

# حل عددی معادلات انتگرال ولترا- فردهلم غیرخطی نوع اول با استفاده از چندجمله‌ای‌های لژاندر جایگزین

سهراب بزم<sup>۱\*</sup>، علیرضا حسینی<sup>۲</sup>

۱. دانشگاه مراغه، دانشکده علوم، گروه ریاضی،

۲. دانشگاه تهران، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر،

دریافت: ۹۸/۰۴/۱۷

پذیرش: ۹۸/۱۲/۱۱

## چکیده

در این مقاله، چندجمله‌ای‌های لژاندر جایگزین<sup>۱</sup> (ALPs) برای تقریب جواب معادلات انتگرال ولترا-فردهلم غیرخطی نوع اول<sup>۲</sup> (VFIEs) استفاده شده‌اند. ابتدا مسأله به یک معادله انتگرال ولترا-فردهلم نوع دوم تبدیل می‌شود و سپس، با استفاده از ماتریس‌های عملیاتی انتگرال‌گیری و حاصل ضرب ALP، حل مسأله ثانوی به حل یک دستگاه از معادلات جبری غیرخطی، که مجهولات آن ضرایب ALP جواب دقیق مسأله هستند، کاهش می‌یابد. یک تحلیل خطا برای روش ارائه شده انجام شده است و نتایج مثال‌های عددی نشان می‌دهند که این روش، حتی در صورت استفاده از تعداد کمی از ALPs، دقت خوبی ارائه می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: معادلات انتگرال غیرخطی نوع اول، معادلات انتگرال ولترا-فردهلم، چندجمله‌ای‌های لژاندر جایگزین، ماتریس عملیاتی.

## ۱. مقدمه

هدف این مقاله، ارائه یک روش عددی برای حل معادلات انتگرال ولترا-فردهلم غیرخطی نوع اول به فرم

$$f(x) = \int_0^x k_1(x,t)G_1(u(t))dt + \int_0^1 k_2(x,t)G_2(u(t))dt, \quad x \in [0,1], \quad (1-1)$$

است که در آن  $u$  یک تابع حقیقی مقدار و مجهول است،  $f$  و  $k_i$  ها،  $i = 1, 2$ ، توابع پیوسته داده شده و معلوم هستند که به ترتیب روی بازه‌های  $I := [0,1]$  و  $I \times I$  تعریف شده‌اند و  $G_i$  ها،  $i = 1, 2$ ، چندجمله‌ای‌هایی از  $u$  با ضرایب ثابت هستند. برای سادگی فرض می‌کنیم

$$G_i(u(x)) = u^{p_i}(x), \quad i = 1, 2, \quad (1-2)$$

\* نویسنده مسئول sbazm@maragheh.ac.ir

<sup>1</sup> Alternative Legendre Polynomials

<sup>2</sup> Volterra-Fredholm Integral Equations of the First Kind

که در آن  $p_i$  ها،  $i = 1, 2$  اعدادی صحیح و مثبت هستند، ولی این روش به آسانی می‌تواند به هر نوع معادله انتگرال غیرخطی به فرم (۱-۱) تعمیم داده شود. بنابراین ما معادلات انتگرال به فرم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = \int_0^x k_1(x, t)u^{p_1}(t)dt + \int_0^1 k_2(x, t)u^{p_2}(t)dt, \quad x \in [0, 1]. \quad (۱-۳)$$

روش‌های متعددی برای حل معادلات انتگرال نوع اول ارائه شده‌اند. به عنوان مثال روش‌های گسسته سازی برای حل معادله انتگرال ولترای نوع اول خطی

$$f(x) = \int_0^1 G(x, t)u(t)dt, \quad x \in [0, T], \quad (۱-۴)$$

در [۸, ۱۱, ۱۸, ۲۴, ۲۹, ۳۱, ۳۲] ارائه شده‌اند. یک روش مستقیم برای حل (۱-۴)، بر اساس توابع پالس-بلوکی و ماتریس عملیاتی انتگرال‌گیری آنها، در [3] توصیف شده است. توابع پالس-بلوکی اصلاح شده برای حل عددی (۱-۴) در [۲۳] معرفی و استفاده شده‌اند. برونر<sup>۱</sup> [7] و گلاوین<sup>۲</sup> [۱۷, ۱۸] روش‌های عددی برای حل معادله انتگرال ولترای غیرخطی نوع اول

$$f(x) = \int_0^1 G(x, t, u(t))dt, \quad x \in [0, T], \quad (۱-۵)$$

را بررسی کرده‌اند. یک خانواده از روش‌های گسسته‌سازی برای حل معادله انتگرال (۱-۵) در [۱۴] معرفی شده‌اند. این خانواده از روش‌ها قبلاً توسط اسکات<sup>۳</sup> برای حل معادله (۱-۴) به کار رفته بودند که شامل روش‌های چندگامی خطی، بلوک-به-بلوک و هم‌محلی هستند. یک روش موجک هار برای حل عددی یک خانواده از معادلات انتگرال ولترای غیرخطی نوع اول در [۲۷] ارائه شده است. همچنین یک مطالعه اجمالی در مورد حل معادلات انتگرال غیرخطی در [۱] انجام شده است.

همان‌گونه که در [۳] اشاره شده است، معادلات انتگرال نوع اول به طور ذاتی مسائلی بدوضع هستند، بدین معنی که جواب آنها به طور کلی ناپایدار است و تغییرات کوچک در مسأله می‌تواند منجر به تغییرات خیلی بزرگ در جواب‌ها شود. این بدوضع حل عددی را بسیار مشکل می‌کند به طوری که یک خطای کوچک ممکن است منجر به جواب‌های بی‌کران شود. در [۲, ۳۰] روش‌های منظم‌سازی متفاوتی برای غلبه بر این مشکل مسائل بدوضع ارائه شده است. در این مقاله، برای غلبه بر بدوضع، با این فرض که

$$k_1(x, x) \neq 0, \quad x \in [0, 1], \quad (۱-۶)$$

و مشتق‌گیری از (۱-۳) نسبت به  $x$  به معادله انتگرال ولترا-فردهلم مرتبه دوم زیر می‌رسیم:

$$u^{p_1}(x) = h(x) + \int_0^x r_1(x, t)u^{p_1}(t)dt + \int_0^1 r_2(x, t)u^{p_2}(t)dt, \quad x \in [0, 1], \quad (۱-۷)$$

<sup>1</sup> Brunner

<sup>2</sup> Gladwin

<sup>3</sup> Scott

که در آن

$$r_i(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} k_i(x, t) / k_1(x, x), \quad i = 1, 2, \quad (1-8)$$

و

$$h(x) = f'(x) / k_1(x, x). \quad (1-9)$$

ادامه این مقاله به صورت زیر تنظیم شده است. ابتدا، در بخش ۲، برخی ویژگی‌های ALPs را به طور مختصر بیان می‌کنیم و ماتریس‌های عملیاتی انتگرال و حاصل ضرب آنها را به دست می‌آوریم. در بخش ۳، روش هم‌محلی همراه با ماتریس‌های عملیاتی ALP استفاده می‌شوند تا حل مسأله (۱-۷) را به حل یک دستگاه غیرخطی از معادلات جبری تقلیل دهند. تحلیل خطای روش در بخش ۴ انجام شده است. تعدادی مثال عددی در بخش ۵ برای نشان دادن دقت و کارایی روش آمده است. نتیجه‌گیری کار هم در بخش ۶ آمده است.

## ۲. چندجمله‌ای‌های لژاندر جایگزین

در این بخش، مروری مختصر بر چندجمله‌ای‌های لژاندر جایگزین خواهیم داشت و برخی خواص این چندجمله‌ای‌ها را بیان می‌کنیم. برای اطلاعات بیشتر خواننده را به [۹، ۱۰] ارجاع می‌دهیم.

### ۲-۱ تعریف و ویژگی‌ها

فرض کنید  $n$  یک عدد صحیح نامنفی باشد. مجموعه  $\mathcal{P}_n = \{\mathcal{P}_{nk}(x)\}_{k=0}^n$  از چندجمله‌ای‌های لژاندر جایگزین در [۱۰] به صورت زیر معرفی شده‌اند:

$$\mathcal{P}_{nk}(x) = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \binom{n+k+j+1}{n-k} x^{k+j} = \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} \binom{n-k}{j-k} \binom{n+j+1}{n-k} x^j, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (1-2)$$

بر خلاف مجموعه‌های مرسوم از چندجمله‌ای‌های متعامد، می‌بینیم که هر چندجمله‌ای در  $\mathcal{P}_n$  از درجه  $n$  است. به عنوان مثال برای  $n = 3$  داریم:

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{30}(x) = 4 - 30x + 60x^2 - 35x^3, \\ \mathcal{P}_{31}(x) = 10x - 30x^2 + 21x^3 \\ \mathcal{P}_{32}(x) = 6x^2 - 7x^3, \\ \mathcal{P}_{33}(x) = x^3. \end{cases}$$

رابطه (۱-۲) نمایش از نوع رودریگز<sup>۱</sup> زیر را نتیجه می‌دهد [۱۰]:

$$\mathcal{P}_{nk}(x) = \frac{1}{(n-k)!} \frac{1}{x^{k+1}} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^{n+k-1} (1-x)^{n-k}), \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (2-2)$$

<sup>۱</sup>Rodrigues

از (۲-۲) نتیجه می‌شود [۱۰]:

$$\int_0^1 \mathcal{P}_{nk}(x) dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (۳-۲)$$

چندجمله‌ای‌های لژاندر جایگزین روی بازه  $[0,1]$  نسبت به تابع وزن  $w(x) = 1$  متعامد هستند، یعنی آنها در روابط تعامد زیر صدق می‌کنند [10]:

$$\int_0^1 \mathcal{P}_{nk}(x) \mathcal{P}_{nl}(x) dx = \frac{1}{k+l+1} \delta_{kl}, \quad k, l = 0, 1, \dots, n, \quad (۴-۲)$$

که در آن  $\delta_{kl}$  دلتای کرونکر است.

فرض کنید  $[\cdot]^T$  معرف ترانهاده یک بردار یا ماتریس باشد. با استفاده از رابطه (۱-۲) بردار ALP

$$\Psi(x) = [\mathcal{P}_{n0}(x), \mathcal{P}_{n1}(x), \dots, \mathcal{P}_{nn}(x)]^T,$$

می‌تواند در فرم

$$\Psi(x) = QX(x), \quad (۵-۲)$$

نوشته شود که در آن

$$X(x) = [1, x, x^2, \dots, x^n]^T,$$

و  $Q$  ماتریس بالامثلثی زیر است:

$$Q = [q_{kj}]_{k,j=0}^n, \quad q_{kj} = \begin{cases} 0, & 0 \leq j < k, \\ (-1)^{j-k} \binom{n-k}{j-k} \binom{n+j+1}{n-k}, & k \leq j \leq n. \end{cases}$$

همچنین ALPs در رابطه بازگشتی سه-جمله‌ای زیر صدق می‌کنند [۱۰]:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{nn}(x) &= x^n, \\ \mathcal{P}_{n,n-1}(x) &= 2n x^{n-1} - (2n-1)x^n, \\ a_{nk} \mathcal{P}_{n,k-1}(x) &= (b_{nk} x^{-1} - c_{nk}) \mathcal{P}_{nk}(x) - d_{nk} \mathcal{P}_{n,k+1}(x), \quad k = n-1, \dots, 1. \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} a_{nk} &= (k+1)(n-k+1)(n+k+1), \\ b_{nk} &= (k)(2k+1)(2k+2), \\ c_{nk} &= (2k+1)((n+1)^2 + k^2 + k), \\ d_{nk} &= k(n-k)(n+k+2). \end{aligned}$$

چندجمله‌ای‌های لژاندر جایگزین ویژگی‌هایی دارند که مشابه ویژگی‌های چندجمله‌ای‌های متعامد مرسوم هستند. این چندجمله‌ای‌ها جواب معادلات از نوع ابرهندسی نیستند اما بنا بر رابطه

$$\mathcal{P}_{nk}(x) = (-1)^{n-k} x^k P_{n-k}^{(0,2k+1)}(2x-1), \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (۶-۲)$$

می‌توانند بر حسب چندجمله‌ای‌های ژاکوبی  $P_i^{(\alpha, \beta)}$  بیان شوند [۱۰]. بنابراین ALPs با خانواده‌های مختلفی از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی مرتبط هستند و به طور متمایزی تمام مشخصه‌های چندجمله‌ای‌های متعامد منظم را حفظ می‌کنند.

نتیجه زیر از ویژگی‌های صفرهای چندجمله‌ای‌های ژاکوبی [28] و رابطه (۶-۲) به دست می‌آید.

نتیجه ۱-۲. [۱۰] چندجمله‌ای  $\mathcal{P}_{nk}$  دارای  $k$  صفر چندگانه  $x = 0$  و  $n - k$  صفر حقیقی متمایز در بازه  $[0, 1]$  است.

طبق نتیجه بالا،  $\mathcal{P}_{n0}$  دقیقا  $n$  صفر ساده در بازه  $[0, 1]$  دارد که به صورت زیر برای ساختن قاعده انتگرال گیری عددی گاوسی جایگزین به کار می‌روند.

نتیجه ۲-۲. [10] قاعده انتگرال گیری عددی گاوسی جایگزین

$$\int_0^1 g(x) dx \cong \omega_0 g(0) + \sum_{s=1}^n \omega_s g(x_s), \quad (7-2)$$

برای هر چندجمله‌ای از درجه حداکثر  $2n$  دقیق است اگر و تنها اگر  $x_s$ ‌ها صفرهای چندجمله‌ای  $\mathcal{P}_{n0}$  باشند و وزن‌های  $\omega_s$  به صورت زیر باشند:

$$\omega_s = -\frac{2}{n(n+1)(n+2)} \frac{\sum_{k=1}^n (2k+1) \mathcal{P}_{nk}(x_s)}{x_s^2 \mathcal{P}_{n1}(x_s) \mathcal{P}'_{n0}(x_s)}, \quad s = 1, \dots, n, \quad (8-2)$$

و

$$\omega_0 = 1 - \sum_{s=1}^n \omega_s. \quad (9-2)$$

## ۲-۲ تقریب تابع و تخمین‌های خطا

فرض کنید  $X = \mathcal{L}^2[0, 1]$  فضای توابع مربع انتگرال‌پذیر روی بازه بسته  $[0, 1] := I$  نسبت به اندازه لبگ باشد. ضرب داخلی در این فضا با رابطه

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx,$$

و نرم با رابطه

$$\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}} = \left( \int_0^1 f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

تعریف می‌شود. فرض کنید

$$X_n = \text{span}\{\mathcal{P}_{n0}(x), \mathcal{P}_{n1}(x), \dots, \mathcal{P}_{nn}(x)\}.$$

چون  $X_n$  یک زیرفضای با بعد متناهی از  $X$  است بنابراین بسته است [19, Theorem 2.4-3] و برای هر  $f \in X$  داده شده،

یک بهترین تقریب یکتا مانند  $\bar{f} \in X_n$  وجود دارد [19, Theorem 6.2-5] به طوری که

$$\|f - \bar{f}\|_2 \leq \|f - h\|_2, \quad \forall h \in X_n.$$

علاوه بر این داریم [13, Theorem 4.14]:

$$\bar{f}(x) = \sum_{k=0}^n f_k \mathcal{P}_{nk}(x),$$

که در آن

$$f_k = \frac{\langle f, \mathcal{P}_{nk} \rangle}{\langle \mathcal{P}_{nk}, \mathcal{P}_{nk} \rangle} = (2k + 1) \langle f, \mathcal{P}_{nk} \rangle, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (10-2)$$

بنابراین هر تابع  $f \in X$  می‌تواند بر حسب پایه ALP به صورت

$$f(x) \cong \bar{f}(x) = \Psi^T(x)F, \quad (11-2)$$

تقریب زده شود که در آن

$$F = [f_0, f_1, \dots, f_n]^T,$$

بردار ضریب ALP تابع  $f$  است. همچنین هر تابع  $r \in \mathcal{L}^2(I \times I)$  به طور مشابه می‌تواند بر حسب پایه ALP به صورت

$$r(x, t) \cong \bar{r}(x, t) = \Psi^T(x)R\Psi(t), \quad (12-2)$$

بسط داده شود که در آن  $R = [r_{ij}]_{i,j=0}^n$  یک ماتریس  $(n+1) \times (n+1)$  است که در آن ضرایب  $r_{ij}$  از رابطه

$$r_{ij} = \frac{\langle r, \mathcal{P}_{ni} \rangle \langle \mathcal{P}_{nj} \rangle}{\langle \mathcal{P}_{ni}, \mathcal{P}_{ni} \rangle \langle \mathcal{P}_{nj}, \mathcal{P}_{nj} \rangle} = (2i + 1)(2j + 1) \langle \langle r, \mathcal{P}_{ni} \rangle, \mathcal{P}_{nj} \rangle, \quad i, j = 0, 1, \dots, n, \quad (13-2)$$

محاسبه می‌شوند.

با بحثی مشابه با آنچه در حالت تک متغیره انجام شد می‌توان نشان داد که تابع  $\bar{r}$  بهترین تقریب یکتا برای تابع  $r \in \mathcal{L}^2(I \times I)$  در فضای

$$X_n^2 = \text{span}\{\mathcal{P}_{ni}(x)\mathcal{P}_{nj}(t)\}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n,$$

است [19, Theorem 6.2-5]. شایان ذکر است که قاعده انتگرال‌گیری عددی گاوسی جایگزین (۷-۲)-(۹-۲) و قاعده ضربی متناظرش می‌توانند به ترتیب در محاسبه انتگرال‌های موجود در (۱۰-۲) و (۱۳-۲) به کار روند.

### ۳-۲ ماتریس‌های عملیاتی انتگرال‌گیری و حاصل ضرب

در این بخش، ماتریس‌های عملیاتی انتگرال‌گیری و حاصل ضرب ALP را به دست می‌آوریم. برای این کار به دو لم زیر نیاز داریم.

لم ۱-۲. فرض کنید  $\mathcal{P}_{nk}(x) = \sum_{r=k}^n p_r^{(k)} x^r$  و  $\mathcal{P}_{nj}(x) = \sum_{r=j}^n p_r^{(j)} x^r$  به ترتیب  $k$ -امین و  $j$ -امین چندجمله‌ای لژاندر جایگزین باشند که در آن  $p_r^{(k)} = (-1)^{r-k} \binom{n-k}{r-k} \binom{n+r+1}{n-k}$  در این صورت حاصل ضرب آنها یک چندجمله‌ای از درجه  $2n$  است که می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$Q_{2n}^{(k,j)} = \mathcal{P}_{nk}(x)\mathcal{P}_{nj}(x) = \sum_{r=k+j}^{2n} q_r^{(k,j)} x^r, \quad q_r^{(k,j)} = \sum_{l=\max\{r-n, v_2\}}^{\min\{r-v_1, n\}} p_l^{(v_2)} p_{r-l}^{(v_1)},$$

که در آن  $v_2 = \max\{j, k\}$  و  $v_1 = \min\{j, k\}$

□

اثبات: از رابطه (۱-۲) به راحتی نتیجه می‌شود.

لم ۲-۲. فرض کنید  $r$  یک عدد صحیح نامنفی باشد. در این صورت

$$\int_0^1 x^r \mathcal{P}_{nk}(x) dx = \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^l \binom{n-k}{l} \binom{n+k+l+1}{n-k}}{k+l+r+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

اثبات: از رابطه (۱-۲) داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^r \mathcal{P}_{nk}(x) dx &= \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^l \binom{n-k}{l} \binom{n+k+l+1}{n-k} \int_0^1 x^{k+l+r} dx \\ &= \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^l \binom{n-k}{l} \binom{n+k+l+1}{n-k}}{k+l+r+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

لم ۳-۲. فرض کنید  $\mathcal{P}_{nk}$  و  $\mathcal{P}_{nj}$ ،  $\mathcal{P}_{ni}$  به ترتیب  $i$ -امین،  $j$ -امین و  $k$ -امین چندجمله‌ای لژاندر جایگزین باشند. اگر طبق

لم ۱-۲ تعریف کنیم  $\mathcal{P}_{nk}(x)\mathcal{P}_{nj}(x) = \sum_{r=k+j}^{2n} q_r^{(k,j)} x^r$ ، آن‌گاه

$$\int_0^1 \mathcal{P}_{ni}(x)\mathcal{P}_{nj}(x)\mathcal{P}_{nk}(x) dx = \sum_{r=k+j}^{2n} q_r^{(k,j)} \sum_{l=0}^{n-i} \frac{(-1)^l \binom{n-i}{l} \binom{n+i+l+1}{n-i}}{i+l+r+1}.$$

اثبات: با ترکیب لم‌های ۱-۲ و ۲-۲ داریم:

$$\int_0^1 \mathcal{P}_{ni}(x)\mathcal{P}_{nj}(x)\mathcal{P}_{nk}(x) dx = \sum_{r=k+j}^{2n} q_r^{(k,j)} \int_0^1 x^r \mathcal{P}_{ni}(x) dx = \sum_{r=k+j}^{2n} q_r^{(k,j)} \sum_{l=0}^{n-i} \frac{(-1)^l \binom{n-i}{l} \binom{n+i+l+1}{n-i}}{i+l+r+1}.$$

در ادامه ماتریس عملیاتی انتگرال گیری ALP را به دست می آوریم. با انتگرال گیری از  $\mathcal{P}_{nk}(x)$  از 0 تا  $x$  به آسانی می توان دید که

$$\int_0^x \mathcal{P}_{nk}(x) dx = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j \binom{n-k}{j} \binom{n+k+j+1}{n-k} x^{k+j+1}}{k+j+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

حال با استفاده از رابطه (۱۱-۲)، می توان  $x^{k+j+1}$  را بر حسب ALPs به صورت

$$x^{k+j+1} \cong \sum_{r=0}^n b_{kjr} \mathcal{P}_{nr}(x),$$

تقریب زد که در آن، با استفاده از رابطه (۱۰-۲) و لم ۲-۲ داریم

$$b_{kjr} = (2r+1) \int_0^1 x^{k+j+1} \mathcal{P}_{nr}(x) dx = (2r+1) \sum_{l=0}^{n-r} \frac{(-1)^l \binom{n-r}{l} \binom{n+r+l+1}{n-i}}{k+r+l+j+2}.$$

بنابراین

$$\int_0^x \mathcal{P}_{nk}(x) dx \cong \sum_{r=0}^n p_{kr} \mathcal{P}_{nr}(x),$$

که در آن

$$p_{kr} = (2r+1) \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j \binom{n-k}{j} \binom{n+k+j+1}{n-k}}{k+j+1} \sum_{l=0}^{n-r} \frac{(-1)^l \binom{n-r}{l} \binom{n+r+l+1}{n-i}}{k+r+l+j+2}.$$

حال با تغییر  $k$  از 0 تا  $n$ ، انتگرال بردار  $\Psi(x)$  را می توان به صورت زیر تقریب زد:

$$\int_0^x \Psi(t) dt \cong P \Psi(x), \quad x \in I, \quad (14-2)$$

که در آن  $P = [p_{kr}]_{k,r=0}^n$  ماتریس عملیاتی انتگرال گیری ALP از مرتبه  $(n+1) \times (n+1)$  نامیده می شود.

همچنین ما نیاز داریم حاصل ضرب  $\Psi(x)$  و  $\Psi^T(x)$ ، که ماتریس ضرب ALPs نامیده می شود، را نیز محاسبه کنیم. برای این منظور، فرض کنید  $V = [v_0, v_1, \dots, v_n]$  یک بردار دلخواه در  $\mathbb{R}^{n+1}$  باشد. در این صورت داریم:

$$\Psi(x) \Psi^T(x) V = \left[ \sum_{j=0}^n v_j \mathcal{P}_{n0}(x) \mathcal{P}_{nj}(x), \sum_{j=0}^n v_j \mathcal{P}_{n1}(x) \mathcal{P}_{nj}(x), \dots, \sum_{j=0}^n v_j \mathcal{P}_{nn}(x) \mathcal{P}_{nj}(x) \right]^T. \quad (15-2)$$

با استفاده از رابطه (۱۱-۲) می توان  $\mathcal{P}_{ni}(x) \mathcal{P}_{nj}(x)$  را، برای  $i, j = 0, 1, \dots, n$ ، بر حسب ALPs به صورت

$$\mathcal{P}_{ni}(x) \mathcal{P}_{nj}(x) \cong \sum_{k=0}^n a_{ijk} \mathcal{P}_{ni}(x) \mathcal{P}_{nk}(x),$$



تقریب زد که در آن، با استفاده از رابطه (۲-۱۰)، داریم:

$$\frac{1}{2k+1} a_{ijk} = \int_0^1 \mathcal{P}_{ni}(x) \mathcal{P}_{nj}(x) \mathcal{P}_{nk}(x) dx := \varrho_{ijk}.$$

بنابراین، برای هر  $i = 0, 1, \dots, n$  داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n v_j \mathcal{P}_{ni}(x) \mathcal{P}_{nj}(x) &\cong \sum_{j=0}^n v_j \sum_{k=0}^n (2k+1) \varrho_{ijk} \mathcal{P}_{nk}(x) = \sum_{k=0}^n \left( (2k+1) \sum_{j=0}^n v_j \varrho_{ijk} \right) \mathcal{P}_{nk}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \hat{v}_{ik} \mathcal{P}_{nk}(x). \end{aligned} \tag{۱۶-۲}$$

از جایگذاری (۱۶-۲) در (۱۵-۲) نتیجه می‌شود:

$$\Psi(x) \Psi^T(x) V \cong \hat{V} \Psi(x), \tag{۱۷-۲}$$

که در آن

$$\hat{V} = [\hat{v}_{ik}]_{i,k=0}^n, \quad \hat{v}_{ik} = (2k+1) \sum_{j=0}^n v_j \varrho_{ijk}. \tag{۱۸-۲}$$

$\hat{V}$  ماتریس عملیاتی حاصل ضرب متناظر با  $V$  برای ALPs نامیده می‌شود. این ماتریس در بخش بعد، موقعی که می‌خواهیم حل معادله انتگرال (۷-۱) را به حل یک مجموعه از معادلات جبری کاهش دهیم، از اهمیت زیادی برخوردار است. باید توجه کرد که مقادیر  $\varrho_{ijk}$  در (۱۸-۲) با استفاده از لم ۲-۳ محاسبه می‌شوند.

### ۳. حل عددی VFIEs غیرخطی مرتبه اول

در این بخش معادله (۳-۱) را همراه با فرض (۶-۱) در نظر می‌گیریم. همان‌طور که در بخش ۱ نشان داده شد این مسأله می‌تواند به معادلات (۷-۱)-(۹-۱) تقلیل یابد. اگر توابع  $u$  و  $u^{pi}$  و  $r_i$ ،  $i = 1, 2$ ، طبق روابط (۲-۱۱) و (۲-۱۲)، بر حسب ALPs تقریب زده شوند آن‌گاه داریم:

$$u(x) \cong \Psi^T(x) U, \tag{۱-۳}$$

$$u^{pi}(x) \cong \Psi^T(x) U^{(pi)}, \quad i = 1, 2, \tag{۲-۳}$$

$$r_i(x, t) \cong \Psi^T(x) R_i \Psi(t), \quad i = 1, 2, \tag{۳-۳}$$

که در آن بردارهای  $U$  و  $U^{(pi)}$  و ماتریس‌های  $R_i$ ، به ترتیب بردارهای ضریب ALP برای توابع  $u$  و  $u^{pi}$  و  $r_i$  هستند.

برای پیاده‌سازی عددی روش، نیاز داریم که مؤلفه‌های بردارهای  $U^{(pi)}$  را به صورت توابعی غیرخطی از مؤلفه‌های بردار  $U$  تقریب بزنیم. برای این کار، با استفاده از تخمین‌های (۳-۲)، (۳-۱) و (۲-۱۷) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \left( \int_0^1 \Psi(x) \Psi^T(x) dx \right) U^{(p_i)} &= \int_0^1 \Psi(x) \Psi^T(x) U^{(p_i)} dx \cong \int_0^1 \Psi(x) u^{p_i}(x) dx \\ &\cong \int_0^1 \Psi(x) \left( \Psi^T(x) U \right)^{p_i} dx = \int_0^1 \overbrace{\left( \Psi(x) \Psi^T(x) U \right)}^{\cong \widehat{U} \Psi(x)} \left( \Psi^T(x) U \right)^{p_i-1} dx \\ &\cong \widehat{U} \int_0^1 \Psi(x) \left( \Psi^T(x) U \right)^{p_i-1} dx = \widehat{U} \int_0^1 \overbrace{\left( \Psi(x) \Psi^T(x) U \right)}^{\cong \widehat{U} \Psi(x)} \left( \Psi^T(x) U \right)^{p_i-2} dx \\ &= (\widehat{U})^2 \int_0^1 \Psi(x) \left( \Psi^T(x) U \right)^{p_i-2} dx = \dots = (\widehat{U})^{p_i} \int_0^1 \Psi(x) dx, \end{aligned}$$

که در آن  $\widehat{U}$  ماتریس عملیاتی حاصل ضرب ALP متناظر با  $U$  است که در (۲-۱۷) معرفی شد. از طرف دیگر با استفاده از رابطه (۲-۳) داریم:

$$\int_0^1 \Psi(x) dx = \left[ \underbrace{\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}}_{\text{بار}(n+1)} \right]^T = \frac{1}{n+1} \mathbf{1},$$

که در آن  $\mathbf{1}$  نشان دهنده یک بردار  $(n+1)$ -تایی از یک‌ها است. بنابراین

$$DU^{(p_i)} \cong \frac{1}{n+1} (\widehat{U})^{p_i} \mathbf{1},$$

که در آن

$$D = \int_0^1 \Psi(x) \Psi^T(x) dx = \text{diag} \left\{ \frac{1}{2i+1} \right\}_{i=0}^n. \quad (۴-۳)$$

چون  $D$  یک ماتریس وارون پذیر است لذا داریم:

$$U^{(p_i)} \cong \frac{1}{n+1} D^{-1} (\widehat{U})^{p_i} \mathbf{1}, \quad i = 1, 2, \quad (۵-۳)$$

که این رابطه، مؤلفه‌های بردارهای  $U^{(p_i)}$  را به صورت توابعی غیرخطی از مؤلفه‌های بردار  $U$  تقریب می‌زند.

حال با استفاده از روابط (۳-۲)، (۳-۳)، (۲-۳)، (۲-۳)، (۳-۳)، (۱۴-۲)، (۱۷-۲) و (۴-۳)، بخش‌های ولترا و فردهلم رابطه (۲-۷) می‌توانند به ترتیب به صورت زیر نوشته شوند:

(۶-۳)

$$\begin{aligned} \int_0^x r_1(x, t) u^{p_1}(t) dt &\cong \int_0^x \Psi^T(x) R_1 \Psi(t) \Psi^T(t) U^{(p_1)} dt = \Psi^T(x) R_1 \int_0^x \Psi(t) \Psi^T(t) U^{(p_1)} dt \\ &\cong \Psi^T(x) R_1 \int_0^x \widehat{U^{(p_1)}} \Psi(t) dt = \Psi^T(x) R_1 \widehat{U^{(p_1)}} \int_0^x \Psi(t) dt \\ &\cong \Psi^T(x) R_1 \widehat{U^{(p_1)}} P \Psi(x), \end{aligned}$$

۹

(۷-۳)

$$\int_0^1 r_2(x, t) u^{p_2}(t) dt \cong \int_0^1 \Psi^T(x) R_2 \Psi(t) \Psi^T(t) U^{(p_2)} dt = \Psi^T(x) R_2 \left( \int_0^1 \Psi(t) \Psi^T(t) dt \right) U^{(p_2)}$$

$$= \Psi^T(x) R_2 D U^{(p_2)},$$

که در آن  $P$  ماتریس عملیاتی انتگرال‌گیری ALP معرفی شده در (۱۴-۲) است،  $\widehat{U}^{(p_1)}$  ماتریس عملیاتی حاصل ضرب ALP متناظر با  $U^{(p_1)}$  است که در (۱۷-۲) معرفی شد و  $D$  ماتریس قطری داده شده در (۴-۳) است. با جایگذاری تقریب‌های (۱-۳)، (۶-۳) و (۷-۳) در معادله (۷-۱) داریم:

$$\Psi^T(x) U^{(p_1)} \cong h(x) + \Psi^T(x) R_1 \widehat{U}^{(p_1)} P \Psi(x) + \Psi^T(x) R_2 D U^{(p_2)}. \quad (۸-۳)$$

حال فرض کنید

$$S_n = \left\{ x_l = \frac{2l+1}{2(n+1)}, l = 0, 1, \dots, n \right\}, \quad (۹-۳)$$

مجموعه نقاط هم‌محلی نیوتن-کاتس باشد ( $n+1$ ) نقطه هم‌فاصله در بازه  $(0,1)$ . هم‌محل کردن معادله (۸-۳) در نقاط (۹-۳) معادله زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\Psi^T(x_l) U^{(p_1)} \cong h(x_l) + \Psi^T(x_l) R_1 \widehat{U}^{(p_1)} P \Psi(x_l) + \Psi^T(x_l) R_2 D U^{(p_2)}, \quad l = 0, 1, \dots, n. \quad (۱۰-۳)$$

چون  $U^{(p_1)}$  و  $U^{(p_2)}$  بردارهایی ستونی هستند که مؤلفه‌های آنها توابعی غیرخطی از مؤلفه‌های بردار مجهول  $U = [u_i]_{i=0}^n$  هستند، بنابراین معادله (۱۰-۳) یک مجموعه از  $(n+1)$  معادله جبری غیرخطی بر حسب  $(n+1)$  مجهول  $u_0, u_1, \dots, u_n$  است. این دستگاه غیرخطی از معادلات جبری می‌تواند با روش‌های عددی مانند روش تکراری نیوتن حل شود. اگر  $\bar{U}$  یک جواب این دستگاه باشد آن‌گاه  $\bar{u}_n(x) = \Psi^T(x) \bar{U}$  یک جواب تقریبی معادله (۱-۱) است. در حالت کلی حل‌پذیری دستگاه (۱۰-۳) یک مسأله پیچیده است و ما نتوانستیم وجود و یکتایی یک جواب برای این دستگاه را ثابت کنیم، اما محاسبات عددی ما نشان می‌دهند که این دستگاه برای مسائل زیادی حل‌پذیر است و جواب آن را می‌توان با روش‌های تکراری کلاسیک به خوبی تقریب زد. در مثال‌های عددی در فصل ۵ ما از تابع  $FindRoot$  در نرم افزار ممتیکا، که به طور پیش فرض روش نیوتن را به کار می‌برد، برای حل این دستگاه استفاده کرده‌ایم و در همه حالت‌ها این تابع در پیدا کردن یک جواب تقریبی دقیق برای دستگاه (۱۰-۳) موفق بوده است.

#### ۴. تحلیل خطا

فرض کنید  $C^m(I)$  فضای توابع  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  با مشتقات پیوسته

$$f^{(i)}(x) = \frac{d^i}{dx^i} f(x), \quad x \in I, i = 0, 1, \dots, m,$$

و  $C^{m,p}(I \times I)$  فضای توابع  $\mathbb{R} \rightarrow I \times I$  با مشتقات جزئی پیوسته

$$f^{(i,j)}(x,t) = \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial t^j} f(x,t), \quad (x,t) \in I \times I, i = 0,1, \dots, m, j = 0,1, \dots, p,$$

باشد. قضیه زیر به ما کمک می‌کند تا یک کران بالا برای خطای  $\|u - \bar{u}_n\|_2$  بین جواب دقیق  $u$  از مسأله (۱-۱) و تقریب آن یعنی  $\bar{u}_n$ ، که با روش ارائه شده در بخش ۳ به دست آمده است، پیدا کنیم.

**قضیه ۱-۴.** فرض کنید  $f \in C^{n+1}(I)$  و  $\bar{f}$  تقریب آن بر حسب ALPs، همان‌گونه که در رابطه (۱-۲) توصیف شد، باشد. در این صورت

$$\|f - \bar{f}\|_2 \leq \frac{M}{(n+1)! 2^{2n+1}}, \quad (1-4)$$

که در آن  $M$  یک ثابت است به طوری که

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M, \quad \forall x \in I.$$

**اثبات.** فرض کنید  $p_n$  چندجمله‌ای درونیاب  $f$  در نقاط  $z_l$  باشد که در آن  $z_l$  با ازای  $l = 0, 1, \dots, n$ ، صفرهای چندجمله‌ای چبیشف انتقال یافته از درجه  $(n+1)$  در  $I$  باشد. در این صورت، برای هر  $x \in I$  داریم [۱۶]:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{l=0}^n (x - z_l), \quad \xi_x \in I.$$

با توجه به تخمین‌های موجود برای نقاط درونیابی چبیشف [16]، به دست می‌آوریم:

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)! 2^{2n+1}}, \quad x \in I.$$

همان‌گونه که در بخش ۲-۲ نشان داده شد،  $\bar{f}$  بهترین تقریب یکنای  $f$  در  $X_n$  است، بنابراین داریم:

$$(2-4)$$

$$\|f - \bar{f}\|_2^2 \leq \|f - p_n\|_2^2 = \int_0^1 |f(x) - p_n(x)|^2 dx \leq \int_0^1 \left( \frac{M}{(n+1)! 2^{2n+1}} \right)^2 dx = \left( \frac{M}{(n+1)! 2^{2n+1}} \right)^2.$$

حال با جذر گرفتن از طرفین رابطه (۲-۴) نتیجه مورد نظر به دست می‌آید.

**نتیجه ۱-۴.** فرض کنید  $f \in C^\infty(I)$  و  $\bar{f}$  تقریب آن بر حسب ALPs باشد. در این صورت

$$\|f - \bar{f}\|_2 = O\left(\frac{1}{(n+1)! 2^{2n+1}}\right).$$

اثبات. چون  $f \in C^\infty(I)$ ، بنابراین ثابت  $M$  وجود دارد به طوری که

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, \forall x \in I.$$

بنابراین

$$\|f - \bar{f}\|_2 \leq \frac{M}{(n+1)! 2^{2n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}.$$

قضیه ۴-۲. فرض کنید  $g(x) = \sum_{k=0}^n g_k \mathcal{P}_{nk}(x)$  و  $h(x) = \sum_{k=0}^n h_k \mathcal{P}_{nk}(x)$  دو تابع از فضای  $X_n$  باشند. در این صورت

$$\|g - h\|_2 \leq \alpha_n \|G - H\|_2, \quad \alpha_n = \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \right)^{\frac{1}{2}},$$

که در آن  $G$  و  $H$  بردارهایی  $(n+1)$ -تایی هستند و، به ترتیب، ضرایب ALP توابع  $g$  و  $h$  با مؤلفه‌های  $g_k$  و  $h_k$  هستند. نرم موجود در سمت راست رابطه بالا، همان نرم اقلیدسی مرسوم برای بردارها است.

اثبات. می‌توان نوشت

(۳-۴)

$$\begin{aligned} \|g - h\|_2^2 &= \int_0^1 |g(x) - h(x)|^2 dx = \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^n (g_k - h_k) \mathcal{P}_{nk}(x) \right|^2 dx \leq \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^n |g_k - h_k|^2 \right) \left( \sum_{k=0}^n |\mathcal{P}_{nk}(x)|^2 \right) dx \\ &= \left( \sum_{k=0}^n |g_k - h_k|^2 \right) \left( \sum_{k=0}^n \int_0^1 |\mathcal{P}_{nk}(x)|^2 dx \right) = \|G - H\|_2^2 \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \right). \end{aligned}$$

حال با جذر گرفتن از طرفین رابطه (۳-۴) نتیجه مورد نظر به دست می‌آید.

قضیه‌های ۴-۱ و ۴-۲ به صورت زیر می‌توانند به حالت دو بعدی تعمیم یابند.

قضیه ۴-۳. فرض کنید  $\bar{r}(x, t) = \Psi^T(x) R \Psi(t)$  و  $r \in C^{n+1, n+1}(I \times I)$  بر حسب ALPs باشد. در این صورت

$$\|r - \bar{r}\|_2 \leq \frac{1}{(n+1)! 2^{2n+1}} \left( M_1 + M_2 + \frac{M_3}{(n+1)! 2^{2n+1}} \right),$$

که در آن  $M_1, M_2$  و  $M_3$  ثابت‌هایی هستند که در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\max_{(x,t) \in I \times I} \left| \frac{\partial^{n+1} r(x,t)}{\partial x^{n+1}} \right| \leq M_1, \max_{(x,t) \in I \times I} \left| \frac{\partial^{n+1} r(x,t)}{\partial t^{n+1}} \right| \leq M_2, \max_{(x,t) \in I \times I} \left| \frac{\partial^{2n+21} r(x,t)}{\partial x^{n+1} \partial t^{n+1}} \right| \leq M_3.$$

**اثبات.** فرض کنید  $p_{n,n}$  چندجمله‌ای درونیاب  $r$  در نقاط  $(z_l, t_m)$  باشد که در آن  $z_l = t_l$  به ازای  $l = 0, 1, \dots, n$  سفرهای چندجمله‌ای چبیشف انتقال یافته از درجه  $(n+1)$  در  $I$  باشند. در این صورت، برای هر  $(x, t) \in I \times I$  داریم [۱۵].

$$\begin{aligned} & r(x, t) - p_{n,n}(x, t) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} r(\xi, t)}{\partial x^{n+1}} \prod_{l=0}^n (x - z_l) + \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} r(x, \eta)}{\partial t^{n+1}} \prod_{m=0}^n (t - t_m), \\ & - \frac{1}{(n+1)!^2} \frac{\partial^{2n+2} r(\xi', \eta')}{\partial x^{n+1} \partial t^{n+1}} \prod_{l=0}^n (x - z_l) \prod_{m=0}^n (t - t_m), \quad \xi, \eta, \xi', \eta' \in I. \end{aligned}$$

بنابراین، با توجه به تخمین‌های موجود برای نقاط درونیابی چبیشف [۱۶]، به دست می‌آوریم:

$$|r(x, t) - p_{n,n}(x, t)| \leq \frac{1}{(n+1)! 2^{2n+1}} \left( M_1 + M_2 + \frac{M_3}{(n+1)! 2^{2n+1}} \right).$$

بقیه اثبات به شیوه‌ای مشابه با آنچه در قضیه ۴-۱ آمد ادامه می‌یابد.

**نتیجه ۴-۲.** فرض کنید  $r \in C^{\infty \times \infty}(I \times I)$  و  $\bar{r}$  تقریب آن بر حسب ALPs باشد. در این صورت

$$\|r - \bar{r}\|_2 = \mathcal{O} \left( \frac{1}{(n+1)! 2^{2n+1}} \right).$$

**اثبات.** اثبات مشابه با آنچه در نتیجه ۴-۱ آمد انجام می‌شود.

**قضیه ۴-۴.** فرض کنید  $r(x, t) = \sum_{i,j=0}^n r_{ij} \mathcal{P}_{ni}(x) \mathcal{P}_{nj}(t)$  و  $s(x, t) = \sum_{i,j=0}^n s_{ij} \mathcal{P}_{ni}(x) \mathcal{P}_{nj}(t)$  دو تابع از فضای  $X_n^2$  باشند. در این صورت

$$\|r - s\|_2 \leq \alpha_n^2 \|R - S\|_F,$$

که در آن  $R$  و  $S$  ماتریس‌هایی  $(n+1) \times (n+1)$  هستند که درایه‌های آنها به ترتیب  $r_{ij}$ ‌ها و  $s_{ij}$ ‌ها هستند. نرم موجود در سمت راست رابطه بالا همان نرم فروبنیوس مرسوم برای ماتریس‌ها است.

**اثبات.** اثبات مشابه با آنچه در قضیه ۴-۲ آمد انجام می‌شود.

حال فرض کنید  $T_n$  چندجمله‌ای چبیشف نوع اول از مرتبه  $n$  باشد. برای یک تابع مفروض  $f$  اگر  $f'$  روی بازه  $[-1,1]$  پیوسته باشد، یا این که تعداد متناهی پرش کراندار داشته باشد، آنگاه  $f(x)$ ، برای هر  $x \in [-1,1]$  می‌تواند با یک سری همگرا به صورت

$$f(x) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j T_j(x), \quad (۴-۴)$$

نمایش داده شود [20, p. 309] که در آن

$$c_j = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_j(x)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} dx.$$

قضیه بعدی شرایط همگرایی بسط‌های چبیشف به توابع با مشتقات پیوسته را بیان می‌کند.

**قضیه ۴-۵.** [16, Theorem 3.12] اگر  $m$  یک عدد متناهی باشد و تابع  $f$  دارای  $m+1$  مشتق پیوسته روی  $[-1,1]$  باشد آن‌گاه  $|f(x) - S_n(x)| = \mathcal{O}(n^{-m})$  برای هر  $x \in [-1,1]$  زمانی که  $n \rightarrow \infty$  که در آن  $S_n(x) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{j=1}^n c_j T_j(x)$  است.

برای هر تابع  $f$ ، قرار دهید  $\varepsilon_n(f) := \|f - P_n[f]\|_{\infty}$  که در آن  $P_n[f]$  چندجمله‌ای تقریب  $f$  از درجه  $n$  بر حسب ALPs است. در قضیه زیر یک کران بالا برای خطای  $\|u - \bar{u}_n\|_{\infty}$  پیدا می‌کنیم که در آن  $u$  جواب دقیق و  $\bar{u}_n$  جواب تقریبی معادله (۷-۱) است (که با روش ارائه شده در بخش ۳ به دست آمده است).

**قضیه ۴-۶.** فرض کنید  $u$  جواب دقیق معادله (۷-۱) و  $\bar{u}_n$  جواب تقریبی آن باشد که با روش ارائه شده در بخش ۳ محاسبه شده است و

$$(۵-۴)$$

- (1)  $|u^{p_i}(x)| \leq \rho_i, \quad i = 1, 2, \forall x \in [0,1],$
- (2)  $|r_i(x, t)| \leq \bar{r}_i, \quad i = 1, 2, \forall x \in [0,1] \times [0,1],$
- (3)  $\exists L_i > 0: |u_1^{p_i} - u_2^{p_i}| \leq L_i |u_1 - u_2|, \quad i = 1, 2,$
- (4)  $\sum_{i=1}^2 L_i (\bar{r}_i + \varepsilon_n(r_i)) < 1.$

در این صورت داریم:

$$\|u - \bar{u}_n\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon_n(h) + \sum_{i=1}^2 \rho_i \varepsilon_n(r_i)}{1 - \sum_{i=1}^2 L_i (\bar{r}_i + \varepsilon_n(r_i))}. \quad (۶-۴)$$

**اثبات.** فرض کنید تابع پیشرو  $h$  و هسته‌های  $r_i$  با استفاده از چندجمله‌ای‌های لژاندر جایگزین و به ترتیب با روابط (۲-۱۱) و (۲-۱۲) تقریب زده شده‌اند. در این صورت جواب محاسبه شده یک چندجمله‌ای تقریبی مانند  $\bar{u}_n$  است و داریم:

(۷-۴)

$$\begin{aligned}
|u(x) - \bar{u}_n(x)| &= \left| h(x) - h_n(x) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^x (r_1(x,t)u^{p_1}(t) - r_{1n}(x,t)\bar{u}_n^{p_1}(t)) dt + \int_0^1 (r_2(x,t)u^{p_2}(t) - r_{2n}(x,t)\bar{u}_n^{p_2}(t)) dt \right| \\
&\leq |h(x) - h_n(x)| + \int_0^x |r_1(x,t)u^{p_1}(t) - r_{1n}(x,t)\bar{u}_n^{p_1}(t)| dt \\
&\quad + \int_0^1 |r_2(x,t)u^{p_2}(t) - r_{2n}(x,t)\bar{u}_n^{p_2}(t)| dt.
\end{aligned}$$

از طرف دیگر، به ازای  $i = 1, 2$ ، با استفاده از فرض‌های (۱)-(۳) به دست می‌آوریم:

(۸-۴)

$$\begin{aligned}
|r_i(x,t)u^{p_i}(t) - r_{in}(x,t)\bar{u}_n^{p_i}(t)| &= |r_i(x,t)(u^{p_i}(t) - \bar{u}_n^{p_i}(t)) + (r_i(x,t) - r_{in}(x,t))\bar{u}_n^{p_i}(t)| \\
&\leq |r_i(x,t)||u^{p_i}(t) - \bar{u}_n^{p_i}(t)| + |r_i(x,t) - r_{in}(x,t)||\bar{u}_n^{p_i}(t)| \\
&\leq \bar{r}_i L_i \|u - \bar{u}_n\|_\infty + \varepsilon_n(r_i)(|u^{p_i}(t) - \bar{u}_n^{p_i}(t)| + |u^{p_i}(t)|) \\
&\leq L_i(\bar{r}_i + \varepsilon_n(r_i))\|u - \bar{u}_n\|_\infty + \rho_i \varepsilon_n(r_i).
\end{aligned}$$

با ترکیب (۷-۴) و (۸-۴)، و با توجه به این‌که  $x \in [0,1]$ ، به دست می‌آوریم:

$$\|u - \bar{u}_n\|_\infty \leq \varepsilon_n(h) + \|u - \bar{u}_n\|_\infty \sum_{i=1}^2 L_i(\bar{r}_i + \varepsilon_n(r_i)) + \sum_{i=1}^2 \rho_i \varepsilon_n(r_i).$$

در نهایت، با استفاده از فرض (۴)، نتیجه به دست می‌آید.

می‌دانیم که کوچک بودن مانده یک شرط لازم برای کوچک بودن خطا است [12, p. 172]. در قضیه زیر، یک کران بالا برای تابع مانده متناظر با معادله (۷-۴) در نرم  $L_\infty$  به دست می‌آوریم.

**قضیه ۷-۴.** فرض کنید جواب دقیق  $u$  از (۷-۱)، دارای  $m+1$  مشتق پیوسته در بازه  $[0,1]$  باشد که در آن  $m$  یک عدد صحیح متناهی است. تابع مانده  $R_n$  را به صورت

$$R_n(x) = h(x) + \int_0^x r_1(x,t) \bar{u}_n^{p_1}(t) dt + \int_0^1 r_2(x,t) \bar{u}_n^{p_2}(t) dt - \bar{u}_n^{p_1}(x), \quad x \in [0,1], \quad (9-4)$$

در نظر بگیرید که در آن  $\bar{u}_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} \mathcal{P}_{nk}(x)$  جواب به دست آمده برای معادله (۷-۱) با روش ارائه شده است. اگر  $M_i = \|r_i\|_\infty < \infty$  به ازای  $i = 1, 2$ ، و عبارتهای غیرخطی  $u^{p_1}$  و  $u^{p_2}$  در شرایط لیپ شیتز (۵-۴) صدق کنند، آن‌گاه  $|R_n(x)| = \mathcal{O}(n^{-m})$  برای هر  $x \in [0,1]$  وقتی  $n \rightarrow \infty$



اثبات. با افزودن (۹-۴) به (۷-۱) داریم:

$$|R_n(x)| \leq (1 + L_1 M_1 + L_2 M_2) \|u(x) - \bar{u}_n(x)\|_\infty, \quad x \in [0,1]. \quad (۱۰-۴)$$

با استفاده از رابطه (۳-۳) در [16, p. 59]،  $\bar{u}_n(x)$  می‌تواند بر حسب چندجمله‌ای‌های چبیشف به صورت

$$\bar{u}_n(x) = \sum_{k=0}^n b_{n,k} T_k(x),$$

بسط داده شود که در آن  $b_{n,k}$ ها، به ازای  $k = 0, 1, \dots, n$  می‌توانند بر حسب  $a_{n,k}$ ها بیان شوند. بنابراین از قضیه (۴-۵) نتیجه می‌شود  $|u(x) - \bar{u}_n(x)| = O(n^{-m})$  برای هر  $x \in [0,1]$  وقتی  $n \rightarrow \infty$  که همراه با (۱۰-۴) اثبات را کامل می‌کنند.

از قضیه ۷-۴ می‌توان نتیجه گرفت که اگر  $m$  بزرگ باشد آن‌گاه تابع مانده  $R_n$  کران و نوسان‌های کوچک دارد.

## ۵. مثال‌های عددی

برای نشان دادن دقت و کارایی روش ارائه شده، این روش را روی چند مثال عددی که از مراجع مختلف انتخاب شده‌اند اجرا می‌کنیم. بنابراین نتایج عددی به دست آمده در اینجا می‌توانند با نتایج به دست آمده از روش‌های دیگر مقایسه شود. به منظور نشان دادن خطای روش، تابع خطای  $\bar{e}_n$  را با رابطه

$$\bar{e}_n(x) = u(x) - \bar{u}_n(x), \quad x \in [0,1],$$

معرفی می‌کنیم که در آن  $u$  جواب دقیق مسأله و  $\bar{u}_n$  جواب تقریبی است که با استفاده از روش ارائه شده به دست آمده است. همچنین نرم‌های  $L_\infty$  و  $L_2$  خطا را به ترتیب با روابط

$$\|\bar{e}_n\|_\infty = \max_{l=0,1,\dots,n} \{|\bar{e}_n(x_l)|\},$$

و

$$\|\bar{e}_n\|_2 = \left( \int_0^1 |\bar{e}_n(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

تعریف می‌کنیم که در آن  $x_l$  به ازای  $l = 0, 1, \dots, n$  نقاط هم‌محلی هستند که با رابطه (۳-۹) تعریف شده‌اند.

نتایج عددی در یک کامپیوتر شخصی با پردازنده 2.50 GHz انجام شده‌اند و کدهای کامپیوتری در نرم‌افزار ممتیکا<sup>۱۹</sup> نوشته شده‌اند.

**مثال ۵-۱.** [۴، ۲۷] برای معادله انتگرال ولترا غیرخطی نوع اول

$$\int_0^x e^{x-t} u^2(t) dt = e^{2x} - e^x, \quad x \in [0,1], \quad (۱-۵)$$

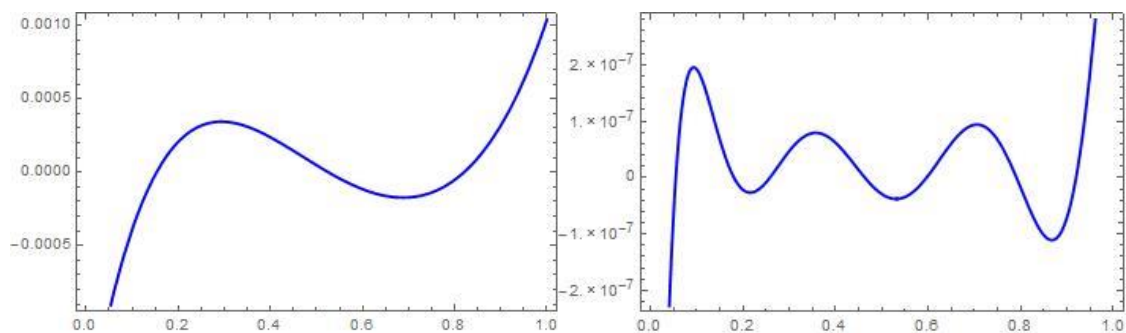
جواب دقیق  $u(x) = e^x$  است.

<sup>۱</sup> Mathematica 9

جدول ۱. مقایسه خطاها برای مثال ۵-۱.

روش‌ها	$\ \bar{e}_n\ _\infty$	$\ \bar{e}_n\ _2$
روش توابع هار [27]		
$2M = 8$	$2.8 \times 10^{-4}$	—
$2M = 16$	$7.3 \times 10^{-4}$	—
$2M = 32$	$1.8 \times 10^{-4}$	—
$2M = 64$	$4.6 \times 10^{-5}$	—
$2M = 128$	$1.1 \times 10^{-5}$	—
$2M = 256$	$2.9 \times 10^{-6}$	—
$2M = 512$	$7.3 \times 10^{-7}$	—
$2M = 1024$	$1.8 \times 10^{-7}$	—
روش ارائه شده		
$n = 1$	$1.907 \times 10^{-2}$	$7.089 \times 10^{-2}$
$n = 2$	$1.369 \times 10^{-2}$	$1.526 \times 10^{-2}$
$n = 3$	$2.828 \times 10^{-3}$	$2.883 \times 10^{-3}$
$n = 4$	$3.906 \times 10^{-4}$	$4.360 \times 10^{-4}$
$n = 5$	$3.954 \times 10^{-5}$	$5.176 \times 10^{-5}$
$n = 6$	$3.251 \times 10^{-6}$	$5.286 \times 10^{-6}$
$n = 7$	$2.047 \times 10^{-7}$	$4.559 \times 10^{-7}$
$n = 8$	$1.496 \times 10^{-7}$	$2.384 \times 10^{-7}$

این مسأله در [۲۷] با روش موجک‌های هار<sup>۱</sup> و در [۴] با روش توابع پالس-بلوکی<sup>۲</sup> و با استفاده از تعداد مشابهی از نقاط هم‌محلی حل شده است. مقایسه‌ای بین نتایج به دست آمده از روش ارائه شده و نتایج موجود در [۴،۲۷] در جدول‌های ۱ و ۲ ارائه شده است که نشان می‌دهد روش ما، حتی با استفاده از تعداد کمتری از توابع پایه، دقت بهتری دارد. به علاوه، گراف خطای  $\bar{e}_n$  برای  $n = 4, 8$  در شکل ۱ رسم شده است.

شکل ۱. گراف  $\bar{e}_n$  برای مثال ۵-۱؛ چپ:  $n = 4$  راست:  $n = 8$ .<sup>1</sup> Haar wavelets<sup>2</sup> Block-pulse functions

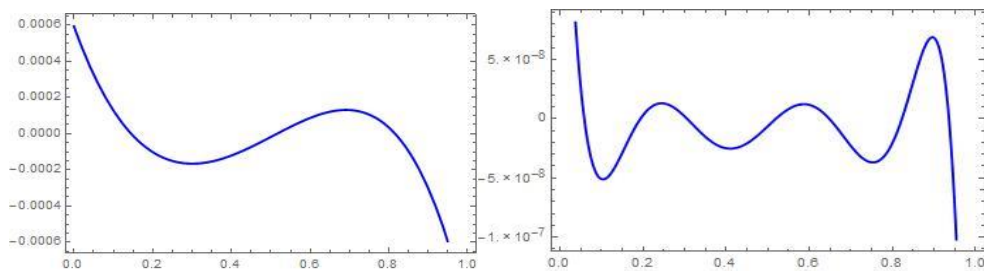
جدول ۲: مقایسه  $\bar{e}_n$  در نقاط هم‌محلی برای مثال ۵-۱.

نقاط هم‌محلی	روش توابع پالس-بلوکی [4]	روش موجک‌های هار [27]	روش ارائه شده
$\frac{1}{16}$	$3.28 \times 10^{-2}$	$1.95 \times 10^{-3}$	$1.58 \times 10^{-7}$
$\frac{3}{16}$	$3.74 \times 10^{-3}$	$1.98 \times 10^{-3}$	$2.05 \times 10^{-7}$
$\frac{5}{16}$	$4.25 \times 10^{-4}$	$2.04 \times 10^{-3}$	$9.60 \times 10^{-8}$
$\frac{7}{16}$	$4.85 \times 10^{-4}$	$2.14 \times 10^{-3}$	$1.03 \times 10^{-7}$
$\frac{9}{16}$	$5.52 \times 10^{-5}$	$2.26 \times 10^{-3}$	$9.41 \times 10^{-8}$
$\frac{11}{16}$	$6.28 \times 10^{-5}$	$2.43 \times 10^{-3}$	$7.26 \times 10^{-8}$
$\frac{13}{16}$	$7.16 \times 10^{-6}$	$2.63 \times 10^{-3}$	$1.19 \times 10^{-7}$
$\frac{15}{16}$	$8.15 \times 10^{-6}$	$2.87 \times 10^{-3}$	$9.24 \times 10^{-8}$

مثال ۵-۲. برای معادله انتگرال ولترای غیرخطی

$$\int_0^x (x-t+1)(u(t) + u^3(t))dt = \frac{2}{9}(1 - e^{-3x} + 6x), \quad x \in [0,1], \quad (3-5)$$

جواب دقیق  $u(x) = e^{-x}$  است. نتایج عددی به دست آمده برای این مثال، با استفاده از روش ارائه شده، در جدول ۳ نشان داده شده است. همچنین، گراف خطای  $\bar{e}_n$  برای  $n = 4, 8$  در شکل ۲ رسم شده است.



شکل ۲. گراف  $\bar{e}_n$  برای مثال ۵-۲؛ چپ:  $n = 4$ ؛ راست:  $n = 8$ .

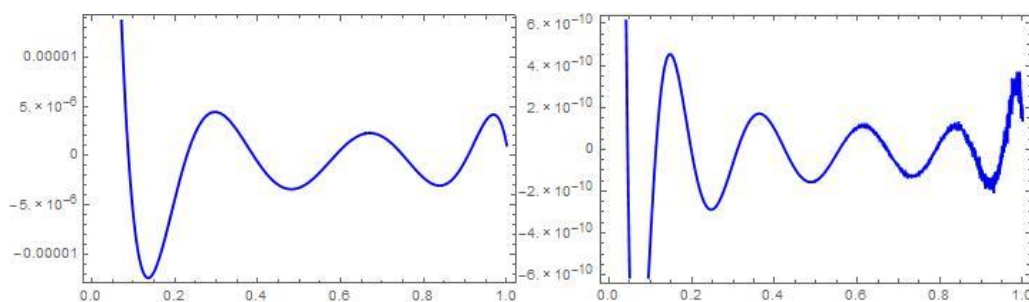
جدول ۳: خطاهای محاسبه شده برای مثال ۵-۲.

$n$	$\ \bar{e}_n\ _\infty$	$\ \bar{e}_n\ _2$
1	$9.134 \times 10^{-3}$	$2.456 \times 10^{-2}$
2	$4.537 \times 10^{-3}$	$4.386 \times 10^{-3}$
3	$1.137 \times 10^{-3}$	$1.095 \times 10^{-3}$
4	$3.025 \times 10^{-4}$	$2.562 \times 10^{-4}$
5	$3.698 \times 10^{-5}$	$4.450 \times 10^{-5}$
6	$5.367 \times 10^{-6}$	$6.913 \times 10^{-6}$
7	$3.923 \times 10^{-7}$	$8.880 \times 10^{-7}$
8	$4.373 \times 10^{-8}$	$1.223 \times 10^{-7}$

مثال ۵-۳. معادله انتگرال ولترا- فردهلم غیرخطی

$$f(x) = \int_0^x (1+x-t)u^2(t)dt + \int_0^1 2x^2tu(t), \quad x \in [0,1], \quad (۴-۵)$$

را در نظر بگیرید. تابع  $f$  طوری انتخاب شده است که جواب دقیق مسأله  $u(x) = xe^{-x}$  باشد. نتایج عددی به دست آمده برای این مثال، با استفاده از روش ارائه شده، در جدول ۴ نشان داده شده است. همچنین، گراف خطای  $\bar{e}_n$  برای  $n = 7, 11$  در شکل ۳ رسم شده است.



شکل ۳. گراف  $\bar{e}_n$  برای مثال ۵-۳؛ چپ:  $n = 7$ ، راست:  $n = 11$ .

جدول ۴: خطاهای محاسبه شده برای مثال ۵-۳.

$n$	$\ \bar{e}_n\ _\infty$	$\ \bar{e}_n\ _2$
1	$1.250 \times 10^{-3}$	$3.577 \times 10^{-2}$
3	$2.435 \times 10^{-3}$	$1.617 \times 10^{-2}$
5	$1.263 \times 10^{-3}$	$9.988 \times 10^{-4}$
7	$2.345 \times 10^{-4}$	$2.547 \times 10^{-5}$
9	$1.814 \times 10^{-5}$	0
11	$5.045 \times 10^{-6}$	0

مثال ۵-۴. معادله انتگرال ولترا- فردهلم غیرخطی

$$\frac{2}{x} - \frac{e^{-x^2}}{x} - \frac{\cos x}{x} = \int_0^x e^{-xt} u^2(t) dt + \int_0^1 \sin(xt) u^3(t) dt, \quad x \in [0,1], \quad (۴-۵)$$

را در نظر بگیرید. جواب دقیق این مسأله  $u(x) = 1$  است. نتایج عددی به دست آمده برای این مثال، با استفاده از روش ارائه شده، در جدول ۵ نشان داده شده است. همچنین، گراف خطای  $\bar{e}_n$  برای  $n = 4, 8$  در شکل ۴ رسم شده است.

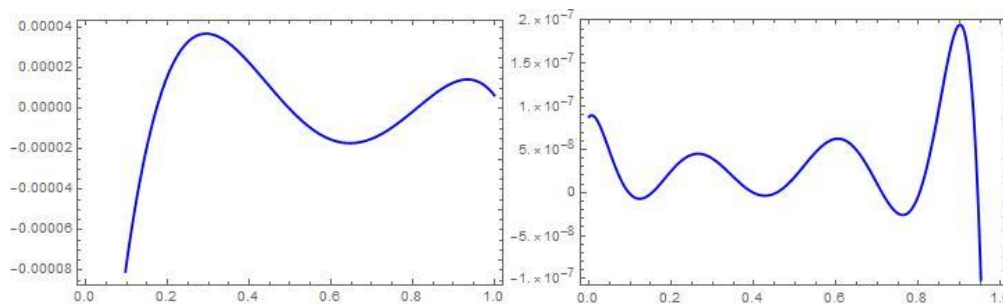
جدول ۵: خطاهای محاسبه شده برای مثال ۵-۴.

$n$	$\ \bar{e}_n\ _\infty$	$\ \bar{e}_n\ _2$
1	$5.470 \times 10^{-3}$	$5.698 \times 10^{-3}$
2	$2.437 \times 10^{-3}$	$2.033 \times 10^{-3}$
3	$6.270 \times 10^{-4}$	$4.369 \times 10^{-4}$
4	$7.590 \times 10^{-5}$	$6.013 \times 10^{-5}$
5	$1.237 \times 10^{-5}$	$2.052 \times 10^{-5}$
6	$1.932 \times 10^{-6}$	$3.455 \times 10^{-6}$
7	$4.638 \times 10^{-7}$	$1.030 \times 10^{-6}$
8	$6.229 \times 10^{-8}$	$1.925 \times 10^{-7}$

## ۶. نتیجه‌گیری

در کار حاضر، ماتریس‌های عملیاتی انتگرال‌گیری و حاصل ضرب ALP همراه با روش هم‌محلی برای حل عددی مسأله (۱-۱) با فرض (۲-۱) به کار برده شده‌اند. این روش مسأله در نظر گرفته شده را به یک دستگاه غیرخطی از معادلات جبری، که مجهولات آن ضرایب ALP جواب دقیق هستند، کاهش می‌دهد. در مثال‌های عددی ارائه شده در بخش ۵،

این دستگاه غیرخطی با استفاده از تابع *FindRoot* در نرم‌افزار ممتیکا، که روش نیوتن را به طور پیش فرض استفاده می‌کند، حل شده است. همان‌گونه که در مثال‌های ارائه شده نشان داده شده است جواب‌های تقریبی به جواب‌های دقیق نزدیک هستند و نتایج با دقت بالا می‌توانند با به کار بردن فقط تعداد کمی از توابع پایه به دست آیند.



شکل ۴. گراف  $e_n$  برای مثال ۴-۵؛ چپ:  $n = 4$  راست:  $n = 8$

## References

1. K.E. Atkinson. A survey of numerical methods for solving nonlinear integral equations. *J. Integral Equations Appl.*, 4(1):15-46, 1992.
2. E. Babolian and L. M. Delves. An augmented Galerkin method for first kind Fredholm equations. *J. Inst. Math. Appl.*, 24(2):157-174, 1979.
3. E. Babolian and Z. Masouri. Direct method to solve Volterra integral equation of the first kind using operational matrix with block-pulse functions. *J. Comput. Appl. Math.*, 220(1-2):51-57, 2008.
4. E. Babolian and A. Salimi Shamloo. Numerical solution of Volterra integral and integro-differential equations of convolution type by using operational matrices of piecewise constant orthogonal functions. *J. Comput. Appl. Math.*, 214(2):495-508, 2008.
5. S. Bazm. Bernoulli polynomials for the numerical solution of some classes of linear and nonlinear integral equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 275:44-60, 2015.
6. N. Bildik and M. Inc. Modified decomposition method for nonlinear Volterra-Fredholm integral equations. *Chaos Soliton. Fract.*, 33(1):308-313, 2007.
7. H. Brunner. The solution of Volterra integral equations of the first kind by piecewise polynomials. *J. Inst. Math. Appl.*, 12:295-302, 1973.
8. H. Brunner. *The approximate solution of integral equations by projection methods based on collocation*. Math. Comput. No. 1/78. Dept. Math., University of Trondheim, 1978.

9. V.S. Chelyshkov. Alternative Jacobi polynomials and orthogonal exponentials. *arXiv:1105.1838*.
10. V.S. Chelyshkov. Alternative orthogonal polynomials and quadratures. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 25:17-26 (electronic), 2006.
11. F. de Hoog and R. Weiss. On the solution of Volterra integral equations of the first kind. *Numer. Math.*, 21(1):22-32.
12. L.M. Delves and J.L. Mohamed. *Computational methods for integral equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
13. F. Deutsch. *Best approximation in inner product spaces*. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 7. Springer-Verlag, New York, 2001.
14. J. Dixon, S. McKee, and R. Jeltsch. Convergence analysis of discretization methods for nonlinear first kind Volterra integral equations. *Numer. Math.*, 49(1):67-80, 1986.
15. M. Gasca and T. Sauer. On the history of multivariate polynomial interpolation. *J. Comput. Appl. Math.*, 122(1-2):23-35, 2000. Numerical analysis 2000, Vol. II: Interpolation and extrapolation.
16. A. Gil, J. Segura, and N.M. Temme. *Numerical methods for special functions*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2007.
17. C.J. Gladwin and R. Jeltsch. Stability of quadrature rule methods for first kind Volterra integral equations. *BIT*, 14(2):144-151.
18. C.H. Gladwin. *Numerical Solution of Volterra Equations of the First Kind*. Ph.D. Thesis, Dalhousie University, 1975.
19. E. Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1978.
20. Y.L. Luke. *The special functions and their approximations, Vol. I*. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 53. Academic Press, New York-London, 1969.
21. K. Maleknejad, H. Almasieh, and M. Roodaki. Triangular functions (TF) method for the solution of nonlinear Volterra-Fredholm integral equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 15(11):3293-3298, 2010.
22. K. Maleknejad, E. Hashemizadeh, and B. Basirat. Computational method based on Bernstein operational matrices for nonlinear Volterra-Fredholm-Hammerstein integral equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 17(1):52-61, 2012.

23. K. Maleknejad and B. Rahimi. Modification of block pulse functions and their application to solve numerically Volterra integral equation of the first kind. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 16(6):2469-2477, 2011.
24. S. McKee. Best convergence rates of linear multistep methods for Volterra first kind equations. *Computing*, 21(4):343-358, 1978/79.
25. Y. Ordokhani. Solution of nonlinear Volterra-Fredholm-Hammerstein integral equations via rationalized haar functions. *Appl. Math. Comput.*, 180, 2006.
26. J.A. Scott. A unified analysis of discretization methods for Volterra type equations. In *Constructive methods for the practical treatment of integral equations (Oberwolfach, 1984)*, volume 73 of *Internat. Schriftenreihe Numer. Math.*, pages 244-255. Birkhauser, Basel, 1985.
27. I. Singh and S. Kumar. Haar wavelet method for some nonlinear Volterra integral equations of the first kind. *J. Comput. Appl. Math.*, 292:541-552, 2016.
28. G. Szego. *Orthogonal polynomials*. American Mathematical Society, Providence, R.I., fourth edition, 1975. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIII.
29. P.J. Taylor. The solution of Volterra integral equations of the first kind using inverted differentiation formulae. *Nordisk Tidskr. Informationsbe-handling (BIT)*, 16(4):416-425, 1976.
30. A.N. Tikhonov and V.Y. Arsenin. *Solutions of ill-posed problems*. V. H. Winston & Sons, Washington, D.C.: John Wiley & Sons, New York-Toronto, Ont.-London, 1977. Translated from the Russian, Preface by translation editor Fritz John, Scripta Series in Mathematics.
31. P.J. van der Houwen and H.J.J. te Riele. Linear multistep methods for Volterra integral and integro-differential equations. *Math. Comp.*, 45(172):439-461, 1985.
32. P.H.M. Wolkenfelt. Reducible quadrature methods for Volterra integral equations of the first kind. *BIT*, 21(2):232-241, 1981.
33. S. Yalcinbas. Taylor polynomial solutions of nonlinear Volterra-Fredholm integral equations. *Appl. Math. Comput.*, 127(2-3):195-206, 2002.
34. S. Youse\_ and M. Razzaghi. Legendre wavelets method for the nonlinear Volterra-Fredholm integral equations. *Math. Comput. Simulation*, 70(1):1-8, 2005.