مترهای کروپینای به طور همدیس داگلاسی

نگین یوسف لاوی، ابوالفضل بهزادی*
دانشگاه مازندران، دانشکدهٔ ریاضی

دریافت ۹۸/۰۶/۱۱ پذیرش ۹۸/۱۱/۱۴

چکیده

در این مقاله مترهای کروپینا داگلاسی مورد بررسی قرار میگیرند و به طور خاص مترهای کروپینا داگلاسی و بروالد ضعیف مشخص می‌شوند. همچنین مترهای کروپینا به طور همدیس داگلاسی و به طور همدیس بروالد ضعیف را مشخص می‌کنیم. در آخر ساختار موضعی مترهای کروپینا داگلاسی از نوع انحنای پرچمی ایزوتروپیک ضعیف را تعیین می‌نماییم.

واژه های کلیدی: متر کروپینا، متر کروپینا داگلاسی، متر کروپینا بروالد ضعیف همدیس، اطلاعات ناوبری، انحنای پرچمی.

۱. مقدمه

اگر F یک متر فینسلری روی خمینهٔ هموار M و $G = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - G^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ اسپری وابسته به F باشد که در آن $G^i(x,y) = \frac{1}{4} g^{il}\{[F^2]_{x^k y^l} y^k - [F^2]_{x^l}\}$ ضرایب اسپری حاصل از متریک F و $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$ است. تانسور بروالد[1] و تانسور داگلاس[2] به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$B^i_{jkl} = \frac{\partial^3 G^i}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l} \quad , \qquad D^i_{jkl} = \frac{\partial^3}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l}\left(G^i - \frac{1}{n+1}\frac{\partial G^m}{\partial y^m} y^i\right)$$

$B = B^i_{jkl}\, dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}$ را انحنای بروالد و $D = D^i_{jkl}\, dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}$ را انحنای داگلاس گوییم. متر F را بروالدی می‌نامیم هرگاه $B = 0$ و F را داگلاسی گوییم هرگاه $D = 0$. در سال ۱۹۹۷ مفهوم فضای داگلاسی ابتدا به عنوان تعمیمی از فضای بروالدی معرفی شد.[۱]

همچنین تانسور بروالد میانگین نیز به صورت $E = E_{ij} dx^i \otimes dx^j$ تعریف می‌شود به طوری که

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j}\left(\frac{\partial G^m}{\partial y^m}\right)$$

*نویسنده مسئول: behzadi@umz.ac.ir

[1] Berwald tensor
[2] Douglas tensor

متر فینسلری F را بروالد ضعیف می‌نامیم هرگاه $E=0$ [۲].

مترهای (α,β) یکی از مهم ترین مثال‌های متر فینسلری با کاربرد فراوان هستند و به صورت $F=\alpha\emptyset(s)$ بیان می‌شوند که در آن $s=\frac{\alpha}{\beta}$ ، $\alpha(x,y)=\sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ یک متر ریمانی و $\beta=b_i(x)y^i$ یک ۱-فرم خطی روی M و $\varphi(s)$ یک تابع مثبت از رده C^∞ می‌باشند. در حالت خاص با فرض $\varphi(s)=\frac{1}{s}$ خواهیم داشت $F=\frac{\alpha^2}{\beta}$ که متر کروپینا[۳] نام نهاده شد، این متر ابتدا توسط بروالد معرفی شد و سپس توسط کروپینا [۳] در سال ۱۹۶۱مورد بررسی بیشتری قرار گرفت. متر کروپینا را می‌توان به عنوان جواب مسئله ناوبری $h(x,\frac{y}{F}-W)=1$ در فضای ریمانی (M,h) تحت نیروی بیرونی W با $|W|_h=1$ (طول میدان برداری W نسبت به متر ریمانی h) در نظر گرفت. فرض می‌کنیم $h=\sqrt{h_{ij}(x)y^iy^j}$ متر ریمانی و $W=W^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ یک میدان برداری روی M باشند. جواب مسئله ناوبری $h(x,\frac{y}{F}-W)=1$ یک متر کروپینا به صورت $F=\frac{h^2(x,y)}{2W_0}$ است به طوری که $W_0:=W_iy^i$ و $W_i:=h_{ij}W^j$. اگر $a_{ij}(x)=e^{-2\rho(x)}h_{ij}(x)$ و $b_i(x)=e^{-2\rho(x)}W_i(x)$ را در نظر بگیریم که در آن ρ یک تابع اسکالر تعریف شده روی M باشد و در رابطه $e^{2\rho}b^2=4$ صدق می‌کند. خواهیم داشت $F(x,y)=\frac{\alpha^2(x,y)}{\beta(x)}$ و برعکس اگر قرار دهیم $h_{ij}=e^{2\rho}a_{ij}$، $W_i=\frac{1}{2}e^{2\rho}b_i$، $b:=\|\beta\|_\alpha$ (طول β نسبت به متر ریمانی α)، در این صورت جواب مسئله ناوبری متر کروپینا $F=\frac{\alpha^2}{\beta}$ می‌باشد. زوج (h,W) با $|W|_h=1$ را اطلاعات ناوبری[۴] متر کروپینا می‌نامیم. اینک قرار می‌دهیم:

$$R_{ij}=\frac{1}{2}(W_{i|j}+W_{j|i})\,,\quad S_{ij}=\frac{1}{2}=(W_{i|j}-W_{j|i})$$

$$R_j=W^iR_{ij},\ S_j=W^iS_{ij},\ R=W^iR_i.$$

نماد "|" نشان دهنده مشتق کواریان افقی نسبت به متر ریمانی h می‌باشد.

در سال ۲۰۱۵، چنگ[5] ثابت کرد که متر کروپینا $F=\frac{\alpha^2}{\beta}$ با اطلاعات ناوبری (h,W) یک متر بروالد است اگر و تنها اگر $R_{ij}=Rh_{ij}$ و $S_{ij}=W_iS_j-W_jS_i$. [۴]

اگر مشتق کواریان افقی نسبت به α را با ";" نمایش دهیم، قرار می‌دهیم:

$$r_{ij}=\frac{1}{2}(b_{i;j}+b_{j;i})\,,\quad s_{ij}=\frac{1}{2}(b_{i;j}-b_{j;i})$$

همچنین قرارداد می‌کنیم:

[3] Kropina metric
[4] Navigation data
[5] Cheng

$$r_j = b^i r_{ij},\ s_j = b^i s_{ij},\ r = b^i r_i.$$

از آن‌جا که $\alpha = e^{-\rho} h$ رابطهٔ بین ضرایب اسپری متر ریمانی α ($\bar{G}^m$) و ضرایب اسپری متر ریمانی h (G^m) به صورت زیر می‌باشد: [۴]

$$\bar{G}^m = G^m - \rho_0 y^m + \frac{h^2}{2}\rho^m$$

$$\bar{G}_i^m = G_i^m - \rho_i y^m - \rho_0 \delta_i^m + (\frac{h^2}{2})_{y^i}\rho^m$$

$$\bar{G}_{ij}^m = G_{ij}^m - \rho_i \delta_j^m - \rho_j \delta_i^m + h_{ij}\rho^m$$

که در آن $\rho_0 = \rho_i y^i$ ، $\rho_i = \frac{\partial \rho}{\partial x^i}$ و $\rho^m = h^{ml}\rho_m$، همچنین $\bar{G}_j^i = \frac{\partial \bar{G}^i}{\partial y^j}$ و $\bar{G}_{jk}^i = \frac{\partial \bar{G}^i}{\partial y^j \partial y^k}$.
اینک از آن‌جاکه

$$b_{i;j} = \frac{\partial b_i}{\partial x^i} - b_s \bar{G}_{ij}^s = 2e^{-2\rho}(W_{i|j} - \rho_j W_i + \rho_i W_j - h_{ij}\rho^m W_m)$$

خواهیم داشت:

$$s_{ij} = 2e^{-2\rho}(S_{ij} - \rho_j W_i + \rho_i W_j) \tag{۱}$$

و

$$r_{ij} = 2e^{-2\rho}(R_{ij} - h_{ij}\rho^m W_m) \tag{۲}$$

در این مقاله مترهای کروپینا را مورد توجه قرار داده ایم. در بخش بعد قضیه هایی که در ادامه می‌آیند را ثابت می‌کنیم، در بخش سوم شرط های معادل برای مترهای کروپینا داگلاسی همدیس و بروالد ضعیف همدیس را می‌آوریم، سپس در بخش چهارم ساختار موضعی مترهای کروپینا داگلاسی با انحنای پرچمی ایزوتروپیک ضعیف را تعیین خواهیم کرد.

قضیهٔ ۱٫۱. متر کروپینا $F = \frac{\alpha^2}{\beta}$ با اطلاعات ناوبری (h, W) یک متر داگلاسی است اگر وتنها اگر

$$S_{ij} = W_i S_j - W_j S_i.$$

قضیهٔ ۲،۱. متر کروپینا $F=\frac{\alpha^2}{\beta}$ با اطلاعات ناوبری (h,W) یک متر بروالد ضعیف است اگر و تنها اگر

$$R_{ij}=Rh_{ij}.$$

۲. مترهای کروپینا بروالدی

در این بخش به اثبات قضیه های بخش قبل می‌پردازیم. فرض کنیم $F=\frac{\alpha^2}{\beta}$ یک متر کروپینا با اطلاعات ناوبری (h,W) باشد، در این صورت تابع اسکالر $\rho=\rho(x)$ موجود است به طوری که:

$$h^2=e^{2\rho}\alpha^2,\ \ 2W_0=e^{2\rho}\beta\ ,\ \ b^2=4e^{-2\rho}$$

همچنین خواهیم داشت:

$$h_{ij}=e^{2\rho}a_{ij}\ ,2W_i=e^{2\rho}b_i\ ,|W|_h=W^iW_i=1$$

$$h^{ij}=e^{-2\rho}a^{ij}\ ,\ \ W^i=\frac{1}{2}b^i$$

در عبارت بالا $b^i:=a^{ij}b_j$.

اثبات قضیهٔ ۱،۱: می‌دانیم متر کروپینا $F=\frac{\alpha^2}{\beta}$ یک متر داگلاسی است اگر و تنها اگر $s_{ij}=\frac{b_is_j-b_js_i}{b^2}$. ابتدا فرض می‌کنیم متر کروپینا، داگلاسی باشد. با جایگذاری b^2 و b_i خواهیم داشت

$$s_{ij}=\frac{e^{-2\rho}W_is_j-e^{-2\rho}W_js_i}{2e^{-2\rho}}=\frac{1}{2}(W_is_j-W_js_i)$$

از طرف دیگر از (۱) داریم

$$S_{ij}-\rho_jW_i+\rho_iW_j=\tfrac{1}{4}e^{2\rho}\left(W_is_j-W_js_i\right) \tag{۳}$$

عبارت بالا را در W^iW_i ضرب کرده و خواهیم داشت

$$W_iS_j-W_i\rho_j+W_i(W^m\rho_m)W_j=\frac{1}{4}e^{2\rho}(W_is_j-W_i(W^ms_m)W_j)$$

همچنین می‌توان نوشت

$$W_jS_i-W_j\rho_i+W_j(W^m\rho_m)W_i=\frac{1}{4}e^{2\rho}(W_js_i-W_i(W^ms_m)W_j)$$

از تفاضل دو عبارت فوق داریم:

$$W_iS_j - W_jS_i - W_i\rho_j + W_j\rho_i = \frac{1}{4}e^{2\rho}(W_is_j - W_js_i)$$

از مقایسهٔ عبارت بالا با (۳) حکم واضح است.

برعکس، فرض می‌کنیم $S_{ij} = W_iS_j - W_jS_i$ می‌خواهیم نشان دهیم متر کروپینا داگلاسی است. با توجه به رابطهٔ (۱) می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2}e^{2\rho}s_{ij} = W_iS_j - W_jS_i - \rho_jW_i + \rho_iW_j$$

عبارت بالا را در b^i ضرب کرده:

$$\frac{1}{2}e^{2\rho}s_j = S_j - W_j(W^mS_m) - \rho_j + (W^m\rho_m)W_j$$

سپس حاصل را در b_i ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}e^{2\rho}b_is_j = 2e^{-2\rho}(W_iS_j - W_j(W^mS_m)W_i - W_i\rho_j + W_i(W^m\rho_m)W_j)$$

در نتیجه می‌توان نوشت

$$\frac{1}{2}e^{2\rho}(b_is_j - b_js_i) = 2e^{-2\rho}(W_iS_j - W_jS_i - W_i\rho_j + W_j\rho_i)$$

از آنجاکه $b^2 = 4e^{-2\rho}$ و رابطهٔ (۱) حکم به دست می آید.■

اثبات قضیهٔ ۲,۱: متر کروپینا F بروالد ضعیف است اگر وتنها اگر $r_{ij} = 2c(x)a_{ij}$. ابتدا فرض می‌کنیم متر بروالد ضعیف باشد پس $r_{ij} = 2c(x)a_{ij} = 2e^{-2\rho}c(x)h_{ij}$ با مقایسهٔ این عبارت با (۲) می‌توان نوشت

$$R_{ij} - h_{ij}\rho^mW_m = c(x)h_{ij} \qquad (۴)$$

حال عبارت بالا را یک بار در W^i و سپس در W^j ضرب می‌کنیم.

$$R - \rho^mW_m = c(x) \qquad (۵)$$

با مقایسهٔ عبارت‌های (۴) و (۵) حکم به دست می‌آید.

برعکس، فرض می‌کنیم $R_{ij} = Rh_{ij}$. با استفاده از رابطهٔ (۲) می نویسیم

$$r_{ij} = 2e^{-2\rho}(Rh_{ij} - h_{ij}\rho^m W_m) = 2e^{-2\rho}h_{ij}(R - \rho^m W_m)$$

کافی است قرار دهیم $c(x) = R - \rho^m W_m$، خواهیم داشت $r_{ij} = 2c(x)a_{ij}$. ■

در حالت کلی می‌دانیم متر فینسلری F یک متر بروالد است، اگر وتنها اگر F متر داگلاسی و متر بروالد ضعیف باشد. بنابراین دو اثبات بالا در واقع اثبات دیگری از قضیهٔ چنگ ذکر شده در مقدمه می‌باشند.

۳. مترهای کروپینا همدیس

دو متر فینسلری F و $\tilde{F}$ روی خمینهٔ M را به طور همدیس مرتبط گوییم، هرگاه تابع اسکالر $\sigma(x)$ روی M موجود باشد به طوری‌که $\tilde{F} = e^{\sigma}F$. اگر σ ثابت باشد تبدیل همدیس را تبدیل متجانس[6] می‌نامیم (برای اطلاعات بیشتر به [۵] مراجعه کنید). یک متر فینسلری، همدیس داگلاسی (همدیس بروالد ضعیف) نامیده می‌شود، هرگاه با یک متر داگلاسی (بروالد ضعیف) به طور همدیس مرتبط باشد.

گیریم $F = \frac{\alpha^2}{\beta}$ یک متر کروپینا با اطلاعات ناوبری (h, W) باشد، در این صورت $\tilde{F} = e^{\sigma}F$ نیز یک متر کروپینا با اطلاعات ناوبری $(\tilde{h} = e^{\sigma}h\, , \tilde{W} = e^{\sigma}W)$ است و همچنین داریم:

$$\tilde{h}_{ij} = e^{2\sigma}h_{ij}\, , \qquad \tilde{W}_i = e^{\sigma}W_i$$

$$\tilde{h}^{ij} = e^{-2\sigma}h^{ij}\, , \qquad \tilde{W}^i = e^{-\sigma}W^i$$

از [۴] عبارت‌های زیر را داریم:

$$\tilde{S}_{ij} = e^{\sigma}(S_{ij} - \frac{1}{2}(W_i\sigma_j + W_j\sigma_i))$$

$$\tilde{R}_{ij} = e^{\sigma}(R_{ij} + h_{ij}W^m\sigma_m - \frac{1}{2}(W_i\sigma_j + W_j\sigma_i))$$

در نتیجه به راحتی به دست می‌آوریم:

$$\tilde{S}_{ij} - \tilde{W}_i\tilde{S}_j - \tilde{W}_j\tilde{S}_i = e^{\sigma}\left(S_{ij} - W_iS_j - W_jS_i\right) \qquad (۶)$$

$$\tilde{R}_{ij} - \tilde{R}\tilde{h}_{ij} = e^{\sigma}(R_{ij} - Rh_{ij} + h_{ij}W^m\sigma_m - \frac{1}{2}(W_i\sigma_j + W_j\sigma_i)) \qquad (۷)$$

[6] Homothetic transformation

اینک می‌توان قضیه های زیر را بیان کرد.

قضیهٔ ۱,۳: متر کروپینا $F=\frac{\alpha^2}{\beta}$ با اطلاعات ناوبری (h,W) یک متر داگلاسی همدیس است اگر وتنها اگر F یک متر داگلاسی باشد.

اثبات: با توجه به عبارت (۶) اثبات واضح است.

نتیجهٔ ۲,۳: هر تبدیل همدیس متر کروپینا داگلاسی، متجانس است.

قضیهٔ ۳,۳: متر کروپینا $F=\frac{\alpha^2}{\beta}$ با اطلاعات ناوبری (h,W) یک متر همدیس بروالد ضعیف است اگر و تنها اگر عبارت زیر برقرار باشد

$$R_{ij}=Rh_{ij}-h_{ij}W^m\sigma_m+\frac{1}{2}(W_i\sigma_j+W_j\sigma_i)$$

اثبات: با توجه به عبارت (۷) اثبات واضح است.

۴. مترهای کروپینا داگلاسی با انحنای پرچمی ایزوتروپیک ضعیف

انحنای ریمانی[7] متر فینسلری $R_y=R^i_k\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^k$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R^i_k=2\frac{\partial G^i}{\partial x^k}-\frac{\partial^2 G^i}{\partial x^m\partial y^k}y^m+2G^m\frac{\partial^2 G^i}{\partial y^m\partial y^k}-\frac{\partial G^i}{\partial y^m}\frac{\partial G^m}{\partial y^k}$$

انحنای پرچمی[8] در هندسهٔ فینسلری یک کمیت غیر ریمانی (در حالت ریمانی برابر صفر است) و یک تعمیم طبیعی از انحنای بخشی در هندسهٔ ریمانی است. انحنای پرچمی منیفلد فینسلری (M,F) تابع $K_F=K(P,y)$ می‌باشد که در آن $P=span\{y,u\}\subseteq T_xM$ یک صفحهٔ دو بعدی به نام "پرچم" است و $y\in P\backslash\{0\}$ "قطب پرچم"[9] نامیده می‌شود. K_F به صورت زیر تعریف می‌شود

$$K_F(P,y)=\frac{g_y(u,R_y(u))}{g_y(y,y)g_y(u,u)-g_y(y,u)^2}$$

که در آن $g_y=g_{ij}(x,y)dx^idx^j$.

[7] Riemann curvature
[8] Flag curvature
[9] Flag pole

یک متر فینسلری F را با انحنای پرچمی اسکالر گوییم، هرگاه $K_F = K(x,y)$ مستقل از پرچم P باشد. متر F را با انحنای پرچمی ایزوتروپیک ضعیف[10] می‌نامیم هرگاه انحنای پرچمی آن به شکل زیر باشد:

$$K(x,y) = 3\frac{\theta_i(x)y^i}{F(x,y)} + \tau(x)$$

همچنین F از انحنای پرچمی ایزوتروپیک است هرگاه $K_F = \tau(x)$. یکی از اساسی ترین مسائل در هندسهٔ فینسلری مطالعه و بررسی مترهای فینسلری با انحنای پرچمی اسکالر یا انحنای پرچمی ایزوتروپیک وهمچنین انحنای پرچمی ثابت می‌باشد.
فرض می‌کنیم $F = \frac{\alpha^2}{\beta}$ یک متر کروپینا روی خمینهٔ n بعدی M $(n \geq 2)$ با اطلاعات ناوبری(h, W) باشد. متر F دارای انحنای پرچمی ایزوتروپیک ضعیف $K(x,y) = 3\frac{\theta_i(x)y^i}{F(x,y)} + \tau(x)$ است اگر و تنها اگر انحنای بخشی h برابر تابع اسکالر نامنفی $\mu(x)$ و W یک میدان برداری کیلینگ نسبت به h باشند. در این حالت $K_F = \tau = \mu \geq 0$ و $\theta = 0$. [۶] در ادامه، ساختار موضعی مترهای کروپینا داگلاسی با انحنای پرچمی ایزوتروپیک تعیین می‌شود:

قضیهٔ ۱,۴: متر کروپینا داگلاسی $F = \frac{\alpha^2}{\beta}$ با انحنای پرچمی ایزوتروپیک ضعیف است، اگر و تنها اگر F یک متر مینکوفسکی موضعی باشد.

اثبات: فرض کنیم F یک متر کروپینا داگلاسی با انحنای پرچمی ایزوتروپیک ضعیف است. در این صورت میدان برداری W نسبت به متر ریمانی h کیلینگ می‌باشد یعنی $W_{i|j} + W_{j|i} = 0$ در نتیجه $R_{ij} = 0$ پس $R = 0$ و همچنین $S_{ij} = W_{i|j}$. از طرف دیگر چون F داگلاسی است از قضیهٔ ۱,۱ می‌توان نوشت:

$$S_{ij} = W_iS_j - W_jS_i = W_iW^mS_{mj} - W_jW^mS_{mi} = W_iW^mW_{m|j} - W_jW^mW_{m|i}$$

در نتیجه

$$W_{i|j} = W_iW^mW_{m|j} - W_jW^mW_{m|i} \tag{۸}$$

می‌دانیم اگر F یک متر کروپینا روی منیفلد n بعدی M با $n \geq 3$ و با اطلاعات ناوبری (h, W) باشد، F با انحنای پرچمی ایزوتروپیک ضعیف است اگر و تنها اگر در هر نقطه یک سیستم مختصات موضعی موجود باشد به طوری که $h = (h_{ij})$ و $W = W^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ به صورت یکی از دو مورد زیر باشند.[۶]

[10] Weakly isotropic

(۱) $h = |y|$ یک متر اقلیدسی در R^n و $W = W^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ یک میدان برداری ثابت ناصفر باشد. در این حالت $F = \frac{|y|^2}{2W_0}$ یک متر مینکوفسکی با $K_F = 0$ (انحنای پرچمی صفر) که در آن $W_0 =< W, y >$ و $<.,.>$ ضرب داخلی اقلیدسی روی R^n است.

(۲)

$$h = \frac{\sqrt{(1+\mu|x|^2)|y|^2} - \mu < x, y > -\mu < x, y >^2}{1+\mu|x|^2}$$

و

$$W = \frac{1}{2}(Qx + \mu < x, d > x + d)$$

که در آن μ ثابت مثبت؛ d بردار ثابت ناصفر با $|d| = 1$ و Q ماتریسی پاد متقارن است به طوری که $Qd = 0$ و همچنین

$$\mu(|x|^2 -< x, d >^2) = |Qx|^2 \qquad \forall x \in R^n$$

در این حالت $|W|_h = 1$ ، $W_0 = \frac{<Qx+d,y>}{2(1+\mu|x|^2)}$ و $F = \frac{|y|^2}{2W_0}$ یک متر کروپینا با انحنای پرچمی $K_F = \tau = \mu > 0$ و $\theta = 0$ است.

باید نشان دهیم وقتی F متر کروپینا داگلاسی با انحنای پرچمی ایزوتروپیک ضعیف است حالت (۲) برقرار نمی‌باشد. برای این منظور فرض می‌کنیم حالت (۲) رخ دهد. قرار می‌دهیم $Q = (q_{ij})$، $t_i = q_{is}t^s$ و $d = (d^i)$. نمادهای کریستوفل h به صورت زیر هستند:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}h^{il}\left(\frac{\partial h_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial h_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^l}\right) = -\frac{\mu}{1+\mu|x|^2}(\delta_{ij}x^k + \delta_{ik}x^j)$$

در نتیجه:

$$W_{i|j} = \frac{\partial W_i}{\partial x^j} - W_s\Gamma^s_{ij} = \frac{1}{2(1+\mu|x|^2)}\{q_{ij} + \frac{\mu}{1+\mu|x|^2}[(t_j + d_j)x_i - (t_i + d_i)x_j]\}$$

که در آن $d_i = \delta_{ij}d^j$ و $x_i = \delta_{ij}x^j$. در نتیجه با توجه به (۸) میتوان نوشت:

(۹)

$$4(1+\mu|x|^2)q_{ij} = (t_{i+}d_i)t_m q^m_j - (t_{j+}d_j)t_m q^m_i + \mu < x, d > (t_j d_j - t_i d_i) + 3\mu[(t_i + d_i)x^j - (t_j + d_j)x^i]$$

که در آن $q_j^i = \delta^{im} q_{mj}$.
q_{ij} مستقل از x است. حال از آنجا که (۹) برای هر x برقرار است، می‌توان x را برابر λd قرار داد به طوری که λ یک ثابت ناصفر است. از آنجا که $Qd = 0$ و $|d| = 1$ خواهیم داشت $t_i = q_{im} d^m = 0$ و عبارت (۹) به صورت $\mu(|x|^2 - <x, d>^2) = 0$ کاهش می‌یابد. از نامساوی کشی-شوارتز نتیجه می‌شود $\mu = 0$ و این یک تناقض است. بنابراین تنها حالت ممکن حالت اول می‌باشد. ■

References

1. B$\acute{a}$cs$\acute{o}$, M. Matsumoto, "On Finsler spaces of Douglas type, A generalization of notion of Berwald space", Publ. Math. Debrecen. 51(1997), 385-406.

2. X. Cheng, Z. Shen, "On Douglas metrics", Publ. Math. Debrecen., 66 (2005), 503-512.

3. Kropina V.K.,"On projective two-dimentional Finsler spaces with special metric", Trudy Sem. Vector. Tensor. Anal. 11 (1961), 277.

4. X.Cheng, "Li Haixia. On conformally Berwald Kropina metrics", Ad. In Math. , 3 (2015), 44.

5. U.P. Singh, A.K. Singh, "On conformal transformations of Kropina metric", Periodical Math. Hung., 16 (1985), 187-192

6. Xia, Q.L., "On Kropina metrics of scalar flag curvature", Differential Geom. Appl., 31 (2013), 393-404.

7. B. Najafi, Z. Shen, A. Tayebi, "On a projective class of Finsler metrics", Publ. Math. Debrecen. 70 (2007), 211-219.