خواص انحنایی مترهای فینسلری استرچ ضعیف

مهدی سبزواری[۱*]، اسما قاسمی[۱]، اکبر طیبی[۲]
۱- دانشگاه هرمزگان، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی
۲- دانشگاه قم، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی

دریافت ۹۸/۰۳/۰۴ پذیرش ۹۸/۱۲/۲۱

چکیده

در این مقاله، مترهای فینسلری استرچ ضعیف را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در ابتدا نشان می‌دهیم که هر متریک استرچ ضعیف L-کاهشی کامل با تاب کارتان کراندار، یک متر لندسبرگ است. در ادامه یک دسته‌بندی از مترهای فینسلری دو بعدی استرچ ضعیف را ارائه می‌دهیم. در انتها نشان می‌دهیم که هر متر کروپینای استرچ ضعیف با ۱-فرم کیلینگ ثابت، یک متر بروالدی است.

واژه‌های کلیدی: متر استرچ، متر استرچ ضعیف، متر لندسبرگ، متر بروالد، متر C-کاهشی، متریک L-کاهشی.

۱. مقدمه

در هندسهٔ فینسلر، اولین کمیت غیر ریمانی که تاب کارتان نامیده می‌شود، در سال ۱۹۳۴ توسط کارتان معرفی شده است [۴]. غیر از تاب کارتان چندین کمیت غیر ریمانی مهم دیگر نیز وجود دارند، از جمله انحنای بروالد B، انحنای لندسبرگ L، انحنای میانگین لندسبرگ J، انحنای استرچ $\sum$ و غیره. اخیرا تعدادی کمیت غیر ریمانی پیچیده و جالب نظیر H-انحنا، Ξ- انحنا و $\hat{C}$-انحنا نیز در هندسهٔ فینسلر معرفی شده‌اند (مراجع [۵]، [۶]، [۱۱]، [۱۲]، [۱۴] و [۱۹] را ببینید). همهٔ این کمیت‌ها برای مترهای ریمانی صفر هستند، لذا به آنها انحناهای غیر ریمانی گفته می‌شود. این کمیت‌های هندسی غیر ریمانی، تفاوت بین هندسهٔ فینسلری و هندسهٔ ریمانی را شرح می‌دهند. لذا مطالعهٔ این کمیت‌ها برای شناخت طبیعت هندسهٔ فینسلری مفید واقع می‌شود.

فرض کنیم (M,F) یک منیفلد فینسلری n-بعدی باشد. دو تانسور مهم روی منیفلدهای فینسلری وجود دارد: تانسور متریک اساسی $\boldsymbol{g}_y$ و تاب کارتان $\boldsymbol{C}_y$، که به ترتیب از دومین و سومین مرتبهٔ مشتق $1/2F_x^2$ در $y\in T_xM_0$ به دست می‌آیند. میزان تغییرات تاب کارتان در طول ژئودزی‌ها، انحنای لندسبرگ $\boldsymbol{L}_y$ گفته می‌شود. در [۳]، بروالد یک انحنای غیر ریمانی را معرفی کرد که انحنای استرچ نامیده شده و آنرا با نماد $\sum_y$ نشان داد. او ثابت کرد که این تانسور صفر می‌شود اگر و تنها اگر طول یک بردار تحت تبدیل موازی در طول یک متوازی الاضلاع بی‌نهایت کوچک

* نویسنده مسئول: msabzvari@gmail.com

بدون تغییر بماند. F را یک متر فینسلری استرچ گوییم اگر $\Sigma = 0$. در مقاله [۱۳]، نجفی- طیبی با گرفتن رد نسبت به $\boldsymbol{g}_y$ در اولین و دومین متغیر Σ_y، انحنای استرچ میانگین $\bar{\Sigma}_y$ را معرفی نمودند. به متر فینسلری F استرچ ضعیف گفته می‌شود اگر که $\bar{\Sigma} = 0$. لذا هر متر لندسبرگی و استرچی یک متر استرچ ضعیف است. یک تعمیم دیگر از مترهای لندسبرگی وجود دارد. متر F را L-کاهشی گوییم اگر انحنای لندسبرگ آن به صورت زیر داده شود:

$$L_{ijk} = \frac{1}{n+1}\{h_{ij}J_k + h_{jk}J_i + h_{ki}J_j\},$$

که در آن $h_{ij} := FF_{ij}$ متریک زاویه‌ای است. ابتدا قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۱. هر متریک استرچ ضعیف L-کاهشی کامل با تاب کارتان کراندار، یک متریک لندسبرگ است.

با استفاده از قضیهٔ فوق نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجهٔ ۱. هر متریک C- کاهشی استرچ ضعیف کامل، یک متریک بروالد است.

در [۱۶]، زابو سطوح بروالدی را در نظر می‌گیرد و یک قضیهٔ اساسی را ثابت می‌کند: هر سطح بروالدی، یا ریمانی است یا موضعاً مینکوفسکی. فضاهای بروالد توسط زابو در [۱۶] دسته‌بندی شده و به طور واضح در [۱۷] ساخته شده‌اند. از طرف دیگر، کلاس مترهای بروالدی یک زیرکلاس از کلاس مترهای استرچ ضعیف هستند. خیلی جالب خواهد بود اگر که سطح استرچ ضعیف غیر ریمانی و غیر موضعاً مینکوفسکی، در ساختار فینسلری هموار و قویا محدب، روی کلاف مماسی وجود داشته باشد. این نکته ما را برمی‌انگیزاند که سطوح استرچ ضعیف را در نظر بگیریم. لذا قضیهٔ زیر را ثابت خواهیم نمود.

قضیهٔ ۲. فرض کنیم (M, F) یک منیفلد فینسلری دو بعدی باشد. آن‌گاه موارد زیر برقرارند:

الف) F یک متر استرچ ضعیف است اگر و تنها اگر یک متر استرچ باشد.

ب) فرض کنیم اسکالر اساسی F در شرط $2(II_{,1})' - (I_{,1})^2F \neq 0$ صدق کند. آن‌گاه F یک متر استرچ ضعیف است اگر و تنها اگر یک متر ریمانی باشد.

با استفاده از قضیهٔ فوق، نتیجه زیر را داریم.

نتیجهٔ ۲. هر سطح کروپینای استرچ ضعیف مثبت-معین، یا ریمانی و یا موضعا مینکوفسکی است.

در [۱۳]، نجفی-طیبی نشان داده‌اند که هر متر راندرز استرچ ضعیف با ۱-فرم کیلینگ ثابت، یک متر بروالدی است. در اینجا ما قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۳. هر متر کروپینای استرچ ضعیف با ۱–فرم کیلینگ ثابت، یک متریک بروالدی است.

با استفاده از قضیه فوق نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجهٔ ۳. هر متریک C-کاهشی استرچ ضعیف با ۱–فرم کیلینگ ثابت یک متر بروالدی است.

۲. مفاهیم مقدماتی

فرض کنید M یک منیفلد n-بعدی C^∞ باشد. فضای مماس در نقطه $x\epsilon M$ را با T_xM و کلاف مماسی M را با نماد $TM = \cup_{x\epsilon M} T_xM$ مشخص می‌کنیم. یک متر فینسلری روی M یک تابع مانند $F: TM \to [0, \infty[$ است که دارای خواص زیر است: (i) F روی $TM_0 := TM\backslash\{0\}$، C^∞ است، (ii) F روی تارهای کلاف مماسی TM همگن مثبت از درجه یک است و (iii) برای هر $y\epsilon T_xM$، فرم مربعی $\boldsymbol{g}_y$ روی T_xM مثبت-معین است

$$\mathbf{g}_{\mathrm{y}}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}[F^2(y + su + tv)]|_{s,t=0}, \qquad u, v\ \epsilon T_xM.$$

زوج (M, F) را یک منیفلد فینسلری n-بعدی می‌گوییم.

فرض کنید (M, F) یک منیفلد فینسلری n-بعدی باشد و نیز $x\epsilon M$ و $F_x := F|_{T_xM}$. برای اندازه‌گیری میزان نااقلیدسی بودن F_x، تاب کارتان را به صورت $\boldsymbol{C}_y: T_xM \times T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ تعریف می کنیم که در آن

$$\mathbf{C}_y(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}) := \frac{1}{2} \frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{g}_{y+tw}(u, v)\right]_{t=0}, \qquad u, v, w\epsilon T_xM.$$

خانوادهٔ $\boldsymbol{C} := \{\boldsymbol{C}_y\}_{y\epsilon TM_0}$ تاب کارتان نامیده می‌شود. به وضوح $\boldsymbol{C} = 0$ است اگر و تنها اگر F ریمانی باشد.

برای $y\epsilon T_xM_0$ تاب میانگین کارتان $\mathbf{I}_y$ را با $\boldsymbol{I}_y(u) := I_i(y)u^i$ تعریف می‌کنیم که در آن $\mathbf{I}_i := g^{jk}C_{ijk}$. بنا بر قضیهٔ دایکه، F ریمانی است اگر و تنها اگر $\boldsymbol{I}_y = 0$ (به مرجع [۲] مراجعه شود).

یک متر فینسلری F روی منیفلد n-بعدی M، C-کاهشی نامیده می‌شود اگر که تانسور کارتان آن به صورت زیر باشد:

$$C_{ijk} = \frac{1}{n+1}\{h_{ij}I_k + h_{jk}I_i + h_{ki}I_j\},$$

که در آن $h_{ij} := FF_{ij}$ متریک زاویه‌ای است [۹].

لم ماتسوموتو-هوجو ([۲]، [۹]): فرض کنید (M, F) یک منیفلد فینسلری n-بعدی باشد ($n \geq 3$). آنگاه F یک متر C-کاهشی است اگر و فقط اگر به صورت یک متر راندرز $F = \alpha + \beta$ و یا یک متر کروپینا $F = \alpha^2/\beta$ باشد.

مشتقات کواریانت افقی $\boldsymbol{C}$ در طول ژئودزی‌ها، انحنای لندسبرگ $\boldsymbol{L}_y: T_xM \times T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ را نتیجه می‌دهد که به صورت $\boldsymbol{L}_y(u, v, w) := L_{ijk}(y)u^iv^jw^k$ تعریف می‌شود که در آن

$$L_{ijk} := C_{ijk|s}y^s.$$

در این مقاله از الصاق بروالد مربوط به متر های فینسلری استفاده می کنیم و مشتق افقی و عمودی کواریانت تانسورهای فینسلری را به ترتیب با نمادهای "|" و "," نشان خواهیم داد. خانوادهٔ $\boldsymbol{L} := \{\boldsymbol{L}_y\}_{y\epsilon TM_0}$ انحنای لندسبرگ نامیده می‌شود. F یک متر فینسلری لندسبرگ نامیده می‌شود اگر $\boldsymbol{L} = 0$. مشتقات کوریانت افقی $\boldsymbol{I}$ در طول ژئودزی‌ها

انحنای لندسبرگ میانگین $\mathbf{J}_y(u) := J_i(y)u^i$ را نتیجه می‌دهد که در آن $J_i := g^{jk}L_{ijk}$ اگر $\mathbf{J} = 0$ آن‌گاه F یک متر لندسبرگ ضعیف گفته می‌شود.

برای یک بردار غیر صفر $y\epsilon T_xM_0$ انحنای استرچ $\mathbf{\Sigma}_y: T_xM \times T_xM \times T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ را به صورت $\mathbf{\Sigma}_y(u,v,w,z) := \Sigma_{ijkl}(y)u^iv^jw^kz^l$ تعریف می‌کنیم که در آن

$$\Sigma_{ijkl} := 2\big(L_{ijk|l} - L_{ijl|k}\big).$$

اگر $\mathbf{\Sigma} = 0$ باشد، آنگاه F را یک متر فینسلر استرچ می‌نامیم. به وضوح هر متر لندسبرگ، یک متر استرچ است. اگر نسبت به دو اندیس اول انحنای استرچ میانگین رد بگیریم، یک انحنای غیر ریمانی جدید به نام انحنای میانگین استرچ به‌دست می‌آوریم. برای یک بردار غیر صفر $y\epsilon T_xM_0$، $\bar{\mathbf{\Sigma}}: T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ را با $\bar{\mathbf{\Sigma}}_y(u,v) := \bar{\Sigma}_{ij}(y)u^iv^j$ تعریف می‌کنیم که در آن

$$\bar{\Sigma}_{ij} := g^{kl}\Sigma_{klij}.$$

اگر $\bar{\mathbf{\Sigma}} = 0$ باشد آنگاه به F یک متر استرچ ضعیف گفته می‌شود. به‌سادگی می‌توان دید که که هر متر لندسبرگ یا متر استرچ، یک متر استرچ ضعیف است.

برای منیفلد فینسلری (M,F)، یک میدان برداری سرتاسری $\mathbf{G}$ توسط F روی کلاف مماسی TM_0 القا می‌شود به طوری که در یک مختصات استاندارد (x^i,y^i) برای TM_0 به‌صورت $\mathbf{G} = y^i\frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i}$ نوشته می‌شود که در آن

$$G^i(x,y) := \frac{1}{4}g^{il}\left\{\frac{\partial^2F^2}{\partial x^k\partial y^l}y^k - \frac{\partial F^2}{\partial x^l}\right\}.$$

میدان برداری $\mathbf{G}$ اسپری متناظر با منیفلد فینسلری (M,F) نامیده می‌شود. در مختصات موضعی، یک منحنی $c = c(t)$ یک ژئودزیک از F است اگر و فقط اگر مختصات آن $c = (c^i(\mathrm{t}))$ در معادلهٔ $\ddot{c}^i + 2G^i(\dot{c}) = 0$ صدق کند.

فرض کنیم (M,F) یک منیفلد فینسلری باشد. F را یک متر بروالد گوییم در صورتی که انحنای بروالد آن صفر باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B^i{}_{jkl} := \frac{\partial^3G^i}{\partial y^j\partial y^k\partial y^l}.$$

با استفاده از انحنای بروالد، می توان انحنای لندسبرگ را به صورت زیر نیز تعریف نمود:

$$L_{jkl} := -\frac{1}{2}\,y_i\;B^i{}_{jkl}.$$

بنا بر همین تعریف می توان دید که هر متر بروالدی یک متر لندسبرگی است.

۳. اثبات قضیهٔ ۱

در این بخش می‌خواهیم قضیهٔ ۱ را ثابت کنیم. برای این کار، ابتدا لم زیر را ارائه می دهیم.

لم ۱. فرض کنید (M,F) یک منیفلد L-کاهشی و F یک متر استرچ ضعیف باشد. برای هر ژئودزیک $c=c(t)$ و هر میدان برداری موازی $V=V(t)$ در طول c، توابع $\boldsymbol{C}(t):=\boldsymbol{C}_{\dot{c}}(V(t))$ و $\boldsymbol{L}(t)=\boldsymbol{L}_{\dot{c}}(V(t))$ در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند:

(۱)

$$\boldsymbol{C}(t)=t\,\boldsymbol{L}(0)+\boldsymbol{C}(0).$$

اثبات. بنا بر فرض F یک متر L-کاهشی است پس

(۲)

$$L_{ijk}=\frac{1}{n+1}\{h_{ij}J_k+h_{jk}J_i+h_{ki}J_j\}.$$

با مشتق‌گیری از (۲) در طول ژئودزی‌های فینسلری داریم

(۳)

$$L_{ijk|s}y^s=\frac{1}{n+1}\{h_{ij}J_{k|s}y^s+h_{jk}J_{i|s}y^s+h_{ki}J_{i|s}y^s\}.$$

چون F یک متر استرچ ضعیف است لذا $\boldsymbol{J}_{i|j}=\boldsymbol{J}_{j|i}$، با ضرب آن در y^j داریم:

(۴)

$$J_{i|j}y^j=0.$$

بااستفاده از (۳) و (۴) خواهیم داشت

(۵)

$$L_{ijk|s}y^s=0.$$

فرض کنید

(۶)

$$\boldsymbol{C}(t):=\boldsymbol{C}_{\dot{c}}\big(V(t)\big) \quad \text{و} \qquad \boldsymbol{L}(t):=\boldsymbol{L}_{\dot{c}}\big(V(t)\big).$$

با تعریف ما از $\boldsymbol{L}_y$ داریم

$$\boldsymbol{L}(t)=\boldsymbol{C}'(t).$$

پس با استفاده از (۵) و (۶)، معادلهٔ زیر را به دست می‌آوریم

(۷)

$$C^{"}(t) = \boldsymbol{L}'(t) = \ \boldsymbol{L}_{i|l}\big(\dot{c}(t)\big)\dot{c}^{l}(t)V^{i}(t) = 0.$$

بنابر (۷) رابطهٔ (۱) برقرار است.□

یادآوری ۱. فرض کنید (M,F) یک منیفلد فینسلری و $c{:}\,[a,b] \to M$ یک ژئودزی باشد. برای یک میدان برداری موازی $V = V(t)$ در طول منحنی c، رابطه زیر برقرار است:

(۸)

$$\boldsymbol{g}_{\dot{c}}\big(V(t),V(t)\big) = \text{ثابت}$$

اثبات قضیهٔ ۱. فرض کنید (M,F) یک منیفلد فینسلری کامل باشد. یک بردار یکهٔ دلخواه $y\epsilon T_xM$ و یک بردار دلخواه $v\epsilon T_xM$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $c = c(t)$ ژئودزیکی باشد به طوری که

$$\dot{c}(0) = y, \qquad c(0) = x$$

همچنین فرض کنیم که $V = V(t)$ میدان برداری موازی در طول c با شرط $V(0) = v$ باشد. با استفاده از لم ۱ داریم

(۹)

$$\boldsymbol{C}(t) \ = t\boldsymbol{L}(0) + \boldsymbol{C}(0)$$

بنا بر فرض قضیه $\boldsymbol{C}_y$ کراندار می باشد. این بدین معنی است که ثابت $B < \infty$ چنان وجود دارد که

(۱۰)

$$||\boldsymbol{C}||_x := sup_{y\epsilon T_xM_0} sup_{v\epsilon T_xM}\frac{\boldsymbol{C}_y(v)}{\big[\boldsymbol{g}_y(v,v)\big]^{3/2}} \leq B$$

طبق یادآوری فوق داریم $|\boldsymbol{C}(t)| \leq BT^{3/2} < \infty$ که در آن T یک ثابت است. بنابراین $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}(t)$ یک تابع کراندار روی بازهٔ $[0,\infty)$ خواهد بود. حال با قرار دادن $t \to \infty$ و نیز در نظر گرفتن کرانداری تاب کارتان، معادلهٔ (۹) ایجاب می‌کند که

$$\boldsymbol{L}_y(v) = \boldsymbol{L}(0) = 0.$$

و در نتیجه، F یک متریک لندسبرگ است.□

نتیجهٔ ۳. هر متریک استرچ ضعیف C-کاهشی کامل، یک متریک بروالدی است.

اثبات. نشان داده شد است که هر متر C-کاهشی با انحنای لندسبرگ صفر، یک متریک بروالدی است [۷] و [۸]. در [۱۵] شن اثبات کرده که هر متریک راندرز، تاب کارتان کراندار دارد. در [۱۸] طیبی- صادقی نشان داده‌اند که متر

کروپینا تاب کارتان کراندار دارد. پس مترهای C-کاهشی داری تاب کارتان کراندار هستند. از طرفی هر متر C-کاهشی یک متر L-کاهشی است. لذا با استفاده از قضیهٔ ۱ به اثبات می‌رسیم. □

۴. اثبات قضیهٔ ۲

در این فصل، قصد داریم تا قضیهٔ دوم را اثبات کنیم. ابتدا کنج بروالد را یادآوری می کنیم که برای محاسبات در بعد ۲ از آن استفاده خواهیم کرد. فرض کنید (M,F) یک منیفلد فینسلری دو بعدی باشد. کنج بروالدی (ℓ^i, m^i) را در نظر می‌گیریم که در آن $\ell^i = y^i/F(y)$ و m^i بردار واحدی است که $\ell_i m^i = 0$ و $\ell_i = g_{ij}\ell^j$.

قضیهٔ ۴. هر متریک فینسلری دو بعدی یک متریک استرچ است اگر و فقط اگر یک متریک استرچ ضعیف باشد اگر و فقط اگر $I_{|1|1} = 0$.

اثبات: به این دلیل که تاب کارتان در جهت ℓ^i مؤلفه‌ای ندارد یعنی

$$C_{ijk} y^i = 0.$$

لذا در کنج بروالد می‌تواند به‌صورت زیر نوشته بشود:

$$FC_{ijk} = I m_i m_j m_k. \tag{۱۱}$$

که در آن میدان اسکالر I، اسکالر اساسی متر F نامیده می‌شود. از (۱۱) مشتق افقی می‌گیریم

$$FC_{ijk|l} = \left(I_{|1}\ell_l + I_{|2} m_l\right) m_i m_j m_k. \tag{۱۲}$$

با ضرب (12) در y^l داریم

$$L_{ijk} = I_{|1} m_i m_j m_k. \tag{۱۳}$$

از (۱۳) مشتق افقی گرفته و با استفاده از تعریف انحنای استرچ به رابطهٔ زیر می رسیم:

$$\begin{aligned}\Sigma_{ijkl} &= 2\left[L_{ijk|l} - L_{ijl|k}\right]\\ &= 2\left[\left(I_{|1|1}L_l + I_{|1|2} m_l\right) m_k - \left(I_{|1|1} L_k + I_{|1|2} m_k\right) m_l\right] m_i m_j.\end{aligned}$$

که نتیجه می دهد

$$\Sigma_{ijkl} = 2 I_{|1|1}\left(L_l m_k - L_k m_l\right) m_i m_j. \tag{۱۴}$$

چون

$$g^{ij} m_i m_j = m^i m_j = 1.$$

لذا با ضرب (۱۴) در g^{ij} به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

(۱۵)

$$\bar{\sum}_{kl} = 2I_{|1|1}(L_k m_k - L_k m_l).$$

با استفاده از (۱۴) و (۱۵) اثبات کامل می‌شود. □

اثبات قضیهٔ ۲. انحنای بروالد یک رویه فینسلری به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$B^i_{jkl} = F^{-1}\left(-2I_{,1}L^i + I_2 m^i\right)m_j m_k m_l,$$

که در آن $I_2 = I_{,2} + I_{,1|2}$ (صفحهٔ ۶۸۹ در [۱] را ببینید). تانسور کارتان F ، به صورت زیر نوشته می شود:

$$C_{ijk} = F^{-1} I m_i m_j m_k.$$

بنابراین انحنای بروالدی نیز به صورت زیر بیان می‌شود

(۱۶)

$$B^i{}_{jkl} = \mu C_{jkl}L^i + \lambda\left(h^i_j h_{kl} + h^i_k h_{jl} + h^i_j h_{jk}\right),$$

که در آن $h_{ij} := m_i m_j$، متریک زاویه‌ای است، $\mu = -2\, I_{,1}/I$ و $\lambda = I_2/3$ با ضرب (۱۶) در y_i داریم

(۱۷)

$$L_{ijk} = -\frac{1}{2}\mu F C_{ijk}.$$

از معادلهٔ (۱۷) خواهیم داشت

(۱۸)

$$J_i = -\frac{1}{2}\mu F I_i.$$

مشتق‌گیری افقی از (۱۸) رابطهٔ زیر را می‌دهد

(۱۹)

$$J_{i|j} = -\frac{1}{2}F\left(\mu_j I_i + \mu I_{i|j}\right).$$

که در آن $\mu_i := \mu_{|j}$. بنابراین

(۲۰)

$$\bar{\sum}_{ij} = -F\left[\mu_j I_i - \mu_i I_j + \mu\left(I_{i|j} - I_{j|i}\right)\right].$$

با استفاده از فرض قضیه و (۲۰) نتیجه می‌شود که

(۲۱)

$$\mu_j I_i - \mu_i I_j = \mu\left(I_{j|i} - I_{i|j}\right).$$

با ضرب (۲۱) در y^i عبارت زیر حاصل می‌شود

(۲۲)

$$\acute{\mu} I_i = -\mu J_i,$$

که در آن $\mu' := \mu_{|j}\, y^j$. معادلهٔ (۱۸) را در معادلهٔ (۲۲) جاگذاری می‌کنیم:

(۲۳)

$$[2\acute{\mu} - \mu^2 F] I_i = 0.$$

بنا بر فرض، $2\acute{\mu} - \mu^2 F \neq 0$. بنابراین $I_i = 0$ و لذا F به یک متر ریمانی تقلیل می‌یابد. □

۵. اثبات قضیهٔ ۳

در [۱۳]، نجفی- طیبی انحنای استرچ و انحنای میانگین استرچ مترهای C-کاهشی را به صورت زیر به دست آورده‌اند.

لم ۲. ([۱۳]) فرض کنید F یک متر C-کاهشی روی منیفلد n-بعدی M باشد. انحنای استرچ و انحنای میانگین استرچ متر F به صورت زیر خواهند بود:

(۲۴)

$$\Sigma_{ijkm} = \frac{2}{n+1}\{J_{i|m}h_{jk} - J_{i|k}h_{jm} + J_{j|m}h_{ik} - J_{j|k}h_{im}\} \\ -\frac{2}{n+1}\{(J_{m|k} - J_{k|m})h_{ij} + 2J_k L_{ijm} - 2J_m L_{ijk}\},$$

(۲۵)

$$\bar{\Sigma}_{km} = 2(J_{k|m} - J_{m|k}).$$

برای یک (α, β)- متریک دلخواه $F := \alpha\varphi(s)$، $s = \beta/\alpha$، $b_{i;j}\theta^j := db_i - b_j\theta_i^j$ که در آن $\theta^i := dx^i$ و $\theta_i^j := \Gamma_{ik}^j dx^k$ فرم‌های الصاق لویی-چوی ویتای متر α را نشان می‌دهد. فرض کنید

$$r_{ij} := \frac{1}{2}(b_{i;j} + b_{j;i}), \qquad s_{ij} := \frac{1}{2}(b_{i;j} - b_{j;i}), \quad r_j := b^i r_{ij}, \quad s_j := b^i s_{ij}$$

همچنین قرار می‌دهیم

$$s_0 := s_j y^j, \quad r_0 := r_j y^j, \quad s_{i0} := s_{ij} y^j, \quad r_{i0} := r_{ij} y^j.$$

فرض کنید که $G^i = G^i(x,y)$ و $\bar{G}^i = \bar{G}^i(x,y)$ به ترتیب ضرایب اسپری مترهای F و α را در همان سیستم مختصات نشان می‌دهند. با استفاده از تعریف، تساوی زیر را به‌دست می‌آوریم

(۲۶)

$$G^i = \bar{G}^i + Py^i + Q^i \,,$$

که در آن

$$P = \alpha^{-1}\Theta[r_{00} - 2Q\alpha s_0]\,,$$
$$Q^i = \alpha Q s_0^i + \psi[r_{00} - 2Q\alpha s_0]b^i,$$
$$Q = \frac{\acute{\varphi}}{\varphi - s\acute{\varphi}}\,,$$
$$\Theta = \frac{\varphi\varphi' - s(\varphi\varphi'' + \varphi'\varphi')}{2\varphi((\varphi - s\varphi') + (b^2 - s^2)\varphi'')}\,,$$
$$\psi = \frac{1}{2}\frac{\varphi''}{(\varphi - s\varphi') + (b^2 - s^2)\varphi''}\,,$$

به‌وضوح اگر β نسبت به α موازی باشد $(s_{ij} = 0, r_{ij} = 0)$ آن‌گاه $P = 0$ و $Q^i = 0$. در این حالت $G^i = \bar{G}^i$ در y مربعی بوده و F یک متریک بروالد است.

حالا فرض کنید $\varphi = \varphi(s)$ یک تابع مثبت C^∞ روی $(-b_0, b_0)$ باشد. برای یک عدد $b\epsilon[0, b_0)$ فرض کنید

(۲۷)

$$\Phi := -(Q - sQ')\{n\Delta + 1 + sQ\} - (b^2 - s^2)(1 + sQ)Q'',$$

که در آن

$$\Delta := 1 + sQ + (b^2 - s^2)Q'.$$

فرمول زیر را برای ضریب اسپری G^i یک (α, β)- متریک F داریم

$$G^i = \bar{G}^i + \alpha Q s_0^i + (-2Q\alpha s_0 + r_{00})\big(\Theta\alpha^{-1}y^i + \psi b^i\big),$$

که در آن

$$\Theta = \tfrac{Q - sQ'}{2\Delta}, \quad \psi = \tfrac{Q'}{2\Delta}, \qquad r_{00} = r_{ij}y^i y^j, \qquad s_0^i := s_i y^i, \quad s_j^i := a^{ih}s_{hj}.$$

با محاسبهٔ مستقیم، می‌توانیم یک فرمول برای تاب کارتان میانگین (α, β)- متریک‌ها به‌صورت زیر به‌دست بیاوریم

(۲۸)

$$I_i = -\frac{\Phi(\varphi - s\varphi')}{2\Delta\varphi\alpha^2}(\alpha b_i - sy_i).$$

بر طبق قضیهٔ دایکه، یک متریک فینسلری ریمانی است اگر و تنها اگر $I = 0$. به‌وضوح یک (α, β)-متریک $F = \alpha\varphi(s)$ ریمانی است اگر و تنها اگر $\Phi = 0$.

اثبات قضـــیهٔ ۳. در [۵]، لی-شـــن انحنای لندســـبرگ میانگین یک (α,β)-متریک $F=\alpha\varphi(s)$، $s=\beta/\alpha$ را به‌صورت زیر به دست آورده‌اند

(۲۹)
$$\begin{aligned}J_i=&-\frac{1}{\alpha^2\Delta(b^2-s^2)}\left[\frac{\Phi}{\Delta}+(n+1)(Q-sQ')\right](r_0+s_0)h_i\\&-\frac{h_i}{2\alpha^3\Delta(b^2-s^2)}(\psi_1+s\frac{\Phi}{\Delta})(r_{00}-2\alpha Qs_0)\\&-\frac{\Phi}{2\alpha^3\Delta^2}[-\alpha Q's_0h_i+\alpha Q(\alpha^2s_i-y_is_0)+\alpha^2\Delta s_{i0}\\&+\alpha^2(r_{i0}-2\alpha Qs_0)-(r_{00}-2\alpha Qs_0)y_i],\end{aligned}$$

که در آن $h_i:=\alpha b_i-sy_i$ و
$$\psi_1:=\sqrt{b^2-s^2}\Delta^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\sqrt{b^2-s^2}}{\Delta^{\frac{3}{2}}}\right]'.$$

طبق فرض قضیهٔ تساوی‌های $r_{ij}=0$ و $s_i=0$ برقرار هستند. در این حالت رابطهٔ (۲۹) به صورت زیر در می‌آید
$$J_i=-\frac{\Phi}{2\alpha\Delta}s_{i0}.$$
برای متر کروپینا، $\varphi=1/s$ داریم

(۳۰)
$$\Delta=\frac{1}{s^2}(b^2-s^2),$$

(۳۱)
$$\Phi=\frac{2n}{s^3}(b^2-s^2).$$

در این حالت، اسپری و انحنای لندسبرگ میانگین متر F به صورت زیر خواهند بود

(۳۲)
$$G^i=\bar{G}^i-\frac{1}{2}Fs^i{}_0,$$

(۳۳)
$$J_i=-n\beta^{-1}s_{i0},$$

که در آن اندیس0 به معنی ضرب در y^j است. بنابراین

(۳۴)
$$G^i_j=\bar{G}^i_j-\frac{1}{2}\left(F_js^i{}_0+Fs^i{}_j\right),$$

(۳۵)

$$G^i_{jk} = \bar{G}^i_{jk} - \frac{1}{2}\left(F_{jk}s^i{}_0 + F_j s^i{}_k + F_k s^i{}_j\right).$$

از (۳۳) مشتق افقی می‌گیریم.

(۳۶)

$$J_{i|j} = -n\left[(\beta^{-1})_{|j}s_{i0} + \beta^{-1}s_{ik|j}y^k\right].$$

یک محاسبهٔ مستقیم نشان می‌دهد که

(۳۷)

$$(\beta)_{|j} = \frac{\delta\beta}{\delta x^i} = \frac{\partial\beta}{\partial x^i} - G^m_i\frac{\partial\beta}{\partial y^m} = \frac{\partial\beta}{\partial x^i} - \left[\bar{G}^m_i - \frac{1}{2}(F_i s^m{}_0 + F s^m{}_i)\right]\frac{\partial\beta}{\partial y^m}$$
$$= \frac{\partial b_k}{\partial x^i}y^k - \left[\bar{G}^m_i - \frac{1}{2}(F_i s^m{}_0 + F s^m{}_i)\right]b_m = \frac{\partial b_k}{\partial x^i}y^k - b_m\bar{G}^m_i = s_{0i} - b_m\bar{G}^m_i.$$

بنابراین

(۳۸)

$$(\beta^{-1})_{|i} = -\frac{1}{\beta^2}(s_{0i} - b_m\bar{G}^m_i).$$

با استفاده از (۲۵) و (۳۳) داریم

(۳۹)

$$\bar{\sum}_{ij} = -2n\left[(\beta^{-1})_{|j}s_{i0} - (\beta^{-1})_{|i}s_{j0} + \beta^{-1}\left(s_{ik|j} - s_{jk|i}\right)y^k\right]$$
$$= \frac{2n}{\beta^2}\left[\left(s_{0j} - b_m\bar{G}^m_j\right)s_{i0} - (s_{0i} - b_m\bar{G}^m_i)s_{j0}\right] - \frac{2n}{\beta}\left[s_{ik|j} - s_{jk|i}\right]y^k.$$

بنا بر فرض قضیه، رابطهٔ (۳۹) به صورت زیر تحلیل می‌یابد

(۴۰)

$$\left[\left(s_{0j} - b_m\bar{G}^m_j\right)s_{i0} - (s_{0i} - b_m\bar{G}^m_i)s_{j0}\right] = \beta\left[s_{ik|j} - s_{jk|i}\right]y^k.$$

از طرفی عبارت زیر برقرار است

$$b^i s_{ik|m} = -s^i{}_m s_{ik}.$$

لذا با ضرب (۴۰) در b^i داریم

(۴۱)

$$b^i b_m\bar{G}^m_i s_{j0} = \beta\left[-s^i_j s_{ik} - s_{jk|i}b^i\right]y^k.$$

همچنین با ضرب (۴۱) در y^j، داریم

$$s^i{}_0 s_{i0} = 0$$

که ایجاب می‌کند $s^i{}_j = 0$. لذا β نسبت به α موازی باشد. در این حالت، F به یک متر بروالدی تقلیل می‌یابد. لذا اثبات تمام می شود. ☐

References

1. P.L. Antonelli R. Ingarden and M. Matsumoto, *The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology*, Kluwer Academic Publishers, 1993.

2. D. Bao, S. S. Chern and Z. Shen, *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*, Springer-Verlage, 2000.

3. L. Berwald, *Ä Uber Parallel Äubertragung in Raumen mit allgemeiner Massbestimmung*, Jber. Deutsch. Math.-Verein., **34**(1926), 213-220.

4. E. Cartan, *Les espaces de Finsler*, Hermann Paris, 1934.

5. B. Li and Z. Shen, *Ricci curvature tensor and non-Riemannian quantities*, Canad. Math. Bull. **58**(2015), 530-537.

6. M. Matsumoto, *A theory of three-dimensional Finsler spaces in terms of scalars*, Demonst. Math. , **6**(1973), 223-251.

7. M. Matsumoto, *Remarks on Berwald and Landsberg spaces*, Contemporary Math. **196**(1996), 79-81.

8. M. Matsumoto, *On C-reducible Finsler spaces*, Tensor, N.S. **24**(1972), 29-37.

9. M. Matsumoto, *An improvement proof of Numata and Shibata's theorem on Finsler spaces of scalar curvature*, Publ. Math. Debrecen. **64**(2004), 489-500.

10. M. Matsumoto and S. $H\bar{o}j\bar{o}$, *A conclusive theorem for C-reducible Finsler spaces*, Tensor, N.S. **32**(1978), 225-230.

11. X. Mo, Z. Shen and H. Liu, *A new quantity in Riemann-Finsler geometry*, Glasgow Math. J. **54**(2012), 637-645.

12. B. Najafi, Z. Shen and A. Tayebi, *Finsler metrics of scalar flag curvature with special non-Riemannian curvature properties*, Geometriae Dedicata, **131**(2008), 87-97.

13. B. Najafi and A. Tayebi, *Weakly stretch Finsler metrics*, Publ. Math. Debrecen, **91**(2017), 441-454.

14. Z. Shen, *On some non-Riemannian quantities in Finsler geometry*, Canad. Math. Bull. **56**(2013), 184-193.

15. Z. Shen, *On R-quadratic Finsler spaces*, Publ. Math. Debrecen. **58**(2001), 263-274.

16. Z. I. Szabó, *Positive definite Berwald spaces (Structure theorems on Berwald spaces)*, Tensor (N.S.), **35**(1981), 25-39.

17. Z. I. Szabó, *Berwald metrics constructed by Chevalley's polynomials*, Preprint arXiv:math.DG/0601522 (2006).

18. A. Tayebi and H. Sadeghi, *On Cartan torsion of Finsler metrics*, Publ. Math. Debrecen. **82**(2) (2013), 461-471.

19. A. Tayebi and T. Tabatabaeifar, *Douglas-Randers manifolds with vanishing stretch tensor*, Publ. Math. Debrecen. **86**(2015), 423-432.