

## یک روش عددی براساس ماتریس عملیاتی برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری

پریسا رحیم‌خانی، یداله اردوخانی\*

دانشگاه الزهرا (س)، دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضی

پذیرش ۹۹/۰۱/۲۴

دریافت ۹۸/۰۵/۲۵

### چکیده

در این مقاله، روشی عددی برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری بیان می‌شود. هدف اصلی، معرفی تابع‌های تکه‌ای براساس تابع‌های تیلور کسری در محاسبات کسری است. همچنین یک فرمول‌بندی کلی برای ماتریس عملیاتی انتگرال کسری این توابع نتیجه گرفته می‌شود. این ماتریس با روش هم‌مکانی برای تبدیل حل این مسئله به حل یک دستگاه از معادلات جبری، استفاده می‌شود. مثال‌هایی برای نشان دادن کاربرد روش حاضر، آورده می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری، روش هم‌مکانی، تابع تیلور کسری، مشتق کاپوتو، ماتریس عملیاتی.

### مقدمه

با توسعه تکنولوژی کامپیوتری، محاسبات کسری و کاربردهایش در شاخه‌های مختلف، به وسیله نویسنده‌های متعدد بررسی شده است. برخی پدیده‌های مکانیکی با معادلات دیفرانسیل کسری مدل شده‌اند، برای مثال: دینامیک‌های بی‌نظم [۱۴]، مکانیک سیستم‌های غیر هامیلتونی [۲۵]، حرکت فیزیکی [۲۲]، مکانیک کوانتوم [۴]، کنترل ناوبری کشتی و فضاپیما [۲۳] و غیره. طی دهه گذشته، مقاله‌های بسیاری به ارائه روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری اختصاص داده شده است. برای مثال روش تفاضلات متناهی [۲۷]، روش ماتریس [۲]، روش عناصر متناهی [۳۲]، روش هم‌مکانی اسپلاین [۳۰]، روش موجک [۱۸]، روش تقریب کم‌ترین مربعات [۱۷] و روش طیفی [۱].

معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری، یک دسته از معادلات دیفرانسیل کسری هستند که سرعت تغییر تابع مجهول نه تنها به مقادیر زمان حال تابع مجهول بلکه به مقادیر زمان گذشته تابع مجهول نیز وابسته است. جواب معادلات دیفرانسیل تأخیری نه تنها به اطلاعاتی از زمان حال بلکه به اطلاعاتی از زمان گذشته نیاز دارد. اخیراً به معادلات دیفرانسیل تأخیری بسیار توجه شده است، این معادلات در مدل‌سازی بسیاری از مسائل حقیقی به کار می‌روند، برای مثال توصیف ارتعاشات ابزار حفاری با عناصر محرک ویسکوالاستیک [۲۴]. جواب دقیق بسیاری از معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری معلوم نیست. بنابراین روش‌های عددی بسیاری برای حل عددی این معادلات ارائه شده است. یانگ و کاو [۲۹] وجود و یکتایی معادله دیفرانسیل کسری تأخیری را با تئوری نقطه ثابت بررسی کردند. مقدم و مستقیمی [۱۱] یک روش عددی براساس تفاضلات متناهی برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری ارائه دادند. همچنین [۱۰] یک روش ماتریسی جدید برای حل مدل‌هایی براساس معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری غیرخطی ارائه دادند. وانگ [۲۶] روش آدامز-بشورث مولتون و روش درونیایی خطی را برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری ترکیب کردند. سعید و همکارانش [۲۱] روش موجک چبیشف را برای حل معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال-دیفرانسیل

تأخیری کسری توسعه دادند. پیمانوف و هندی [۱۵] یک روش عددی جدید از نوع فرمول تفاضلات پسر و برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری ارائه دادند. علاوه بر این مقدم و مستقیمی [۹] یک روش ماتریسی جدید براساس روش تفاضلات متناهی کسری برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری با شرایط مرزی بیان کردند. رحیم‌خانی و همکارانش [۱۶]، [۱۹] روش موجک برنولی و موجک لژاندر-مانتر را برای حل عددی معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری به‌کار بردند.

در این مقاله روی معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری با تأخیر وابسته به زمان که به صورت (۱) است، تمرکز می‌کنیم:

$$\begin{cases} D^r y(t) = f(t, y(t), y(q(t)), D^r y(w(t))), & 0 < r \leq 1, 0 \leq t \leq T, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

که  $y$  یک تابع مجهول و  $f$  یک تابع حقیقی مقدار به اندازه کافی هموار  $q$  و  $w$  تابع‌های پیوسته روی بازه  $t \in [0, T]$  هستند.

در این پژوهش روشی عددی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری تأخیری وابسته به زمان بیان می‌شود. روش عددی شامل تبدیل مسئله مورد نظر به یک دستگاه از معادلات جبری است. برای این منظور ابتدا  $D^r y$  را با توابع تکه‌ای تیلور کسری با ضرایب مجهول بسط می‌دهیم. این توابع تکه‌ای و ماتریس عملیاتی انتگرال کسری آنها را معرفی می‌کنیم. ماتریس عملیاتی انتگرال کسری و روش هم‌مکانی برای ارزیابی ضرایب مجهول و پیدا کردن جواب تقریبی معادله (۱) به‌کار می‌رود.

این تحقیق بدین صورت سازماندهی می‌شود: در بخش ۲، برخی تعریف‌های اساسی و ویژگی‌های محاسبات کسری بیان می‌شود. در بخش ۳، تابع‌های تکه‌ای براساس توابع تیلور کسری معرفی می‌شوند. در بخش ۴، ماتریس عملیاتی انتگرال کسری توابع مذکور نتیجه می‌گیریم. در بخش ۵، یک روش عددی برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری تأخیری بیان می‌شود. در بخش ۶، آنالیز خطا در فضای سوبولوف به‌دست می‌آوریم. در بخش ۷ نتایج عددی گزارش داده می‌شود، دقت روش ارائه شده را با سه مثال عددی نشان می‌دهیم. هم‌چنین یک نتیجه‌گیری در بخش ۸ می‌آوریم.

## تعاریف

در این بخش، ما چند تعریف اساسی که در بخش‌های آینده نیاز داریم را بیان می‌کنیم.

### ۱. مشتق و انتگرال کسری

تعریف‌های مختلفی برای مشتق و انتگرال کسری وجود دارد. در این‌جا از مشتق کسری کاپوتو و انتگرال کسری ریمان-لیوویل استفاده می‌کنیم.

**تعریف ۱.** انتگرال کسری ریمان-لیوویل مرتبه  $\epsilon \geq 0$  بدین صورت بیان می‌شود [۱۸]، [۲۰]:

$$I^\epsilon f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\epsilon)} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\epsilon}} ds, & \epsilon > 0, \quad t > 0, \\ f(t), & \epsilon = 0. \end{cases}$$

برای انتگرال کسری ریمان-لیوویل داریم:

$$I^\epsilon t^s = \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+\epsilon+1)} t^{\epsilon+s}, \quad s > -1,$$

$$I^\epsilon (\{ f(t) + \sim g(t) \}) = \{ I^\epsilon f(t) + \sim I^\epsilon g(t) \},$$

که  $\{ \sim \}$  ثابت هستند.

تعریف ۲. مشتق کسری کاپوتو از مرتبه  $\epsilon$  بدین صورت بیان می‌شود [۱۸]:

$$D^\epsilon f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\epsilon)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\epsilon+1-n}} ds, \quad n-1 < \epsilon \leq n, \quad n \in N.$$

برای مشتق کسری داریم:

$$D^\epsilon I^\epsilon f(t) = f(t),$$

$$I^\epsilon D^\epsilon f(t) = f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} f^{(i)}(0) \frac{t^i}{i!}.$$

## ۲. بردار تیلور کسری

بردار تیلور کسری به صورت (۲) تعریف می‌شود [۶]:

$$T_m^{(\Gamma)}(x) = [1, x^\Gamma, x^{2\Gamma}, \dots, x^{m\Gamma}], \quad (۲)$$

که  $m$  یک عدد صحیح مثبت و  $\Gamma > 0$  یک ثابت حقیقی است.

## تابع‌های تکه‌ای تیلور کسری

تابع‌های تکه‌ای تیلور کسری روی بازه  $[0, 1]$  به صورت (۳) تعریف می‌شود:

$$W_{n,m}^{(\Gamma)}(x) = \begin{cases} x^{m\Gamma}, & \frac{n-1}{2^{k-1}} \leq x \leq \frac{n}{2^{k-1}}, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (۳)$$

که

$$m = 0, 1, \dots, M-1, \quad n = 1, 2, \dots, 2^{k-1}.$$

برای استفاده از تابع‌های تکه‌ای تیلور کسری روی بازه  $[0, T]$ ، ما تابع‌های تکه‌ای تیلور کسری تعمیم‌یافته را معرفی

می‌کنیم. این توابع با تغییر متغیر  $x = \frac{t}{T}$  روی توابع تکه‌ای تیلور کسری به صورت (۴) معرفی می‌شوند:

$$W_{n,m}^{(\Gamma,T)}(t) = \begin{cases} \frac{t^{m\Gamma}}{T^{m\Gamma}}, & \frac{n-1}{2^{k-1}} T \leq t \leq \frac{n}{2^{k-1}} T, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (۴)$$

برخلاف توابع موجک، این خانواده از توابع نرمالیزه و متعامد نیستند. همچنین قرار می‌دهیم:

$$T_m^{(\Gamma,T)}(t) = [1, \frac{t^\Gamma}{T^\Gamma}, \frac{t^{2\Gamma}}{T^{2\Gamma}}, \dots, \frac{t^{m\Gamma}}{T^{m\Gamma}}]. \quad (۵)$$

اگر قرار دهیم  $H = L^2[0, T]$  و فرض کنیم که

$$\{W_{1,0}^{(\Gamma,T)}(t), W_{1,1}^{(\Gamma,T)}(t), \dots, W_{2^{k-1}, M-1}^{(\Gamma,T)}(t)\} \subset H$$

مجموعه‌ای از توابع تکه‌ای تیلور کسری تعمیم‌یافته باشد که

$$Y = span\{W_{1,0}^{(\Gamma,T)}(t), W_{1,1}^{(\Gamma,T)}(t), \dots, W_{1, M-1}^{(\Gamma,T)}(t), \dots, W_{2^{k-1}, 0}^{(\Gamma,T)}(t), \dots, W_{2^{k-1}, M-1}^{(\Gamma,T)}(t)\},$$

و  $f$  یک عنصر دلخواه در  $H$  باشد. زیرا  $Y$  یک زیر فضای برداری متناهی بعد است، بنابراین  $f$  دارای بهترین تقریب از  $Y$  مثل  $f_{\hat{m}} \in Y$  است، به طوری که

$$\forall y \in Y, \quad \|f - f_{\hat{m}}\| \leq \|f - y\|$$

چون  $f_{\hat{m}} \in Y$  است، ضرایب یکتا  $(\hat{m} = 2^{k-1}M)$   $c_{10}, c_{1,1}, \dots, c_{2^{k-1}, M-1}$  وجود دارد به طوری که

$$f(t) \cong f_{\hat{m}}(t) = \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} W_{nm}^{(r,T)}(t) = C^T \Psi^{(r,T)}(t),$$

که

$$C = [c_{1,0}, c_{1,1}, \dots, c_{1,M-1}, \dots, c_{2^{k-1},0}, c_{2^{k-1},1}, \dots, c_{2^{k-1},M-1}]^T, \quad (۶)$$

و

$$\Psi^{(r,T)}(t) = [W_{1,0}^{(r,T)}(t), W_{1,1}^{(r,T)}(t), \dots, W_{1,M-1}^{(r,T)}(t), \dots, W_{2^{k-1},0}^{(r,T)}(t), \dots, W_{2^{k-1},M-1}^{(r,T)}(t)]^T. \quad (۷)$$

### ماتریس عملیاتی انتگرال کسری

در سال‌های اخیر برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل با استفاده از توابع سینوس-کسینوس، توابع والش، توابع بلاک-پالس، توابع هار گویا شده، موجک‌های لژاندر، موجک‌های هار و غیره. ماتریس‌های عملیاتی انتگرال برای این توابع محاسبه شده است [۱۲]، [۱۳]. در این بخش، ماتریس عملیاتی انتگرال کسری برای توابع تکه‌ای تیلور کسری تعمیم‌یافته محاسبه می‌شود. انتگرال کسری ریمان-لیوویل بردار  $\Psi^{(r,T)}$  مشخص شده در رابطه (۷) به صورت (۸) بیان می‌شود:

$$I^{(r)} \Psi^{(r,T)}(t) = F^{(r)} \Psi^{(r,T)}(t), \quad (۸)$$

که  $F^{(r)}$  ماتریس عملیاتی  $\hat{m} \times \hat{m}$  توابع تکه‌ای تیلور کسری تعمیم‌یافته از مرتبه  $\Gamma$  است. با استفاده از معادله (۲) و ویژگی‌های عملگر  $I^\Gamma$  به دست می‌آوریم:

$$I^\Gamma T_{M-1}^{(r,T)}(t) = \left[ \frac{1}{\Gamma(r+1)} t^r, \frac{\Gamma(r+1)}{T^\Gamma \Gamma(2r+1)} t^{2r}, \dots, \frac{\Gamma((M-1)r+1)}{T^{(M-1)\Gamma} \Gamma(Mr+1)} t^{M\Gamma} \right]^T = H^{(r,T)} T_{M-1}^{(r,T)}(t), \quad (۹)$$

که

$$H^{(r,T)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{T^\Gamma}{\Gamma(r+1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T^\Gamma \Gamma(r+1)}{\Gamma(2r+1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{T^\Gamma \Gamma(2r+1)}{\Gamma(3r+1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{T^\Gamma \Gamma((M-1)r+1)}{\Gamma(Mr+1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

بنابراین ماتریس عملیاتی انتگرال کسری توابع تکه‌ای تیلور کسری تعمیم‌یافته بدین صورت بیان می‌شود:

$$F^{(r,T)} = \begin{bmatrix} H^{(r,T)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H^{(r,T)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & H^{(r,T)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & H^{(r,T)} \end{bmatrix}.$$

### روش عددی

در این بخش، یک روش عددی با استفاده از توابع تکه‌ای تیلور کسری تعمیم‌یافته برای حل عددی معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری به صورت (۱) بیان می‌شود. تابع  $D^r y$  را با استفاده از توابع تکه‌ای تیلور کسری تعمیم‌یافته به صورت (۱۰) تقریب می‌زنیم:

$$D^r y(t) \cong C^T \Psi^{(r,T)}(t). \tag{10}$$

با استفاده از معادلات (۱)، (۸) و (۱۰) داریم:

$$y(t) \cong C^T F^{(r)} \Psi^{(r,T)}(t) + y_0. \tag{11}$$

با جای‌گذاری معادلات (۱۰) و (۱۱) در معادله (۱) داریم:

$$C^T \Psi^{(r,T)}(t) = f(t, C^T F^{(r)} \Psi^{(r,T)}(t) + y_0, C^T F^{(r)} \Psi^{(r,T)}(\dagger(t)) + y_0, C^T \Psi^{(r,T)}(W(t))). \tag{12}$$

برای به‌دست آوردن یک سیستم جبری، این معادله را در  $\hat{m}$  ریشه چندجمله‌ای لژاندر تعمیم‌یافته  $L_{\hat{m}}(\frac{t}{T})$  هم‌مکانی می‌کنیم. با هم‌مکانی معادله (۱۲) در  $\hat{m}$  نقطه به‌دست می‌آوریم:

$$C^T \Psi^{(r,T)}(t_i) = f(t_i, C^T F^{(r)} \Psi^{(r,T)}(t_i) + y_0, C^T F^{(r)} \Psi^{(r,T)}(\dagger(t_i)) + y_0, C^T \Psi^{(r,T)}(W(t_i))), \tag{13}$$

معادله (۱۳) یک دستگاه با  $\hat{m}$  معادله جبری غیرخطی است که برای به‌دست آوردن عناصر بردار  $C$  با استفاده از روش تکرار نیوتون این دستگاه را حل می‌کنیم.

### آنالیز خطا

در این بخش خطای روش حاضر را در فضای سوبولوف به‌دست می‌آوریم. برای این منظور ابتدا چند تعریف و قضیه بیان می‌کنیم.

**تعریف ۳.** فضای سوبولوف  $H^\dagger(a,b)$  با  $\dagger \geq 0$  بدین صورت تعریف می‌شود:

$$H^\dagger(a,b) = \left\{ y \in L^2(a,b) : \forall 0 \leq r \leq \dagger, \frac{d^r y}{dt^r} \in L^2(a,b) \right\}.$$

**تعریف ۴.** نرم سوبولوف از مرتبه صحیح  $\dagger \geq 0$  در بازه  $(a,b)$  به صورت (۱۴) تعریف می‌شود [۸]:

$$\|y\|_{H^\dagger(a,b)} = \left( \sum_{j=0}^{\dagger} \int_a^b |y^{(j)}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{j=0}^{\dagger} \|y^{(j)}\|_{L^2(a,b)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{14}$$

که  $y^{(j)}$  مشتق تابع  $y$  از مرتبه  $j$  است. نماد  $|y|_{H^{\dagger;M}(0,1)}$  به صورت (۱۵) تعریف می‌شود [۸]:

$$|y|_{H^{\dagger;M}(0,1)} = \left( \sum_{j=\min(\dagger, M+1)}^{\dagger} \|y^{(j)}\|_{L^2(0,1)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

تعریف ۵. شبه نرم به صورت (۱۶) و (۱۷) است [۸]:

$$\|y\|_{H^{s, \dagger; M; N}(0,1)} = \left( \sum_{j=\min(\dagger, M+1)}^{\dagger} N^{2s-2j} \|y^{(j)}\|_{L^2(0,1)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

$$\|y\|_{H^{s, \dagger; M; N}(0,1)} = N^{s-\dagger} \|y^{(\dagger)}\|_{L^2(0,1)}, \quad (17)$$

که  $M \geq \dagger - 1$  و اگر  $N = 1$  باشد آن‌گاه  $\|\cdot\|_{H^{s, \dagger; M; N}}$  با  $\|\cdot\|_{H^{\dagger; M}}$  برابری می‌کند [۸].

### ۱. خطای تقریب

در این بخش، کران خطای تقریب با توابع تکه‌ای تیلور کسری را به دست می‌آوریم.

قضیه ۱. فرض کنید  $y \in H^{\dagger}(0,1)$  با  $\dagger \geq 0$  و  $M \geq \dagger - 1$ ، اگر  $P_{M-1}^{2^{k-1}} y = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=1}^{2^{k-1}} c_{nm} W_{nm}^{(\tau)}$

بهترین تقریب از  $y$  باشد آن‌گاه

$$\|y - P_{M-1}^{2^{k-1}} y\|_{L^2(0,1)} \leq c(M-1)^{-\tau} 2^{-\tau(k-1)} \|y^{(\tau)}\|_{L^2(0,1)}, \quad (18)$$

و برای ثابت  $s$  که  $1 \leq s < \dagger$  داریم:

$$\|y - P_{M-1}^{2^{k-1}} y\|_{H^s(0,1)} \leq c(M-1)^{2s-\frac{1}{2}-\dagger} 2^{(s-\tau)(k-1)} \|y^{(\tau)}\|_{L^2(0,1)}, \quad (19)$$

که  $c$  وابسته به  $\dagger$  است.

اثبات: اگر قرار دهیم  $y \in H^{\dagger}(0,1)$  با  $\dagger \geq 0, M \geq \dagger - 1$  و  $\sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N c_{nm} b_{nm}$  بهترین تقریب از  $y$  باشد که با

استفاده از ترکیب توابع بلاک-پالس و چندجمله‌ای‌های برنولی  $b_{nm}, n=1, 2, \dots, N; m=0, 1, \dots, M$  در بازه  $[0,1]$  ساخته می‌شود، آن‌گاه داریم:

$$\|y - \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N c_{nm} b_{nm}\|_{L^2(0,1)} \leq cM^{-\dagger} N^{-\dagger} \|y^{(\dagger)}\|_{L^2(0,1)}, \quad (20)$$

و برای  $1 \leq s < \dagger$  داریم:

$$\|y - \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N c_{nm} b_{nm}\|_{H^s(0,1)} \leq cM^{2s-\frac{1}{2}-\dagger} N^{s-\dagger} \|y^{(\dagger)}\|_{L^2(0,1)}. \quad (21)$$

چون بهترین تقریب یکتا است [۵]، هم‌چنین برای توابع تکه‌ای تیلور داریم:

$$n = 1, 2, \dots, 2^{k-1}; m = 0, 1, \dots, M-1.$$

در نتیجه از رابطه‌های (۲۰) و (۲۱) به دست می‌آوریم:

$$\|y - P_{M-1}^{2^{k-1}} y\|_{L^2(0,1)} = \|y - \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=1}^{2^{k-1}} c_{nm} b_{nm}\|_{L^2(0,1)} \leq c(M-1)^{-\tau} 2^{-\tau(k-1)} \|y^{(\tau)}\|_{L^2(0,1)}, \quad (22)$$

و برای  $1 \leq s < \dagger$  داریم:

$$\|y - P_{M-1}^{2^{k-1}} y\|_{H^s(0,1)} = \|y - \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=1}^{2^{k-1}} c_{nm} b_{nm}\|_{H^s(0,1)} \leq c(M-1)^{2s-\frac{1}{2}-\dagger} 2^{(s-\tau)(k-1)} \|y^{(\tau)}\|_{L^2(0,1)}. \quad (23)$$

لم ۱: فرض کنید که  $y \in H^{\dagger}(0,1)$  با  $\dagger \geq 0$  و  $M \geq \dagger - 1$  باشد. اگر  $P_{M-1}^{2^{k-1}} y = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=1}^{2^{k-1}} c_{nm} W_{nm}^{(\tau)}$  بهترین تقریب

تابع  $y$  باشد آن‌گاه داریم.

$$\|y(q) - P_{M-1}^{2\ddagger-1} y(q)\|_{L^2(0,1)} \leq c'(M-1)^{-\tau} 2^{-\tau(k-1)} \|y^{(\tau)}(q)\|_{L^2(0,1)},$$

و برای  $1 \leq s < \ddagger$  داریم:

$$\|y(q) - P_{M-1}^{2\ddagger-1} y(q)\|_{H^s(0,1)} \leq c'(M-1)^{2s-\frac{1}{2}-\ddagger} 2^{(s-\tau)(k-1)} \|y^{(\tau)}(q)\|_{L^2(0,1)}.$$

اثبات: این یک نتیجه‌گیری از قضیه ۱ است.

### ۲. کران خطای مشتق کسری

قضیه ۲: فرض کنید  $y \in H^\ddagger(0,1)$  با  $M \geq \ddagger - 1$  و  $\ddagger \geq 1$  و  $0 < r \leq 1$  باشد. آن‌گاه داریم:

$$\|D^\alpha y - D^\alpha (P_{M-1}^{2\ddagger-1} y)\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{c}{\Gamma(2-r)} (M-1)^{2s-\frac{1}{2}-\ddagger} 2^{(s-\tau)(k-1)} \|y^{(\tau)}\|_{L^2(0,1)},$$

که  $1 \leq s < \ddagger$  است.

اثبات: با استفاده از رابطه

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_p,$$

و ویژگی‌های مشتق و انتگرال کسری داریم:

$$\begin{aligned} \|D^\alpha y - D^\alpha (P_{M-1}^{2\ddagger-1} y)\|_{L^2(0,1)} &= \|I^{1-\alpha} (Dy - D(P_{M-1}^{2\ddagger-1} y))\|_{L^2(0,1)} \\ &= \left\| \frac{1}{t^\alpha \Gamma(1-\alpha)} * (Dy - D(P_{M-1}^{2\ddagger-1} y)) \right\|_{L^2(0,1)} \leq \left( \frac{1}{(1-r)\Gamma(1-r)} \right)^2 \|Dy - D(P_{M-1}^{2\ddagger-1} y)\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq \left( \frac{1}{\Gamma(2-r)} \right)^2 \|y - P_{M-1}^{2\ddagger-1} y\|_{H^r(0,1)} \leq \left( \frac{1}{\Gamma(2-r)} \right)^2 c^2 (M-1)^{4s-1-2\ddagger} 2^{2(s-\ddagger)(k-1)} \|y^{(\tau)}\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

با جذر گرفتن از طرفین رابطه مذکور قضیه ثابت می‌شود.

لم ۲: فرض کنید  $y \in H^\ddagger(0,1)$  با  $M \geq \ddagger - 1$  و  $\ddagger \geq 1$  و  $0 < r \leq 1$  باشد، آن‌گاه داریم:

$$\|D^\alpha y(\phi) - D^\alpha (P_{M-1}^{2\ddagger-1} y(\phi))\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{c'}{\Gamma(2-r)} (M-1)^{2s-\frac{1}{2}-\ddagger} 2^{(s-\tau)(k-1)} \|y^{(\tau)}(\phi)\|_{L^2(0,1)},$$

که  $1 \leq s < \ddagger$  است.

اثبات: این یک نتیجه‌گیری از قضیه ۲ است.

### ۳. کران خطای روش

قضیه ۳: فرض کنید  $y \in H^\ddagger(0,1)$  با  $M \geq \ddagger - 1$  و  $\ddagger \geq 1$  و  $2s \leq \ddagger$  و  $f$  در معادله (۱) در شرط لیپ شیتز با

ثابت لیپ شیتز  $\lambda$  صدق کند، آن‌گاه کران خطای روش بدین‌صورت است:

$$\begin{aligned} \|E_{M-1}^{2\ddagger-1}\|_{L^2(0,1)} &\leq \frac{c}{\Gamma(2-r)} (M-1)^{2s-\frac{1}{2}-\ddagger} 2^{(s-\tau)(k-1)} \|y^{(\tau)}\|_{L^2(0,1)} \\ &+ y c (M-1)^{-\ddagger} 2^{-(k-1)} \|y^{(\tau)}\|_{L^2(0,1)} \\ &+ y c' (M-1)^{-\ddagger} 2^{-(k-1)} \|y^{(\tau)}(q)\|_{L^2(0,1)} \\ &+ y \frac{c'}{\Gamma(2-r)} (M-1)^{2s-\frac{1}{2}-\ddagger} 2^{(s-\tau)(k-1)} \|y^{(\tau)}(\phi)\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

اثبات: می‌دانیم:

$$\|E_{M-1}^{2^{k-1}}\|_{L^2(0,1)} = \|D^\alpha y - f(y, y(q), D^\Gamma y(W)) - D^\Gamma (P_{M-1}^{2^{k-1}}y) + f(P_{M-1}^{2^{k-1}}y, P_{M-1}^{2^{k-1}}y(q), D^\Gamma (P_{M-1}^{2^{k-1}}y(W)))\|_{L^2(0,1)},$$

با استفاده از معادله (۱) و قضایای ۱ و ۲ و لم‌های ۱ و ۲ داریم:

$$\begin{aligned} \|E_{M-1}^{2^{k-1}}\|_{L^2(0,1)} &\leq \|D^\alpha y - D^\alpha (P_{M-1}^{2^{k-1}}y)\|_{L^2(0,1)} + \eta \|y - P_{M-1}^{2^{k-1}}y\|_{L^2(0,1)} \\ &+ \eta \|y(q) - P_{M-1}^{2^{k-1}}y(q)\|_{L^2(0,1)} + \eta \|D^\alpha y(\phi) - D^\alpha (P_{M-1}^{2^{k-1}}y(\phi))\|_{L^2(0,1)} \\ &\leq \frac{c}{\Gamma(2-\Gamma)} (M-1)^{2s-\frac{1}{2}-t} 2^{(s-t)(k-1)} \|y^{(\Gamma)}\|_{L^2(0,1)} + \eta c (M-1)^{-t} 2^{-t(k-1)} \|y^{(\Gamma)}\|_{L^2(0,1)} \\ &+ \eta c' (M-1)^{-t} 2^{-t(k-1)} \|y^{(\Gamma)}(q)\|_{L^2(0,1)} + \eta \frac{c'}{\Gamma(2-\Gamma)} (M-1)^{2s-\frac{1}{2}-t} 2^{(s-t)(k-1)} \|y^{(\Gamma)}(\phi)\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

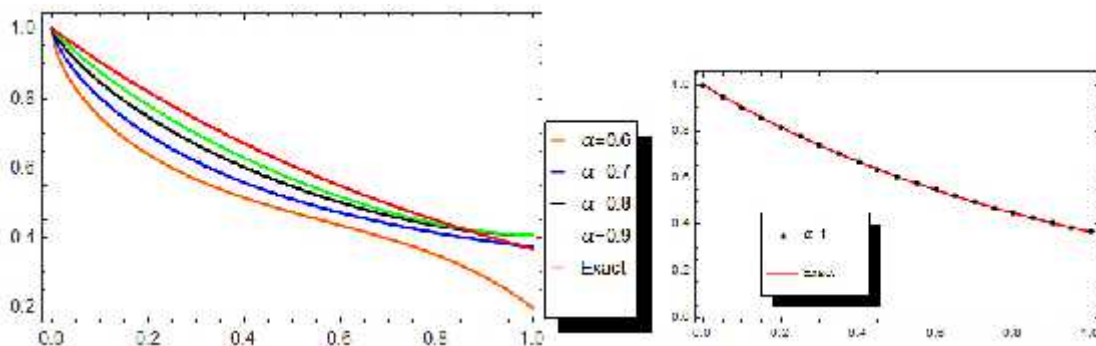
### مثال‌های عددی

در این بخش، چند مثال عددی برای نشان دادن کاربرد و دقت روش آورده می‌شود.

مثال ۱. معادله دیفرانسیل تأخیری کسری (۲۴) را در نظر بگیرید [۳]:

$$\begin{cases} D^\Gamma y(t) + e^t D^\Gamma y(t - \sin(t^2)) + \cos(t)y(t - \sin(t)) = -e^{-t} - e^{\sin(t^2)} \\ + \cos(t)e^{\sin(t)-t}, \quad 0 \leq t \leq \frac{f}{e}, 0 < \Gamma \leq 1, \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (24)$$

جواب دقیق وقتی  $\Gamma = 1$  برابر است با  $y(t) = e^{-t}$ . در جدول ۱، خطای مطلق روش حاضر را برای  $M = 10, k = 2, \Gamma = 1$  با روش تقریبی [۳] مقایسه می‌کنیم. شکل ۱، جواب‌های عددی روش حاضر برای  $M = 8, k = 1$  و مقادیر مختلف  $\Gamma$  و جواب دقیق را نشان می‌دهد. از شکل ۱، نتیجه می‌گیریم که وقتی  $\Gamma$  به یک میل می‌کند، نتایج عددی به جواب دقیق میل می‌کند. همچنین کران خطای تقریب و کران خطای روش برای  $\dagger = M + 1$  در جدول ۱ آورده شده است.



شکل ۱. مقایسه جواب تقریبی و جواب دقیق  $y$  برای  $M = 8, k = 1$  و مقادیر مختلف  $\Gamma$  برای مثال ۱



جدول ۱. مقایسه خطای مطلق با [۳] رای  $k=2, r=1$  برای مثال ۱

$t$	مرجع [۳]	روش حاضر	
		$M=10$	$M=14$
0	$0.2 \times 10^{-7}$	0	0
$\frac{f}{10e}$	$0.1 \times 10^{-7}$	$0.9 \times 10^{-14}$	$0.1 \times 10^{-15}$
$\frac{f}{5e}$	$0.1 \times 10^{-7}$	$0.9 \times 10^{-13}$	0
$\frac{3f}{10e}$	$0.1 \times 10^{-7}$	$0.4 \times 10^{-11}$	$0.1 \times 10^{-15}$
$\frac{2f}{5e}$	0	$0.7 \times 10^{-10}$	$0.4 \times 10^{-15}$
$\frac{f}{2e}$	$0.1 \times 10^{-7}$	$0.7 \times 10^{-9}$	$0.1 \times 10^{-13}$
$\frac{3f}{5e}$	0	$0.4 \times 10^{-8}$	$0.1 \times 10^{-12}$
$\frac{7f}{10e}$	$0.2 \times 10^{-7}$	$0.2 \times 10^{-7}$	$0.1 \times 10^{-11}$
$\frac{4f}{5e}$	$0.1 \times 10^{-7}$	$0.7 \times 10^{-7}$	$0.7 \times 10^{-11}$
$\frac{9f}{10e}$	$0.2 \times 10^{-7}$	$0.2 \times 10^{-6}$	$0.4 \times 10^{-10}$
$\frac{f}{e}$	0	$0.7 \times 10^{-6}$	$0.1 \times 10^{-9}$
کران خطای تقریب	-	$0.1 \times 10^{-15}$	$0.3 \times 10^{-23}$
کران خطای روش	-	$0.1 \times 10^{-13}$	$0.8 \times 10^{-21}$

مثال ۲. معادله دیفرانسیل تأخیر کسری غیرخطی زیر را در نظر بگیرید [۳]:

$$\begin{cases} D^r y(t) + \sqrt{\cos(t)} D^r y(\sqrt{t}) + (\sin(\sqrt{t}) + e^t) y(\sin(t)) = e^t + \sqrt{\cos(t)} e^{\sqrt{t}} \\ + (\sin(\sqrt{t}) + e^t) e^{\sin(t)}, \quad 0 \leq t \leq 1, 0 < r \leq 1, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

جواب دقیق وقتی  $r=1$  برابر است با  $y(t) = e^t$ . در جدول ۲، خطای مطلق روش حاضر برای  $M=10, 14, k=2$  و  $r=1$  با روش تقریبی در [۳] مقایسه می‌شود. رفتار جواب‌های عددی این مسئله برای  $M=10, k=1$  و مقادیر مختلف  $r$  در شکل ۲ مشخص می‌شود. این شکل نشان می‌دهد که بسط سری  $y(t)$  سرعت همگرایی خوبی دارد. همچنین کران خطای تقریب و کران خطای روش برای  $\dagger = M + 1$  در جدول ۲ آورده شده است.

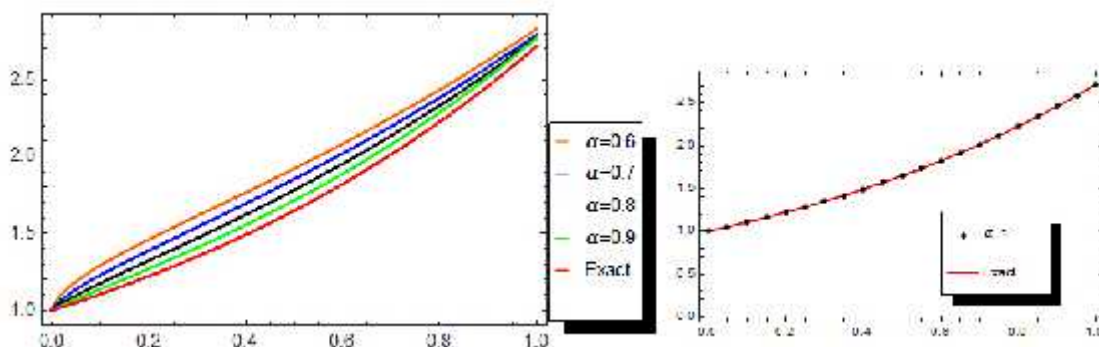
مثال ۳. معادله دیفرانسیل تأخیری کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} D^r y(t) + \sqrt{t} (D^r y(e^{-\frac{1}{2}}) - y(\sqrt{t}e^{-t}) + y(t)) = \cos(t) + \sqrt{t} (\cos(e^{-\frac{1}{2}}) \\ - \sin(\sqrt{t}e^{-t}) + \sin(t)), \quad 0 \leq t \leq 1, 0 < r \leq 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

جواب دقیق وقتی  $\Gamma = 1$  برابر است با  $y(t) = \sin(t)$ . در جدول ۳، خطای مطلق روش حاضر برای  $M = 13, 15$  و  $k = 2$  با روش تقریبی در [۳] مقایسه می‌شود. همچنین شکل ۳ نتایج عددی در  $M = 11, k = 1$  برای مقادیر متفاوت  $\Gamma$  و جواب دقیق در  $\Gamma = 1$  رسم می‌کند. همچنین کران خطای تقریب و کران خطای روش برای  $\dagger = M + 1$  در جدول ۳ آورده شده است.

جدول ۲. مقایسه خطای مطلق با [۳] برای  $k=2, \Gamma=1$  برای مثال ۲

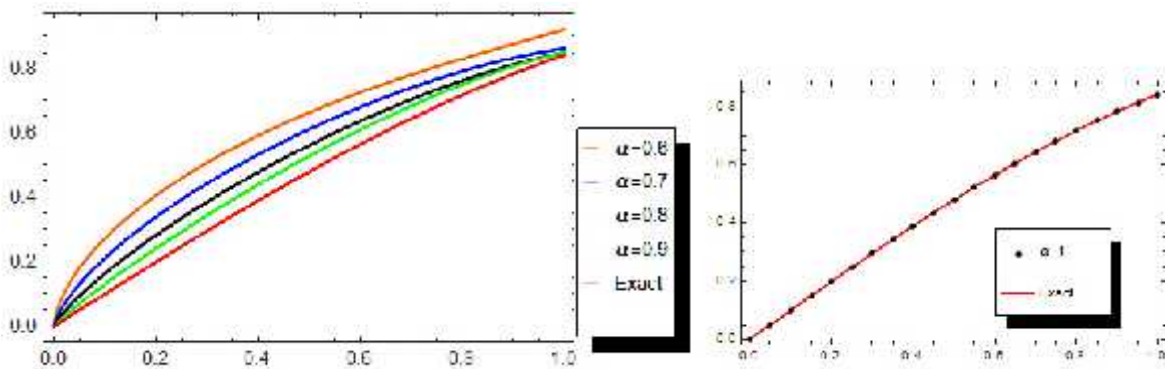
t	مرجع [۳]	روش حاضر	
		M = 10	M = 14
0/00	.	.	.
0/06	$\cdot/2 \times 10^{-7}$	$\cdot/8 \times 10^{-11}$	$\cdot/2 \times 10^{-15}$
0/15	$\cdot/2 \times 10^{-7}$	$\cdot/2 \times 10^{-10}$	$\cdot/2 \times 10^{-15}$
0/20	$\cdot/2 \times 10^{-7}$	$\cdot/9 \times 10^{-11}$	$\cdot/2 \times 10^{-15}$
0/28	$\cdot/1 \times 10^{-7}$	$\cdot/2 \times 10^{-10}$	$\cdot/4 \times 10^{-15}$
0/34	$\cdot/2 \times 10^{-7}$	$\cdot/3 \times 10^{-10}$	$\cdot/4 \times 10^{-15}$
0/41	$\cdot/3 \times 10^{-7}$	$\cdot/4 \times 10^{-10}$	$\cdot/4 \times 10^{-15}$
0/47	$\cdot/3 \times 10^{-7}$	$\cdot/6 \times 10^{-10}$	.
0/55	$\cdot/1 \times 10^{-7}$	$\cdot/2 \times 10^{-9}$	$\cdot/2 \times 10^{-15}$
0/64	$\cdot/2 \times 10^{-7}$	$\cdot/9 \times 10^{-9}$	$\cdot/2 \times 10^{-14}$
0/69	$\cdot/1 \times 10^{-7}$	$\cdot/2 \times 10^{-8}$	$\cdot/7 \times 10^{-14}$
0/76	.	$\cdot/5 \times 10^{-8}$	$\cdot/3 \times 10^{-13}$
0/85	$\cdot/1 \times 10^{-7}$	$\cdot/2 \times 10^{-7}$	$\cdot/1 \times 10^{-12}$
0/91	$\cdot/1 \times 10^{-7}$	$\cdot/3 \times 10^{-7}$	$\cdot/4 \times 10^{-12}$
1/00	.	$\cdot/8 \times 10^{-7}$	$\cdot/1 \times 10^{-11}$
کران خطای تقریب	-	$\cdot/2 \times 10^{-15}$	$\cdot/1 \times 10^{-22}$
کران خطای روش	-	$\cdot/2 \times 10^{-13}$	$\cdot/1 \times 10^{-20}$



شکل ۲. جواب‌های تقریبی و دقیق y برای  $M = 10, k = 1$  و مقادیر مختلف  $\Gamma$  برای مثال ۲

جدول ۳. مقایسه خطای مطلق با [۳] برای  $k=2, r=1$  برای مثال ۳

$t$	مرجع [3]	روش حاضر	
		$M = 13$	$M = 15$
۰	۰	۰	۰
$\frac{1}{6}$	$0.1 \times 10^{-7}$	$0.1 \times 10^{-14}$	$0.3 \times 10^{-15}$
$\frac{1}{3}$	$0.1 \times 10^{-7}$	$0.2 \times 10^{-14}$	$0.4 \times 10^{-15}$
$\frac{1}{2}$	$0.2 \times 10^{-7}$	$0.2 \times 10^{-14}$	$0.4 \times 10^{-15}$
$\frac{2}{3}$	$0.4 \times 10^{-7}$	$0.3 \times 10^{-14}$	$0.4 \times 10^{-15}$
$\frac{5}{6}$	$0.4 \times 10^{-7}$	$0.7 \times 10^{-14}$	$0.1 \times 10^{-14}$
۱	$0.4 \times 10^{-7}$	$0.4 \times 10^{-13}$	$0.2 \times 10^{-13}$
کران خطای تقریب	-	$0.2 \times 10^{-21}$	$0.3 \times 10^{-25}$
کران خطای روش	-	$0.5 \times 10^{-19}$	$0.1 \times 10^{-22}$



شکل ۳. مقایسه جواب تقریبی و جواب دقیق  $y$  برای  $k=1, M=11$  و مقادیر مختلف  $r$  برای مثال ۳

### نتیجه‌گیری

در این مقاله تابع‌های تکه‌ای براساس توابع تیلور کسری برای حل عددی معادلات دیفرانسیل تأخیری کسری ساخته می‌شوند. یک فرمول‌بندی کلی برای ماتریس عملیاتی انتگرال کسری این توابع نتیجه گرفته می‌شود. این ماتریس و روش هم‌مکانی برای حل عددی مسائل موردنظر به کار می‌رود. نتایج به دست آمده با روش پیشنهاد شده کارایی و توانایی روش ما را برای حل مسائل تأخیری کسری نشان می‌دهد. از جمله خواص توابع معرفی شده می‌توان به این موارد اشاره کرد:

- توابع کسری معادلات مرتبه کسری را با دقت بیش‌تری تقریب می‌زنند.
- توابع معرفی شده دارای سه درجه آزادی هستند ولی چند جمله‌ای‌ها دارای یک درجه آزادی هستند.
- ماتریس عملیاتی حاصل یک ماتریس تنک است در نتیجه زمان اجرای برنامه کوتاه می‌باشد.

## تشکر و قدردانی

از پیشنهادهای ارزشمند داوران محترم که باعث ارتقاء سطح مقاله شده، تشکر و سپاس‌گزاری می‌شود.

## منابع

1. Doha E. H., Bhrawy A. H., Ezz-Eldien S. S., "An efficient Legendre spectral tau matrix formulation for solving fractional subdiffusion and reaction subdiffusion equations", *J. Comput. Nonlinear Dyn* 10 (2) 021019 (2015) 1-021018.
2. Garg M., Manohar P., "Matrix method for numerical solution of space-time fractional diffusion-wave equations with three space variables", *Afr. Mat.* 25 (1) (2014) 161-181.
3. Karimi Vanani S., Aminataei A., "On the numerical solution of neutral delay differential equations using multiquadric approximation scheme, *Bull. Korean Math. Soc.*, 45, (2008) 663-670.
4. Laskin N., "Fractional quantum mechanics", *Phys. Rev. E.*, 62, (2003) 3135-3145.
5. Kreyszig E., "Introductory Functional Analysis with Applications", John Wiley and Sons, New York, NY, USA (1978).
6. Krishnasamy V.S., Mashayekhi S., Razzaghi M., "Numerical solutions of fractional differential equations by using fractional Taylor basis", *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 4 (1) (2017) 98-106.
7. Li Y., Zhao W., "Haar wavelet operational matrix of fractional order integration and its applications in solving the fractional order differential equations", *Appl. Math. Comput.* 216, (2010) 2276-2285.
8. Mashayekhi S., Razzaghi M., Wattanataweekul M., "Analysis of multi-delay and piecewise constant delay systems by hybrid functions approximation", *Differential Equations and Dynamical Systems*. 24, (1) (2016) 1-24.
9. Moghaddam B. P., Mostaghim Z. S., "A matrix scheme based on fractional finite difference method for solving fractional delay differential equations with boundary conditions", *New Trends in Mathematical Sciences*, 2, (2015) 13-23.
10. Moghaddam B. P., Mostaghim Z.S., "A novel matrix approach to fractional finite difference for solving models based on nonlinear fractional delay differential equations", *Ain Shams Engineering Journal* 5, (2014) 585-594.
11. Moghaddam B. P., Mostaghim Z. S., "A numerical method based on finite difference for solving fractional delay differential equations", *J. Taibah. Univ. Sci.*, 7, (2013) 120-127.
12. Ordokhani Y., "An Application of Walsh functions for Fredholm-Hammerstein integro-

- differential equations, *Int. J. Contemp. Math. Sciences* 5 (22) (2010) 1055-1063.
- 13.. Ordokhani Y., "Solution of nonlinear Volterra-Fredholm-Hammerstein integral equations via rationalized Haar functions", *Appl. Math. Comput*, 180, (2006) 436-443.
  14. Petras I., "Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation", Higher Education Press, Beijing (2011).
  15. Pimenov V. G., Hendy A. S., "Numerical studies for fractional functional differential equations with delay based on BDF-Type shifted chebyshev approximations", *Abstract and Applied Analysis* (2015) 1-12.
  16. Rahimkhani P., Ordokhani Y., Babolian E., "A new operational matrix based on Bernoulli wavelets for solving fractional delay differential equations", *Numer. Algor*, 74 (1) (2017) 223-245.
  17. Rahimkhani P., Ordokhani Y., Babolian E., "Fractional-order Bernoulli functions and their applications in solving fractional Fredholm-Volterra integro-differential equations", *Appl. Numer. Math.*, 122 (2017) 66-81.
  18. Rahimkhani P., Ordokhani Y., Babolian E., "Fractional-order Bernoulli wavelets and their applications", *Appl. Math. Model.*, 40 (2016) 8087-8107.
  19. Rahimkhani P., Ordokhani Y., Babolian E., "Muntz-Legendre wavelet operational matrix of fractional-order integration and its applications for solving the fractional pantograph differential equations", *Numer. Algor.*, 77 (4) (2018) 1283-1305.
  20. Rahmani Fazli H., Hassani F., Ebadian A., Khajehnasiri A. A., "National economies in state-space of fractional-order financial system", *Afr. Mat.*, 27 (3-4) (2016) 529-540.
  21. Saeed U., Rehman M., "Modified Chebyshev wavelet methods for fractional delay-type equations", *Appl. Math. Comput*, 264 (2015) 431-442.
  22. Saichev A. I., Zaslavsky G. M., "Fractional kinetic equations: solutions and applications", *Chaos* 7, (1997) 753-764.
  23. Samiei E., Butcher E. A., Sanyal A. K., Paz R., "Attitude stabilization of rigid spacecraft with minimal attitude coordinates and unknown time-varying delay", *Aerospace Science and Technology*, 46 (2015) 412-421.
  24. Segalman D. J., Butcher E. A., "Suppression of regenerative chatter via impedance modulation", *J. Vib. Control* 6, (2000) 243-256.
  25. Tarasov V. E., "Fractional variations for dynamical systems: Hamilton and Lagrange approaches", *J. Phys. A. Math. Gen.* 39 (2006) 8409-8425.
  26. Wang Z., "A numerical method for delayed fractional-order differential equations", *J. Appl. Math.*, (2013) 1-7.
  27. Wang H., Du N., "Fast alternating-direction finite difference methods for three dimensional

- space-fractional diffusion equations", *J. Comput. Phys.* 258 (2014) 305-318.
28. Xiea W., Xiaob J., Luo Z., "Existence of extremal solutions for nonlinear fractional differential equation with nonlinear boundary conditions", *Appl. Math. Lett.* 41 (2015) 46-51.
29. Yang Z., Cao J., "Initial value problems for arbitrary order fractional differential equations with delay", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18 (2013) 2993-3005.
30. Yang X., Zhang H., Xu D., "Orthogonal spline collocation method for the two-dimensional fractional sub-diffusion equation", *J. Comput. Phys.* 256 (2014) 824-837.
31. Zhu L., Fan Q., "Solving fractional nonlinear Fredholm integro-differential equations by the second kind Chebyshev wavelet", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 17 (2012) 2333-2341.
32. Zhuang P., Liu F., Turner I., Gu Y. T., "Finite volume and finite element methods for solving a one-dimensional space-fractional Boussinesq equation", *Appl. Math. Model.* 38 (2014) 3860-3870.