) : h = \frac{P - \sqrt{P^2 - 4Q}}{Q} \right\},$$

9

$$FB_2 = \left\{ (a, b, r, s, \alpha, \beta, h) : h = \frac{P + \sqrt{P^2 - 4Q}}{Q} \right\}.$$

در این مرحله پارامتر  $h$  را به عنوان پارامتر انشعاب در نظر گرفته و نشان می‌دهیم دستگاه (۳) در نقطه ثابت درونی  $p_3 = (x^*, y^*)$  انشعاب دوبرابر سازی دوره تناوب دارد. در اینجا انشعاب را در نقطه  $p_3$  برای مقادیر پارامترها در همسایگی مجموعه  $FB_1$  بررسی می‌کنیم. به‌طور مشابه می‌توان انشعاب را برای مقادیر پارامترها در همسایگی مجموعه

$FB_2$  نیز به دست آورد. حال فرض کنید  $(a, b, r, s, \alpha, \beta, h) \in FB_1$  و  $h^* = \frac{P - \sqrt{P^2 - 4Q}}{Q}$  سپس با استفاده از تغییر متغیر  $(x, y, h) \rightarrow (u + x^*, v + y^*, \gamma + h^*)$  داریم:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13}uv + a_{14}u^2 + b_{11}\gamma u + b_{12}\gamma v + b_{13}\gamma uv + b_{14}\gamma u^2 \\ a_{23}uv + a_{24}v^2 + b_{21}\gamma u + b_{22}\gamma v + b_{23}\gamma uv + b_{24}\gamma v^2 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

که در آن

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{ab - \alpha\beta} (ab - \alpha\beta - abr h^* - \alpha\alpha sh^*) & a_{12} &= \frac{1}{ab - \alpha\beta} (\alpha br h^* + \alpha^2 sh^*), \\ a_{13} &= \frac{1}{ab - \alpha\beta} (\alpha\alpha bh^* - \alpha^2 \beta h^*), & a_{14} &= \frac{1}{ab - \alpha\beta} (\alpha\alpha \beta h^* - a^2 bh^*), \\ b_{11} &= \frac{1}{ab - \alpha\beta} (-abr - \alpha\alpha s), & b_{12} &= \frac{1}{ab - \alpha\beta} (\alpha br + \alpha^2 s), \\ b_{13} &= \frac{1}{ab - \alpha\beta} (ab\alpha - \alpha^2 \beta), & b_{14} &= \frac{1}{ab - \alpha\beta} (\alpha\alpha \beta - a^2 b), \\ a_{21} &= \frac{1}{ab - \alpha\beta} (a\beta sh^* + \beta^2 rh^*), & a_{22} &= \frac{1}{ab - \alpha\beta} (ab - \alpha\beta - absh^* + b\beta rh^*), \\ a_{23} &= \frac{1}{ab - \alpha\beta} (ab\beta h^* - \alpha\beta^2 h^*), & a_{24} &= \frac{1}{ab - \alpha\beta} (b\alpha\beta h^* - ab^2 h^*), \\ b_{21} &= \frac{1}{ab - \alpha\beta} (r\beta^2 + a\beta s), & b_{22} &= \frac{1}{ab - \alpha\beta} (-b\beta r - abs), \\ b_{23} &= \frac{1}{ab - \alpha\beta} (ab\beta - \alpha\beta^2), & b_{24} &= \frac{1}{ab - \alpha\beta} (b\alpha\beta - ab^2). \end{aligned}$$

ماتریس وارون‌پذیر

$$T = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ -1 - a_{11} & \lambda_2 - a_{11} \end{pmatrix}.$$

را تعریف کرده و سپس با تغییر مختصات  $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  دستگاه (۱۲) به دستگاه زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(\bar{x}, \bar{y}, \gamma) \\ g(\bar{x}, \bar{y}, \gamma) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

که در آن

$$\begin{aligned}
 f(\bar{x}, \bar{y}, \gamma) &= \frac{a_{13}(\lambda_2 - a_{11}) - a_{12}a_{23}}{a_{12}(\lambda_2 + 1)} uv + \frac{a_{14}(\lambda_2 - a_{11})}{a_{12}(\lambda_2 + 1)} u^2 - \frac{a_{24}}{(\lambda_2 + 1)} v^2 \\
 &+ \frac{b_{11}(\lambda_2 - a_{11}) - a_{12}b_{21}}{a_{12}(\lambda_2 + 1)} \gamma u + \frac{b_{12}(\lambda_2 - a_{11}) - a_{12}b_{22}}{a_{12}(\lambda_2 + 1)} \gamma v \\
 &+ \frac{a_{13}(\lambda_2 - a_{11}) - a_{12}a_{23}}{a_{12}(\lambda_2 + 1)} \gamma uv + \frac{a_{14}(\lambda_2 - a_{11})}{a_{12}(\lambda_2 + 1)} \gamma u^2 - \frac{a_{24}}{(\lambda_2 + 1)} \gamma v^2, \\
 g(\bar{x}, \bar{y}, \gamma) &= \frac{a_{13}(1 + a_{11}) + a_{12}a_{23}}{a_{12}(\lambda_2 + 1)} uv + \frac{a_{14}(1 + a_{11})}{a_{12}(\lambda_2 + 1)} u^2 + \frac{a_{24}}{(\lambda_2 + 1)} v^2 \\
 &+ \frac{b_{11}(1 + a_{11}) + a_{12}b_{21}}{a_{12}(\lambda_2 + 1)} \gamma u + \frac{b_{12}(1 + a_{11}) + a_{12}b_{22}}{a_{12}(\lambda_2 + 1)} \gamma v \\
 &+ \frac{b_{11}(1 + a_{11}) + a_{12}b_{21}}{a_{12}(\lambda_2 + 1)} \gamma u + \frac{b_{12}(1 + a_{11}) + a_{12}b_{22}}{a_{12}(\lambda_2 + 1)} \gamma v,
 \end{aligned}$$

و همچنین

$$u = a_{12}(\bar{x} + \bar{y}), \quad v = -(1 + a_{11})\bar{x} + (\lambda_2 - a_{11})\bar{y}.$$

در ادامه منیفلد مرکزی (۱۳) را در نقطه  $(0,0)$  و در نزدیکی پارامتر  $\gamma = 0$  به دست می آوریم. منیفلد مرکزی به صورت

$$\bar{y} = h(\bar{x}, \gamma) = h_{20}\bar{x}^2 + h_{11}\gamma\bar{x} + h_{02}\gamma^2 + O((|\bar{x}| + |\gamma|)^3). \quad (14)$$

تعریف می شود. این منیفلد باید در معادله زیر صدق کند.

$$h(-\bar{x} + f(\bar{x}, h(\bar{x}, \gamma), \gamma)) - \lambda_2 h(\bar{x}, \gamma) - g(\bar{x}, h(\bar{x}, \gamma), \gamma) = 0. \quad (15)$$

با جای گذاری (۱۴) در معادله (۱۵) داریم:

$$\begin{aligned}
 h_{20} &= \frac{(1+a_{11})(a_{24}(1+a_{11}) - a_{13}(1+a_{11}) - a_{12}a_{23} + a_{12}a_{14})}{1-\lambda_2^2}, \\
 h_{11} &= \frac{b_{12}(1+a_{11})^2 + a_{12}(b_{22} - b_{11})(1+a_{11}) - a_{12}^2 b_{21}}{a_{12}(1+\lambda_2)^2}, \\
 h_{02} &= 0.
 \end{aligned}$$

بنابراین دینامیک محدود شده به منیفولد مرکزی به صورت نگاشت

$$F: \bar{x} \mapsto -\bar{x} + f_1 \bar{x}^2 + f_2 \gamma \bar{x} + f_3 \gamma \bar{x}^2 + f_4 \gamma^2 \bar{x} + f_5 \bar{x}^3 + O((|\bar{x}| + |\gamma|)^4), \quad (۱۶)$$

به دست می‌آید که در آن

$$f_1 = \frac{1}{\lambda_2 + 1} (a_{12} a_{14} (\lambda_2 - a_{11}) - a_{24} (1 + a_{11})^2 - a_{13} (\lambda_2 - a_{11}) (1 + a_{11}) + a_{12} a_{23} (1 + a_{11})),$$

$$f_2 = \frac{1}{a_{12} (\lambda_2 + 1)} (a_{12} b_{11} (\lambda_2 - a_{11}) - a_{12}^2 b_{21} - b_{12} (\lambda_2 - a_{11}) (1 + a_{11}) + a_{12} b_{22} (1 + a_{11})),$$

$$f_3 = \frac{1}{a_{12} (\lambda_2 + 1)} (h_{11} (a_{12} a_{13} (\lambda_2 - a_{11} (\lambda_2 - 2a_{11} - 1) - a_{12}^2 a_{23} (\lambda_2 - 2a_{11} - 1) + 2a_{12}^2 a_{14} (\lambda_2 - a_{11}) + 2a_{12} a_{24} (1 + a_{11})) + h_{20} (a_{12} b_{11} (\lambda_2 - a_{11}) - a_{12}^2 b_{21} + b_{12} (\lambda_2 - a_{11})^2 - a_{12} b_{22} (\lambda_2 - a_{11}))),$$

$$f_4 = \frac{h_{11}}{a_{12} (\lambda_2 + 1)} (a_{12} b_{11} (\lambda_2 - a_{11}) - a_{12}^2 b_{21} + b_{12} (\lambda_2 - a_{11})^2 - a_{12} b_{22} (\lambda_2 - a_{11})),$$

$$f_5 = \frac{h_{20}}{(\lambda_2 + 1)} (a_{13} (\lambda_2 - a_{11}) (\lambda_2 - 2a_{11} - 1) + 2a_{12} a_{14} (\lambda_2 - a_{11}) - 2a_{24}).$$

نگاشت (۱۶) تحت انشعاب دوبرابری دوره تناوب قرار می‌گیرد، هر گاه در دو شرط زیر صدق کند [۱۱].

$$\alpha_1 = \left[ \frac{\partial F}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{x}^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{x} \partial \gamma} \right] |_{(0,0)} \neq 0,$$

$$\alpha_2 = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{x}^2} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 F}{\partial \bar{x}^3} \right] |_{(0,0)} \neq 0.$$

با استفاده از محاسبه مستقیم برای نگاشت (۱۶) داریم:

$$\alpha_1 = f_2 \neq 0, \quad \alpha_2 = f_1^2 + f_5 \neq 0.$$

حال نتایج فوق را به صورت یک قضیه بیان می‌کنیم.



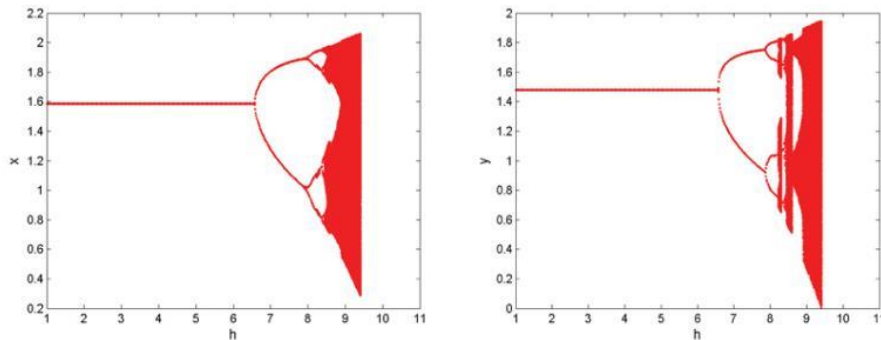
قضیه ۱. دستگاه (۳) تحت انشعاب دوبرابری دوره تناوب قرار می‌گیرد، هر گاه در دو شرط زیر صدق کند [۱۴].

$$\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0.$$

علاوه بر این اگر  $\alpha_2 > 0$  (یا  $\alpha_2 < 0$ ) انشعاب دو برابری دوره تناوب، فوق بحرانی (یا زیر بحرانی) است، بدین مفهوم که نقاط ۲- تناوبی منشعب شده از این نقطه پایدار (یا ناپایدار) هستند.

### ۵- شبیه‌سازی عددی

در این قسمت با استفاده از نرم افزار متلب دیاگرام انشعاب و نمای لیاپانف دستگاه (۳) را برای برخی مقادیر عددی رسم می‌کنیم. فرض کنید  $a = 0.19$ ،  $b = 0.2$ ،  $r = 0.3$ ،  $s = 0.28$ ،  $\alpha = 0.001$  و  $\beta = 0.01$ . با توجه به این مقادیر، دستگاه (۳) یک نقطه ثابت درونی یکتای  $(x^*, y^*) = (1.586733, 1.479337)$  دارد. انشعاب دوبرابری دوره تناوب از نقطه یکتای  $(x^*, y^*)$  به ازای پارامتر  $h_1^* = 6.573063$  از مجموعه  $FB_1$  و  $h_2^* = 6.824203$  از مجموعه  $FB_2$  رخ می‌دهد. با انتخاب  $h_1^*$  به عنوان پارامتر انشعاب داریم  $\alpha_1 = -0.293075$  و  $\alpha_2 = 0.424591 > 0$  و  $(a, b, r, s, \alpha, \beta, h) \in FB_1$  بنابراین انشعاب برای این مقادیر عددی، فوق بحرانی است. با توجه به شکل ۱ مشاهده می‌شود که نقطه ثابت درونی برای  $h < 6.573063$  پایدار است و در مقدار انشعاب  $h = 6.573063$  پایداری خود را از دست می‌دهد. همچنین آبخاری از دوبرابری دوره تناوب برای  $6.573063 < h < 9.5$  قابل مشاهده است. شکل ۱ رفتار دستگاه در طول منحنی  $FB_1$  را نشان می‌دهد.



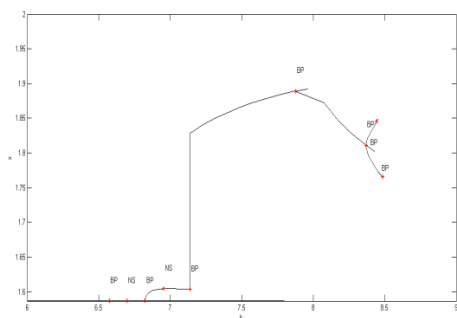
شکل ۱: دیاگرام انشعاب دوبرابری دوره تناوب دستگاه (۳) برای مقادیر  $s = 0.28$ ،  $r = 0.3$ ،  $b = 0.2$ ،  $a = 0.19$ ،  $\alpha = 0.001$  و  $\beta = 0.01$  و مقادیر اولیه  $(0.1, 0.3)$ .

با توجه به اینکه شبیه‌سازی با استفاده از الگوریتم‌های عددی ساده معمولاً بدین صورت است که تنها نقاطی که به یک جواب پایدار برسند ترسیم می‌شوند. همچنین وقتی الگوریتم به یک جواب دستگاه برسد نمی‌تواند از آن جواب خارج شده و جواب‌های بعدی را نیز بدست آورد. بنابراین برای دنبال کردن جواب در طول منحنی  $FB_2$  از بسته Matcont در نرم‌افزار متلب استفاده می‌کنیم [۱۵]. با استفاده از این بسته می‌توان جواب‌ها و نقاط انشعاب را به صورت دستی دنبال کرد و همچنین جواب‌ها و دوره‌های ناپایدار را نیز ترسیم نمود. همان‌طور که در ابتدای این بخش

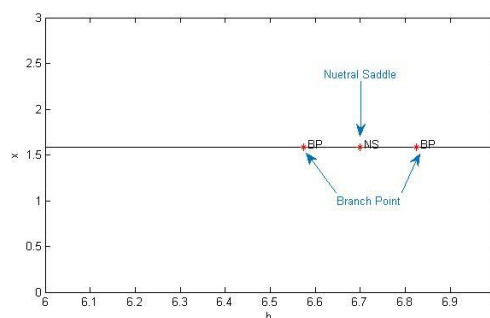
بیان شد انشعاب در طول منحنی  $FB_1$  فوق بحرانی است و با محاسبه پارامترهای انشعاب در طول منحنی  $FB_2$  داریم:

$$\alpha_1 = 0.0347619 > 0, \quad \alpha_2 = 0.02063975 < 0.$$

بنابراین انشعاب در طول این منحنی زیر بحرانی است یعنی دوره‌های به وجود آمده در این انشعاب ناپایدار هستند. این مطلب تایید کننده این موضوع است که با برنامه معمولی که تنها جواب‌های پایدار را نشان می‌دهد نمی‌توان دیاگرام انشعاب در طول منحنی  $FB_2$  را رسم نمود. در ادامه با استفاده از بسته Matcont نقاط دو شاخه شدن در طول منحنی  $FB_2$  را به دست می‌آوریم (شکل ۲ را ببینید). ابتدا با تغییر پارامتر  $h$  دو مقدار انشعاب را محاسبه می‌کنیم که همان مقادیر  $h_1^* = 6.573063$  و  $h_2^* = 6.824203$  هستند. این نقاط با (BP) در شکل ۲-الف مشخص شده‌اند. بین این دو مقدار نقطه مثبت ثابت سیستم یک زین (NS) است. در مرحله بعد نقطه شروع را نقطه انشعاب  $h_2^* = 6.824203$  از مجموعه  $FB_2$  در نظر گرفته و مسیر جواب را دنبال می‌کنیم. در هر نقطه انشعاب که روی شکل مشخص شده است یک مرحله دوبرابری دوره تناوب اتفاق می‌افتد که به عنوان نمونه در شکل ۲-ب (ب) یکی از شاخه‌ها را تا چند مرحله دنبال کرده‌ایم. نقاط دو شاخه شدن بعدی با BP روی شکل مشخص شده‌اند. بنابراین مشاهده می‌شود که در طول منحنی  $FB_2$  نیز انشعاب دوبرابری دوره تناوب رخ می‌دهد که زیر بحرانی است. این شبیه‌سازی گزاره ۳ و مطالب بخش ۴ را تایید می‌کند.



(ب)



(الف)

شکل ۲: بررسی انشعاب دستگاه (۳) در طول منحنی  $FB_2$ . محور افقی طول گام  $h$  و محور عمودی متغیر  $x$  را نشان می‌دهند.

## ۶- بررسی آشوب

در این بخش به بررسی آشوب در دستگاه می‌پردازیم. یکی از ملاک‌های کمی وجود آشوب، محاسبه نمای لیاپانف ماکزیمال است. در اینجا ابتدا به معرفی و محاسبه نمای لیاپانف یک دستگاه دینامیکی می‌پردازیم. نمای لیاپانف یک دستگاه دینامیکی، کمیتی است برای اندازه‌گیری میزان واگرایی مدارهایی که از دو نقطه نزدیک به هم شروع شده‌اند [۱۲].

$$|\delta X(t)| \approx e^{\lambda t} |\delta X_0|$$

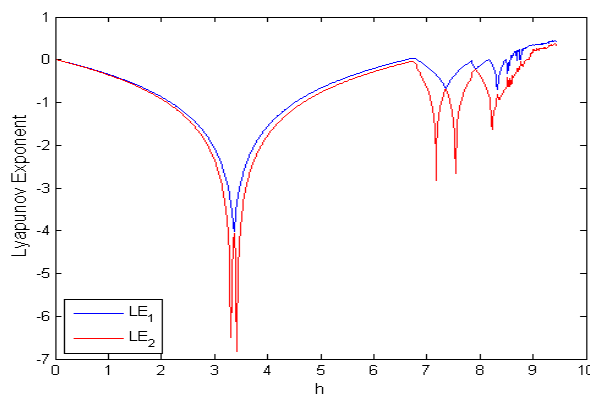
به طور دقیق‌تر، دو مدار با نقاط شروع که به اندازه  $\delta X_0$  از هم فاصله دارند در نمای فاز دستگاه با نرخ واگرای می‌شوند (به شرطی که بتوان رفتار واگرایی را با تقریب خطی توصیف کرد) که  $\lambda$  را نمای لیاپانف می‌نامند [۱۳]. نرخ واگرایی ممکن است برای جهت‌های مختلف بردار اولیه جدانشونده، متفاوت باشد. بنابراین طیف نمای لیاپانف با بعد نمای فاز دستگاه برابر است، یعنی یک دستگاه دینامیکی  $n$  - بعدی دارای  $n$  نمای لیاپانف است. بزرگترین نمای لیاپانف را نمای لیاپانف ماکزیمال می‌نامند. مثبت بودن نمای لیاپانف ماکزیمال معمولاً به عنوان شاخص وجود آشوب در دستگاه شناخته می‌شود [۱۴، ۱]. نمای لیاپانف ماکزیمال در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\delta X_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta X(t)|}{|\delta X_0|}.$$

نمای لیاپانف ماکزیمال برای دستگاه دینامیکی گسسته  $x_{n+1} = f(x_n)$  به صورت

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \ln |f'(x_j)|,$$

تعریف می‌شود. روش‌های عددی متفاوتی برای محاسبه نمای لیاپانف وجود دارد (به عنوان مثال [۱۶] و مراجع آن را ببینید). در این مقاله از الگوریتم ارائه شده در [۱۶] استفاده شده است. نمای لیاپانف ماکزیمال در نقطه  $h = 6.824203$  تقریباً برابر است با  $0.0437$ . نمای لیاپانف متناظر با دیاگرام انشعاب دستگاه (۳) متناظر با شکل ۱ بر حسب تغییرات طول گام  $h$ ، در شکل ۳ رسم شده است. در این شکل مشخص است که برای مقادیر  $8 \leq h < 9.5$  یک ناحیه آشوبناک وجود دارد.



شکل ۳: نمای لیاپانف متناظر با شکل ۱.

## ۷- کنترل آشوب

همان‌طور که در بخش قبل بحث شد، دستگاه (۳) یک دستگاه آشوبناک است. در برخی مدل‌های کاربردی، آشوب به عنوان یک عامل مزاحم تلقی می‌شود. زیرا حتی کوچکترین اختلال در دستگاه ممکن است دستگاه را به گونه‌ای تغییر دهد که نتایج کاملاً نامطلوب شوند. بنابر این کنترل آشوب و دستیابی به یک رفتار منظم مورد توجه ریاضی‌دانان و مهندسان قرار گرفته است. این کار را می‌توان با پایدارسازی بی‌نهایت دور متناوب ناپایدار که در ناحیه آشوبناک وجود دارند، انجام داد [۱۷]. این کار با اضافه کردن یک اختلال کوچک وابسته به زمان به عنوان پارامتر کنترل به دستگاه انجام می‌گیرد. در این بخش، کنترل بازخورد که یک روش مؤثر پایدارسازی مدارهای آشوبناک در نزدیکی نقطه ثابت ناپایدار است را پیاده‌سازی می‌کنیم [۱۸]. برای جزئیات روش کنترل بازخورد به مراجع [۱۸، ۱۹، ۲۰] مراجعه کنید. فرم کنترل شده دستگاه (۳) به صورت

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n[1 + h(r - ax_n + \alpha y_n)] + U_n, \\ y_{n+1} &= y_n[1 + h(s - by_n + \beta x_n)], \end{aligned} \quad (17)$$

را در نظر بگیرید که در آن

$$U_n = -k_1(x_n - x^*) - k_2(y_n - y^*),$$

نیروی کنترل بازخورد است و ثابت‌های  $k_1$  و  $k_2$  بهره‌های بازخورد و  $(x^*, y^*)$  همان نقطه ثابت درونی  $p_3$  هستند. برای مقدار  $h$  در همسایگی مقدار  $h^*$  تقریب خطی نگاشت در فرم نرمال جردن به صورت

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} - k_1 & a_{12} - k_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (18)$$

است که در آن  $u = x - x^*$ ،  $v = y - y^*$  و مقادیر  $a_{ij}$  در رابطه (۱۲) تعریف شده‌اند. معادله مشخصه متناظر با ماتریس ضرایب دستگاه (۱۸) برابر است با

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22} - k_1)\lambda + a_{22}(a_{11} - k_1) - a_{21}(a_{12} - k_2) = 0. \quad (19)$$

فرض کنید  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  مقادیر ویژه متناظر با معادله (۱۹) باشند، در این صورت

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} - k_1, \quad \lambda_1 \lambda_2 = a_{22}(a_{11} - k_1) - a_{21}(a_{12} - k_2). \quad (20)$$

خطوط حاشیه‌ای ناحیه پایداری توسط معادلات  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$  و  $\lambda_1 = \pm 1$  مشخص می‌شوند. بنابر این با فرض  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$  از معادله (۲۰) داریم:

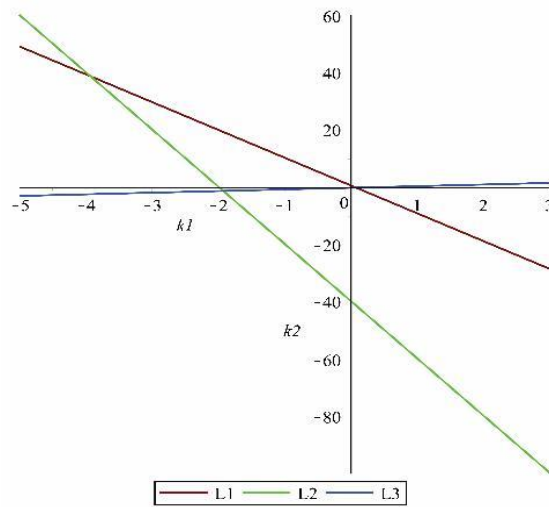
$$L_1: \quad a_{22}k_1 - a_{22}k_2 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} - 1.$$

همچنین با فرض  $\lambda_1 = \pm 1$  از معادلات (۲۰) نتیجه می شود:

$$L_2: (1 - a_{22})k_1 + a_{21}k_2 = a_{11} + a_{22} - a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12} - 1,$$

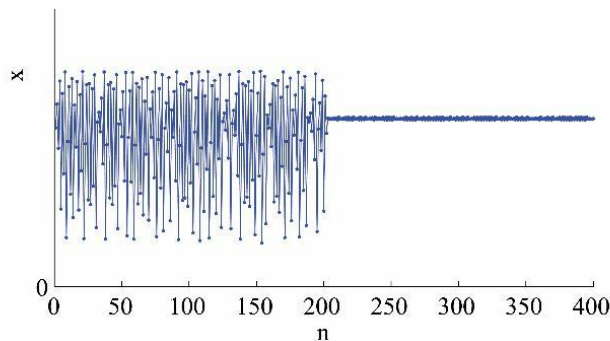
$$L_3: (1 + a_{22})k_1 - a_{21}k_2 = a_{11} + a_{22} + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} + 1.$$

بنابراین ناحیه پایداری ناحیه مثلثی شکل است که توسط خطوط  $L_1$ ،  $L_2$  و  $L_3$  ایجاد شده است. این ناحیه برای پارامترهای  $a = 0.19$ ،  $b = 0.2$ ،  $r = 0.3$ ،  $s = 0.28$ ،  $\alpha = 0.001$  و  $\beta = 0.01$  در شکل ۴ رسم شده است.



شکل ۴: ناحیه پایداری دستگاه (۳) برای  $\beta = 0.01$ ،  $\alpha = 0.001$ ،  $s = 0.28$ ،  $r = 0.3$ ،  $b = 0.2$ ،  $a = 0.19$

با انتخاب بهره‌های بازخورد درون این ناحیه مثلثی می توان آشوب را کنترل کرد. با انتخاب مقادیر فوق برای پارامترها نقطه ثابت درونی برابر  $(1.586733, 1.479337)$  به دست می آید. با شروع از نقطه اولیه  $(1.5, 1.4)$  و مقدار  $h = 9.3$  سری زمانی یک مدار آشوبناک را به دست می آوریم. حال اگر مقادیر  $k_1 = -1.5$  و  $k_2 = 0.3$  را انتخاب کنیم و کنترل گر را بعد از تکرار ۲۰۰ روشن کنیم مشاهده می کنیم که مدار آشوبناک به یک مدار پایدار تبدیل می شود. این نتایج را می توان در شکل ۵ مشاهده کرد.



شکل ۵: کنترل آشوب با استفاده از نیروی کنترل بازخورد

## ۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک مدل همزیستی با نرخ برداشت متناسب را در نظر گرفته و سپس با روش اویلر آن را به یک مدل گسسته تبدیل کردیم. هر چند یک مدل رفتار پیوسته داشته باشد ولی در اندازه‌گیری و شبیه‌سازی گسسته می‌شود، از طرفی با گسسته‌سازی مدل، یک پارامتر به مجموعه پارامترها اضافه شده و می‌توانیم براساس پارامتر جدید نیز مدل را تحلیل کنیم. علاوه بر این دینامیک مدل گسسته جدید را می‌توان با استفاده از قضایای موجود در نظریه سیستم‌های دینامیکی گسسته مورد تجزیه و تحلیل قرار داد، که ما این کار را در این مقاله انجام داده‌ایم.

در ادامه با استفاده از نظریه منیفلد مرکزی به طور تحلیلی نشان دادیم که این مدل تحت انشعاب دوبرابری دوره تناوب قرار می‌گیرد. در انشعاب دوبرابری دوره تناوب، دوره‌های ۲-تناوبی، ۴-تناوبی، ۸-تناوبی و... به وجود می‌آیند. در نتیجه، زمانی که این دوره‌های پایا وجود دارند هر دو گونه جمعیت به طور همزمان در سیستم موجودند و هیچکدام به سمت انقراض نمی‌روند. ولی در جاهایی که نقطه ثابت مرزی پایدار داریم یکی از گونه‌ها در معرض انقراض قرار می‌گیرد. در ادامه در تأیید مطالب تحلیلی اثبات شده، شبیه‌سازی عددی برای مقدار مشخصی از پارامترها انجام و دیاگرام انشعاب رسم شده است. با توجه به دیاگرام انشعاب در این مدل انتظار وقوع آشوب داریم که با استفاده از نمای لیاپانف ماکزیمال نشان دادیم که مدل، آشوبناک است و سپس با استفاده از روش کنترل بازخورد به کنترل آشوب در این مدل پرداختیم. در نتیجه، اگر پارامترها به گونه‌ای باشند که مدل آشوبناک شود، می‌توان بهره‌های بازخورد یا همان پارامترهای کنترل را به گونه‌ای انتخاب کرد که جمعیت در یک مقدار پایدار باقی بماند.

## منابع

۱. الایدی، صابر، آشوب گسسته با کاربردهایی در علوم و مهندسی، مترجمین: محمدحسین اکرمی و رسول کاظمی، انتشارات دانشگاه یزد، (۱۳۹۵).
2. Kot, M., "Elements of mathematical ecology". The Press Syndicate of the University of Cambridge, Cambridge University Press, Cambridge, UK (2001).
3. Thompson, J. N., "The geographic mosaic of coevolution. Chicago", IL: University of Chicago Press, (2005).
4. Georgescu, P., Zhang, H., "Lyapunov functionals for two-species mutualisms", Applied Mathematics and Computation 226 (2014), 754-764.
5. Goh, B.S., "Stability in models of mutualism", The American Naturalist, 113(1979), 261-275.
6. León, C.V.D., "Lyapunov function for two-species cooperative systems", Applied Mathematics and Computation, 219 (2012), 2493-2497.
7. Ouncharoen, R., Pinjai, S., Dumrongpokaphan, T., Lenbury, Y., "Global stability analysis of

- predator-prey model with harvesting and delay”, *Thai Journal of Mathematics*, 8(2012), 589-605.
8. Atabaigi, A., “Multiple Bifurcations and Dynamics of a Discrete Time Predator-Prey System with Group Defense and Non-Monotonic Functional Response”, *Differential Equations and Dynamical Systems*, (2016) 1-26.
  9. Ahmad, R., “Global stability of two-species mutualism model with proportional harvesting”, *Int. J. Adv. Appl. Sci.* 4(2017), 74-79.
  10. Liu, X., Xiao, D., “Complex dynamic behaviors of a discrete-time predator-prey system”, *Chaos Solitons Fractals* 32 (2007), 80-94.
  11. Kuznetsov, Y.A., “Elements of applied bifurcation theory”, Third edition. Springer Science and Business Media, New York, 2016.
  12. Boeing, G., “Visual Analysis of Nonlinear Dynamical Systems: Chaos, Fractals, Self-Similarity and the Limits of Prediction”, *Systems*, 4 (2016), 37.
  13. Cencini, M., Cecconi, F., Vulpiani, A., “Chaos From Simple models to complex systems”, World Scientific, 2010.
  14. Alligood, K.T., Tim, D.S., Yorke, J., “Chaos”, Springer Berlin Heidelberg, (1997).
  15. Govaerts, W., Kuznetsov, Yu. A., Ghaziani R. K., Meijer, H. G. E., “CI MatContM: A Toolbox for Continuation and Bifurcation of Cycles of Maps”, Universiteit Gent, Belgium and Utrecht University, The Netherlands (2008).
  16. He, J., Yu, S., Cai, J., “Numerical Analysis and Improved Algorithms for Lyapunov-Exponent Calculation of Discrete-Time Chaotic Systems”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 26 (2016), 1650219.
  17. Gutiérrez, J. M., Iglesias, A., “Mathematica package for analysis and control of chaos in nonlinear systems”, *Computers in Physics*, 12 (1998), 608-619.
  18. Lynch, S., “Dynamical Systems with Applications using MATLAB”, 2nd ed., Basel, Birkhäuser, 2014.
  19. Doyle, J. C., Francis, B., Tannenbaum, A., “Feedback Control Theory”, Macmillan Publishing Company, New York, (1992).
  20. Hasegawa, Y., “Control Problems of Discrete-Time Dynamical Systems”, Springer, New York Dordrecht London, (2015).