Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

The Structure of finlte Abelian p-groups by the order of their schur multipliers

Mohsen Parvizi[1] ✉, Peyman Niroomand[2], Afsaneh Mohammadpour Yengjeh[3], Saeed Kayvanfar[4]

1. Department of Pure Mathematics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.
✉E-mail: parvizi@um.ac.ir
2. School of Mathematics and Computer Science, Damghan University, Damghan, Iran.
E-mail: p_niroomand@yahoo.com
3. School of Mathematics and Computer Science, Damghan University, Damghan, Iran.
E-mail: mohammadpoor@yahoo.com
4. Department of Pure Mathematics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.
E-mail: skayvanf@um.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
10 August 2019
Revised form:
6 June 2020
Accepted:
6 June 2020
Published online:
29 March 2022

Keywords:
Schur multiplier;
Finite Abelian p-group;
statistic;
Corank.

ABSTRACT

Introduction

The Schur multiplier $\mathcal{M}(G)$, which is the second homology group of a group G, was introduced by I. Schur in his works on projective representations of a group in 1904. During one century several investigations on this topic have been approached by several authors. Among the class of groups, the class of finite p-groups took a special attention because it is well known that the p-part of $\mathcal{M}(G)$ is embedded into the Schur multiplier of the Sylow p-subgroup of G. The famous result of Green shows that a p-group of order p^n has the Schur multiplier of order bounded above by $p^{\frac{1}{2}n(n-1)}$. It allows us to write $|\mathcal{M}(G)| = p^{\frac{1}{2}n(n-1)-t(G)}$ for some $t(G) \geq 0$. The integer $t(G)$ is called the corank of a finite p-group G, and it is denoted by corank (G). The structure of all p-groups with $t(G) \leq 7$ is completely classified in several papers, so it is quite natural to ask the following question. "Is it possible to characterize all finite p-groups by $t(G)$?" At the moment, there is no result for $t(G) \geq 8$, and the question is still open. This article answers this question in the affirmative when G is belong to class of finite abelian group.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]

Material and methods

We use the fundamental theorem of finitely generated abelian groups and the famous theorem by Schur which states the behavior of the Schur multiplier functor with respect to direct products to obtain some numerical inequalities between the orders of the Schur multipliers of finite abelian p-groups. First we consider finite abelian p-groups without a cyclic factor of order p, and then the general case will be discussed.

Results and discussion

We show that for each integer t, there are finitely many finite abelian p-group G with $t(G) = t$. Moreover for each t, we completely determine the structure of such groups

Conclusion

We proved that despite the general case for which the problem of classifying finite p-groups via their coranks is still open for $t(G) \geq 8$, the special case of finite abelian p-groups has a complete answer for all $t(G)$.

How to cite: Parvizi, M., Niroomand, P., Mohammadpour Yengjeh, A., Kayvanfar, S; (2022). The Structure of finlte Abelian p-groups by the order of their schur multipliers. *Mathematical Researches*, 8 (1), 148-166

© The Author(s). Publisher: Kharazmi University

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]

شاپا چاپی: ۲۰۴٦-۲۰۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۰۰٤-۲۰۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

ساختار p-گروه‌های آبلی متناهی بر حسب مرتبهٔ ضربگر شور آنها

محسن پرویزی[۱]✉، پیمان نیرومند[۲]، افسانه محمدپور ینگجه[۳]، سعید کیوانفر[۴]

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی محض، دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران. پست الکترونیکی: parvizi@um.ac.ir
۲. دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه دامغان، دامغان، ایران. پست الکترونیکی: p_niroomand@yahoo.com
۳. دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه دامغان، دامغان، ایران. پست الکترونیکی: mohammadpoor@yahoo.com
۴. گروه ریاضی محض، دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران. پست الکترونیکی: skayvanf@um.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۵/۱۹
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۳/۱۷
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۳/۳۱
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۱/۹

واژه‌های کلیدی:
ضربگر شور،
p-گروه آبلی متناهی،
هم‌رتبه.

چکیده

نتیجه‌ای مشهور از گرین[۱] [۴] نشان می‌دهد برای هر p-گروه آبلی متناهی مانند G از مرتبهٔ p^n عدد صحیح $t(G)$ موجود است به طوری که مرتبه ضریگر شور G، $\mathcal{M}(G)$ برابر است با $p^{\frac{1}{2}n(n-1)-t(G)}$، که در آن $t(G)$ یک عدد صحیح نامنفی است. عدد نامنفی $t(G)$ هم‌رتبه[۲] گروه G نامیده می‌شود. طبقه‌بندی p-گروه‌های متناهی بر حسب هم رتبه همچنان مسأله‌ای باز در نظریهٔ گروه‌ها است. در این مقاله تمام گروه‌های آبلی متناهی را بر حسب هم‌رتبه‌شان طبقه‌بندی می‌کنیم.

استناد: پرویزی، محسن؛ نیرومند، پیمان؛ محمدپور ینگجه، افسانه؛ کیوانفر، سعید؛ (۱۴۰۱). ساختار p-گروه‌های آبلی متناهی بر حسب مرتبهٔ ضربگر شور آنها. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۱)، ۱۶۶-۱۴۸.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

© نویسندگان.

[1]Green
[2]Corank

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]

۱.مقدمه

ضربگر شور گروه G که با $\mathcal{M}(G)$ نشان داده می شود و منطبق بر دومین گروه همولوژی گروه G است، اولین بار توسط شور[۱] هنگام کار کردن روی نمایش‌های تصویری در سال ۱۹۰۴ تعریف شد. در طی حدود یک قرن نویسندگان زیادی بر روی این موضوع کار کردند و به خاطر پیچیدگی این موضوع به طور خاص رده p-گروه‌های متناهی بیشتر مورد توجه قرار گرفت. دلایلی برای این توجه بیشتر موجود است که می توان به تجزیهٔ گروه‌های متناهی پوچ توان به حاصل‌ضرب زیرگروه‌های سیلوی خود و باز شدن ضربگر شور روی این حاصل‌ضرب را اشاره کرد. نتیجهٔ مشهور گرین می‌گوید که مرتبهٔ ضربگر شور یک p-گروه متناهی از مرتبهٔ p^n توسط $p^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ از بالا کراندار می‌شود. وجود این کران باعث می‌شود که مرتبهٔ ضربگر شور را بتوان به صورت $|\mathcal{M}(G)| = p^{\frac{1}{2}n(n-1)-t(G)}$ نوشت که در آن $t(G)$ یک عدد صحیح نامنفی است. عدد صحیح $t(G)$ را هم‌رتبهٔ گروه G می‌نامیم و در[3] این عدد با $corank(G)$ نشان داده شده است.

ساختار تمام p-گروه ها با هم‌رتبه ۰، ۱ و ۲ به ترتیب در [۱] و [۱۲] ارائه شده است. پس از آن الیس[۲] در [۲] با استفاده از روشی متفاوت محاسبات انجام شده در [۱، ۱۲] را ساده‌تر کرد و قادر به مشخص کردن ساختار تمام p-گروه‌ها با هم‌رتبه حداکثر ۳ شد.

سوالی که به طور طبیعی به ذهن می‌رسد این است: آیا می‌توان تمام p-گروه‌ها را بر حسب هم‌رتبه طبقه‌بندی کرد؟ همان‌طور که قبلاً اشاره شد، در مقالات [۱، ۲، ۱۲] به این سوال برای $t(G) \leq 3$ پاسخ داده شده است. با روشی کاملاً متفاوت از روش قبلی در [۸، ۹] سوال برای حالت‌های $t(G) = 4, 5$ پاسخ داده شد. همچنین جعفری[۳] در [۵، ۶] به سوال برای $t(G) = 6, 7$ جواب داده است. در حال حاضر نتیجه‌ای برای $t(G) \geq 8$ موجود نیست و مسأله هنوز یک مسأله باز است.

مقالهٔ حاضر حالت خاص سوال بالا را برای p-گروه های آبلی متناهی در نظر می‌گیرد و نشان می‌دهد که در این حالت جواب مثبت است. به عبارت دیگر برای هر عدد صحیح نامنفی t ساختار تمام گروه‌های آبلی G با $t(G) = t$ به دست می آید.

در سرتاسر این مقاله $\mathbb{Z}_k^{(m)}$ نشان دهندهٔ جمع مستقیم m نسخه از گروه دوری از مرتبهٔ k است. قضیه‌ای که در ادامه می‌آید نتایج مقالات [۱، ۲، ۱۰، ۱۲] را جمع‌آوری کرده است که ساختار تمام p-گروه‌های آبلی متناهی با هم‌رتبه حداکثر ۴ را مشخص می‌کند.

[1] I.Schur
[۲] Ellis
[۳] Jafari

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]

قضیهٔ ۱.۱ فرض کنید G یک گروه آبلی از مرتبه p^n باشد. در این صورت

i. $t(G)=0$ اگر و تنها اگر G یک گروه آبلی مقدماتی باشد

ii. $t(G)=1$ اگر و تنها اگر $G\cong \mathbb{Z}_{p^2}$

iii. $t(G)=2$ اگر و تنها اگر $G\cong \mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}_{p^2}$

iv. $t(G)=3$ اگر و تنها اگر $G\cong \mathbb{Z}_{p^3}$ یا $G\cong \mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}_p$

v. $t(G)=4$ اگر و تنها اگر $G\cong \mathbb{Z}_{p^2}\oplus\mathbb{Z}_{p^2}$ یا $G\cong \mathbb{Z}_{p^2}\oplus{\mathbb{Z}_p}^{(3)}$

لم‌ها و قضیهٔ زیر در بخش بعد به کار می‌روند.

لم ۲.۱ فرض کنید A و B دو گروه متناهی باشند. در این صورت

$$\mathcal{M}(A\times B)\cong \mathcal{M}(A)\oplus\mathcal{M}(B)\oplus A/A'\oplus B/B'$$

برهان: رجوع کنید[۱۱].

به عنوان نتیجه‌ای از لم ۲.۱ لم زیر را داریم.

لم ۳.۱ فرض کنید $G\cong \mathbb{Z}_{p^{m_1}}\oplus\mathbb{Z}_{p^{m_2}}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{p^{m_k}}$ یک p-گروه آبلی متناهی باشد. در این صورت

$$\mathcal{M}(G)\cong \mathbb{Z}_{p^{m_2}}\oplus{\mathbb{Z}_{p^{m_3}}}^{(2)}\oplus\cdots\oplus{\mathbb{Z}_{p^{m_k}}}^{(k-1)}$$

برهان: با استفاده از استقرا و لم قبل و رابطهٔ $\mathbb{Z}_m\otimes\mathbb{Z}_n\cong\mathbb{Z}_{\gcd(m,n)}$ حکم به راحتی اثبات می‌شود.

قضیهٔ بعد که در واقع نتیجه‌ای از قضیهٔ اثبات شده توسط الیس است، در اثبات قضیهٔ اصلی به کار می‌رود.

قضیهٔ ۴.۱ ([2, Prop. 2]) فرض کنید G یک p-گروه آبلی d-مولدی از مرتبهٔ p^n باشد. در این صورت

$$|\mathcal{M}(G)|\leq p^{\frac{1}{2}d(2n-d-1)}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]

۲. نتایج اصلی

در این بخش به طبقه‌بندی تمام p-گروه‌های آبلی متناهی می‌پردازیم که هم‌رتبهٔ آنان t باشد که در آن t عدد صحیح نامنفی دلخواهی است. به علاوه نشان می‌دهیم برای هر عدد صحیح نامنفی t تعداد p-گروه‌های آبلی متناهی چون G که داریم $t(G) = t$ متناهی است. این حکم، نتیجهٔ [3, Prop. 3] را برای رده p-گروه‌های آبلی متناهی تعمیم می‌دهد. در انتها برای هر گروه آبلی متناهی هم‌رتبهٔ آن را محاسبه می‌کنیم.

برای به کار بردن لم ۳.۱ و قضیهٔ ۴.۱، نیاز به نمایشی برای p-گروه های آبلی متناهی داریم که بر حسب تعداد مولدهای آن باشد. لم زیر چنین نمایشی را ارائه می‌دهد.

لم ۱.۲ فرض کنید G یک p-گروه آبلی d-مولدی از مرتبهٔ p^n باشد و $a = n - d$. در این صورت اعداد صحیح r $(1 \leq r \leq a)$ و $\alpha_i \geq 2$ $(1 \leq i \leq r)$ موجودند به قسمی که

$$G \cong \mathbb{Z}_p{}^{(n-(a+r))} \oplus \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p^{\alpha_r}} \text{ و } \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = a + r.$$

برهان: با استفاده از قضیهٔ اساسی گروه‌های آبلی با تولید متناهی داریم $G \cong \mathbb{Z}_{p^{\beta_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p^{\beta_d}}$، که در آن $\beta_1 \leq \cdots \leq \beta_d$. فرض کنید r کوچکترین عددی باشد که داشته باشیم $\beta_1 = \cdots = \beta_{d-r} = 1$ و $\beta_{d-r+1} > 1$، در این صورت با جایگزینی $\beta_{d-r+1}, \dots, \beta_d$ با $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ حکم به راحتی دست می‌آید.

برای مشخص کردن p-گروه های آبلی متناهی بر حسب هم‌رتبهٔ آنان، ابتدا روی گروه‌هایی که فاقد عامل دوری از مرتبهٔ p باشند تمرکز می‌کنیم. با توجه به قضیهٔ ۴.۱ و لم ۱.۲، a در رابطهٔ $a^2 - a \leq 2t$ صدق می‌کند، لذا برای هر مقدار t، تنها تعداد متناهی مقدار برای a موجود است. به طور دقیق‌تر هر گاه $a_t = \max\{a \mid a^2 - a \leq t\}$ مجموعه مقادیر قابل قبول a برابر است با $\{1,2, \dots, a_t\}$. برای هر مقدار قابل قبول a، قضیهٔ زیر را به کار می‌بریم.

قضیهٔ ۲.۲ با نماد گذاری لم ۱.۲، فرض کنید G یک p-گروه آبلی متناهی بدون عامل مستقیم دوری از مرتبهٔ p باشد و t عدد صحیح نامنفی دلخواهی باشد. در این صورت $t(G) = t$ اگر و تنها اگر $G \cong \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p^{\alpha_r}}$ که در آن $\sum_{i=2}^{r} (i-1)\alpha_i = \frac{1}{2}(a+r)(a+r-1) - t$.

برهان: چون G عامل مستقیم دوری ندارد داریم $G \cong \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p^{\alpha_r}}$ لذا مطابق نماد گذاری لم ۱.۲، داریم

$n = a + r$، حال با استفاده از لم ۳.۱ داریم $\log_p|\mathcal{M}(G)| = \sum_{i=2}^{r} (i-1)\alpha_i$، از طرفی طبق فرض داریم $t(G) = t$ لذا $\log_p|\mathcal{M}(G)| = \frac{1}{2}n(n-1) - t$، حال با جایگذاری $a + r$ به جای n حکم به دست می‌آید. به عکس فرض کنید $\sum_{i=2}^{r} (i-1)\alpha_i = \frac{1}{2}(a+r)(a+r-1) - t$. می دانیم

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]

$\log_p|\mathcal{M}(G)| = \frac{1}{2}n(n-1) - t(G) = \sum_{i=2}^{r}(i-1)\alpha_i$ که با توجه به فرض خط بالا نتیجه می‌دهد

$\frac{1}{2}(a+r)(a+r-1) - t = \frac{1}{2}n(n-1) - t(G)$، حال رابطهٔ $n = a + r$ و تساوی قبل نتیجه می‌دهد $t(G) = t$.

قضیه‌ای که گذشت، روش محاسبهٔ $t(G)$ هنگامی که p-گروه آبلی متناهی G فاقد عامل مستقیم دوری از مرتبهٔ p باشد را مشخص کرد. واقعیت مهمی که لازم است به آن اشاره شود این است که α_i ها اعداد صحیح نامنفی هستند که در یک دستگاه دو معادلهٔ خطی صدق می‌کنند و لذا تعداد متناهی از آنها موجود است.

قضیهٔ بعد نشان می‌دهد که p-گروه‌های آبلی متناهی بر حسب هم‌رتبه به معنای اشاره شده در زیر، دوره‌ای ظاهر می‌شوند.

قضیهٔ ۳.۲ با مفروضات و نمادگذاری قبل فرض کنید $G \cong {\mathbb{Z}_p}^{(k)} \oplus G_1$ که در آن $G_1 \cong \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p^{\alpha_r}}$ گروهی باشد که داشته باشیم $t(G_1) = t_1$، در این صورت داریم $t(G) = t_1 + ka$.

برهان: با استفاده از لم ۲.۱ داریم

$$\mathcal{M}(G) \cong {\mathbb{Z}_p}^{(\frac{1}{2}k(k-1))} \oplus \mathcal{M}(G_t) \oplus {\mathbb{Z}_p}^{(kr)}$$

همچنین لم *۳.۱ نشان می دهد*

$$\log_p|\mathcal{M}(G_t)| = \sum_{i=2}^{r}(i-1)\alpha_i$$

از طرفی قضیهٔ ۲.۲ نشان می‌دهد که

$$\sum_{i=2}^{r}(i-1)\alpha_i = \frac{1}{2}(a+r)(a+r-1) - t_1$$

بنابراین

$$\log_p|\mathcal{M}(G)| = \frac{1}{2}k(k-1) + \frac{1}{2}(a+r)(a+r-1) - t_1 + kr,$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]

حال با مساوی قرار دادن سمت راست تساوی بالا با عبارت $\frac{1}{2}(k+a+r)(k+a+r-1)-t(G)$، داریم

$$\frac{1}{2}k(k-1)+\frac{1}{2}(a+r)(a+r-1)-t_1+kr=\frac{1}{2}(k+a+r)(k+a+r-1)-t(G)$$

در نتیجه

$$t(G)=\frac{1}{2}[(k+a+r)(k+a+r-1)-\ k(k-1)-(a+r)(a+r-1)+2t_1-2kr].$$

حال حکم پس از مقداری محاسبه به دست می‌آید.

قضیهٔ بعد به مفهومی عکس قضیه ۳.۲ است و نشان می‌دهد تنها گروه‌های معرفی شده در قضیهٔ ۳.۲ دارای هم رتبه‌ای به شکل t_1+ka هستند. نکته‌ای که باید دقت کرد این است که هر عدد طبیعی دارای تعدادی متناهی نمایش به فرم $t=t_1+ka$ است و برای هر مقدار t_1، k و a قضایای ۳.۲ و ۴.۲ ساختار تمام گروه‌های ممکن را پوشش می‌دهد.

قضیهٔ ۴.۲ فرض کنید G یک p-گروه آبلی متناهی دلخواه باشد و $t(G)=t$. هر گاه داشته باشیم $t=t_1+ka$ در این صورت $G\cong \mathbb{Z}_p{}^{(k)}\oplus G_1$ که در آن $G_1\cong \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{p^{\alpha_r}}$ و $t(G_1)=t_1$.

برهان: بنا بر لم ۱.۲ داریم

$$G\cong \mathbb{Z}_p{}^{(n-(a+r))}\oplus\mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{p^{\alpha_r}}$$

قرار دهید

$$G_1\cong \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{p^{\alpha_r}}$$

از این رو

$$\mathcal{M}(G)\cong \mathbb{Z}_p{}^{(\frac{1}{2}(n-(a+r))(n-(a+r)-1))}\oplus\mathcal{M}(G_1)\oplus\mathbb{Z}_p{}^{((n-(a+r))r)}$$

و لذا

$$\log_p|\mathcal{M}(G)|=\frac{1}{2}(n-(a+r))(n-(a+r)-1)+\log_p|\mathcal{M}(G_1)|+(n-(a+r))r.$$

حال تساوی‌های

$$\log_p|\mathcal{M}(G)|=\frac{1}{2}(n)(n-1)-t$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]

و

$$\log_p |\mathcal{M}(G_1)| = \frac{1}{2}(a+r)(a+r-1) - t_1$$

نتیجه را به دست می‌دهد.

در پایان لم زیر نشان می‌دهد که برای هر p-گروه آبلی متناهی، $t = t(G)$ چگونه محاسبه می شود.

لم ۵.۲ فرض کنید $G \cong \mathbb{Z}_p{}^{(n-(a+r))} \oplus \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p^{\alpha_r}}$ یک p-گروه آبلی متناهی باشد در این صورت

$$t(G) = \tfrac{1}{2}(a+r)(a+r-1) - \textstyle\sum_{i=2}^{r}(i-1)\alpha_i$$

برهان: حکم از به کار بردن قضایای ۲,۲ و ۲,۳ به راحتی به دست می‌آید.

در پایان قضیهٔ زیر را به عنوان حالت خاصی از قضایای اثبات شده برای $\mathrm{t(G)} = 5, 6, 7, 8$ می توان ثابت کرد.

قضیهٔ ۶.۲ فرض کنید G یک گروه آبلی از مرتبهٔ p^n باشد. در این صورت

i. $t(G) = 5$ اگر و تنها اگر $G \cong \mathbb{Z}_p{}^{(4)} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$ یا $G \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^3}$

ii. $(G) = 6$ اگر و تنها اگر $G \cong \mathbb{Z}_p{}^{(5)} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$ یا $G \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^2}{}^{(2)}$ یا $G \cong \mathbb{Z}_{p^4}$

iii. $(G) = 7$ اگر و تنها اگر $G \cong \mathbb{Z}_p{}^{(6)} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$ یا $G \cong \mathbb{Z}_p{}^{(2)} \oplus \mathbb{Z}_{p^3}$

iv. $(G) = 8$ اگر و تنها اگر $G \cong \mathbb{Z}_p{}^{(7)} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}$ یا $G \cong \mathbb{Z}_p{}^{(2)} \oplus \mathbb{Z}_{p^2}{}^{(2)}$ یا $G \cong \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_{p^3}$

برهان: کافی‌ست در قضیهٔ ۳.۲ به جای t مقادیر داده شده را قرار دهیم.

References:

1. YA. G. Berkovich, On the order of the commutator subgroups and the Schur multiplier of a finite *p*-group, *J. Algebra* 144 (1991) 269-272.

2. G. Ellis, On the Schur multiplier of *p*-groups, *Comm. Algebra* 27(9) (1999) 4173-4177.

3. G. Ellis and J. Weigold, A bound on the Schur multiplier of a prime power group, *Bull. Austral. Math. Soc*. 60 (1999) 191-196.

4. J. A. Green, On the number of automorphisms of a finite group, *Proc. Roy. Soc. A* 237 (1956) 574-581.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]

5. S. H. Jafari, Characterization of finite *p*-groups by the order of their Schur multipliers ($t = 6$), *Math. Rep. (Bucur.)* 18(68) (2016) no.4, 535-543.

6. S. H. Jafari, Characterization of finite *p*-groups by the order of their Schur multipliers ($t(G) = 7$), *Bull. Iran Math. Soc.* 43(7) (2017) 2567-2576.

7. P. Niroomand, On the order of Schur multiplier of non-abelian *p*-groups, *J. Algebra*, 322 (2009) 4479-4482.

8. P. Niroomand, Classifying *p*-groups via their multiplier, eprint, Cornell University Library, (2010) available online at http://arxiv.org/abs/1003.0982

9. P. Niroomand, Characterizing finite *p*-groups by their Schur multipliers, $t(G)$ =5, eprint, Cornell University Library, (2010) available online at http://arxiv.org/abs/1001.4572

10. A. R. Salemkar, M. R. R. Moghaddam, M Davarpanah and F. Saeedi, A remark on the Schur multiplier of *p*-groups, *Comm. Algebra* 35 (2007) 1215-1221.

11. I. Schur, Undersuchungen über die darstellung der endlichen gruppen durch gebrochene lineare substitutionen, *J. Reine Angew. Math.* 132 (1907) 85-137.

12. X. Zhou, On the order of Schur multipliers of finite *p*-groups, *Comm. Algenra* 22(1) (1994) 1-8.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-25]