# برخی نکات در مورد ساختار مشبکه‌ای فضای توابع باخنر انتگرال‌پذیر مشبکه باناخ مقدار

امید ضابطی*
دانشگاه سیستان و بلوچستان، گروه ریاضی

دریافت ۹۸/۰۷/۱۸ پذیرش ۹۸/۱۰/۰۷

## چکیده

فرض کنید $(X,\sum,\mu)$ یک فضای اندازه متناهی، E یک مشبکه باناخ و $B(X,\mathrm{E},\mu)$ فضای تمام توابع با خنر انتگرال‌پذیر E -مقدار باشد. در این مقاله، نشان می‌دهیم فضای $B(X,\mathrm{E},\mu)$ یک KB-فضا یا دارای خاصیت دنباله‌ای فاتو است اگر و تنها اگر E دارای این خاصیت باشد. در این میان، برخی نکات در مورد همگرایی در فضای $B(X,E,\mu)$ ، با استفاده از ساختار ترتیبی آن، ارائه شده است.

**واژه‌های کلیدی:** انتگرال باخنر، $KB$-فضا، خاصیت فاتو، مشبکه باناخ.

## مقدمه و مفاهیم اولیه

انتگرال باخنر یکی از بهترین راه ها برای توسیع انتگرال معمولی (انتگرال لبگ یا ریمان) به توابع برداری مقدار است. بنابراین، بررسی جنبه‌های مختلف آن و هم‌چنین تحقیق در مورد چگونگی ارتباط ساختارهای مختلف آن به یک‌دیگر، موضوعی مورد توجه محققان در زمان گذشته و هم‌چنین حال بوده است.

فرض کنید $(X,\sum,\mu)$ یک فضای اندازهٔ متناهی، $E$ یک مشبکهٔ باناخ و $B(X,\mathrm{E},\mu)$ فضای تمام توابع باخنر انتگرال‌پذیر E-مقدار باشد. یادآوری می‌کنیم که تابع $f:X\to E$ انتگرال‌پذیر باخنر است اگر دنبالهٔ $(S_n)$ از توابع ساده تعریف شده از $X$ به $E$ موجود باشد که $S_n\to f$ تقریباً همه جا نسبت به اندازهٔ $\mu$ و $\lim_{n\to\infty}\int||f-S_n||d\mu\to 0$. در این صورت، $B(X,\mathrm{E},\mu)$ تحت نرم $||f||:=\int||f(w)||d\mu(w)$ یک مشبکه باناخ است. برای توضیحات بیش‌تر به [۶] مراجعه کنید.

در این مقاله، نشان می‌دهیم $B(X,\mathrm{E},\mu)$ یک KB-فضا است و یا خاصیت دنباله‌ای فاتو را دارد اگر و تنها اگر E دارای خاصیت متناظر باشد.

ابتدا اجازه دهید با استفاده از مثال، اهمیت موضوع را بیش‌تر روشن کنیم. مشهور است که در برخی از فضاهای کلاسیک مانند $l_p(1\le p\le\infty)$ و $c_0$ ، $uo$-همگرایی معادل همگرایی نقطه‌وار است. هم‌چنین، در فضای $L^p(\mu)$، $uo$-همگرایی دنباله‌ای معادل همگرایی تقریباً همه جا است (برای توضیحات بیش‌تر، به بخش مقدمهٔ منبع [۵] مراجعه کنید). بنابراین، $uo$-همگرایی، توسیعی از همگرایی نقطه‌وار به مشبکه‌های باناخ است. توجه کنید که برای تورهای کراندار ترتیبی، $uo$-همگرایی معادل با همگرایی ترتیبی است. از این‌رو، توسیع دادن برخی قضایا در فضاهای کلاسیک مانند قضیهٔ همگرایی یکنوا به مشبکه‌های باناخ در حالت کلی، با استفاده از $uo$-همگرایی، حائز اهمیت زیادی است.

*نویسنده مسئول o.zabeti@gmail.com


[ DOI: 10.52547/mmr.7.2.347 ]

در این مرحله، برخی از نکات و پیش زمینه‌ها را یادآوری می‌کنیم. فرض کنید E یک مشبکه باناخ باشد. تور $(x_\alpha)$ در E همگرای ترتیبی به $x \in E$ گفته می‌شود (به‌طور خلاصه، $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ) هرگاه تور $(z_\beta)$ در E موجود باشد به‌طوری که $z_\beta \downarrow 0$ و برای هر $\beta$، $\alpha_0$ وجود داشته باشد که $|x_\alpha - x| \leq z_\beta$ برای هر $\alpha \geq \alpha_0$. دقت شود که $z_\beta \downarrow 0$ یعنی تور $(z_\beta)$ نزولی است و $\inf z_\beta = 0$ .

هم‌چنین، تور $(x_\alpha)$ همگرای ترتیبی غیرکراندار ($uo$-همگرا) به $x \in E$ نامیده می‌شود هرگاه برای هر $w \in E_+$، داشته باشیم: $|x_\alpha - x| \wedge w \xrightarrow{o} 0$. برای توضیحات بیش‌تر در رابطه با $uo$ -همگرایی و مطالب مرتبط به [۴] و [۵] رجوع کنید. هم‌چنین، برای مطالب مرتبط با انتگرال باخنر و نکات مربوطه، خواننده می‌تواند به [۱] و [۶] مراجعه کند. مجموعه $A \subseteq E$ را کراندار ترتیبی نامیده می‌شود هرگاه بازهٔ ترتیبی $[x, y]$ در $E$ موجود باشد به‌طوری‌که $A \subseteq [x, y]$. مشبکه باناخ $E$ پیوسته ترتیبی نامیده می‌شود هرگاه برای هر تور $(x_\alpha)$ در $E$، $x_\alpha \downarrow 0$ نتیجه دهد $||x_\alpha|| \downarrow 0$. هم‌چنین، $E$ را $\sigma$-پیوسته ترتیبی می‌نامیم هرگاه $x_n \downarrow 0$، رابطهٔ $||x_n|| \downarrow 0$ را نتیجه دهد.

یادآوری می‌کنیم زیرمجموعه A از مشبکه باناخ E تقریباً کراندار ترتیبی نامید می‌شود هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، $u \in E_+$ موجود باشد به‌طوری‌که $A \subseteq [-u, u] + \varepsilon B_E$، که در آن $B_E$ معرف گوی بسته واحد در E است.

مشبکه باناخ E یک KB-فضا نامیده می‌شود هرگاه هر دنبالهٔ صعودی وکراندار در $E_+$، همگرا باشد.

هم‌چنین، نرم E دارای خاصیت دنباله‌ای فاتو است (به بیان معادل، E خاصیت $\sigma$-فاتو دارد) هرگاه برای هر دنباله $(x_n) \subseteq E_+$، $x_n \uparrow x$ نتیجه دهد $||x_n|| \uparrow ||x||$.

## نتایج اصلی

**لم ۱**. فرض کنید $(X, \sum, \mu)$یک فضای اندازه متناهی و E یک مشبکه باناخ باشد. در این صورت، یک نشانندهٔ مشبکه‌ای و توپولوژیکی از E به $B(X, \mathrm{E}, \mu)$ وجود دارد.

**برهان**. عملگر T را از E به $B(X, \mathrm{E}, \mu)$ با ضابطهٔ $T(x) = f_x$ در نظر بگیرید که در آن $f_x(w) = x$. $f_x$ یک تابع ساده است از این‌رو، اندازه‌پذیر است. هم‌چنین،

$$||f_x|| = \int ||f_x(w)|| d\mu(w) = ||x|| \mu(X)$$

بدیهی است که $T$ یک هم‌سان‌ریختی توپولوژیکی است. از آن‌جاکه $|T(x)| = T(|x|)$، حکم ثابت می‌شود.

**لم ۲**. فرض کنید $(X, \sum, \mu)$ یک فضای اندازه متناهی و E یک مشبکه باناخ باشند. در این صورت، E پیوسته ترتیبی است اگر و تنها اگر $B(X, \mathrm{E}, \mu)$ پیوسته ترتیبی باشد.

**برهان**. نتیجه مستقیم در گزارهٔ آخر [۳] ثابت شده است. برای طرف دیگر از لم ۱ استفاده کنید.

اکنون، نسخه دنباله‌ای پیوسته ترتیبی بودن از لم ۲ را ثابت می‌کنیم.



[ DOI: 10.52547/mmr.7.2.347 ]

**لم ۳.** فرض کنید $(X,\sum,\mu)$یک فضای اندازه متناهی و $\mathrm{E}$ یک مشبکه باناخ باشند. در این صورت، $\mathrm{E}$ $\sigma$-پیوسته ترتیبی است اگر و تنها اگر $B(X,\mathrm{E},\mu)$ $\sigma$-پیوسته ترتیبی باشد.

**برهان.** فرض کنید $\mathrm{E}$، $\sigma$-پیوسته ترتیبی باشد و $(f_n)$ یک دنباله در $B(X,\mathrm{E},\mu)$باشد که $f_n \downarrow 0$. این نتیجه می‌دهد که تقریباً برای همه $w \in X$، $f_n(w) \downarrow 0$. بنابراین، با استفاده از فرض، نتیجه می‌شود که

$$||f_n(w)|| \to 0.$$

اکنون از قضیهٔ همگرایی یکنوا نتیجه می‌شود:

$$\left||f_n|\right| = \int \left||f_n(w)|\right| d\mu(w) \to 0.$$

برای طرف دیگر، از لم ۱ استفاده شود.

در این‌جا گزارهٔ ۲,۶ از [۶] را یادآوری می‌کنیم.

**گزاره ۱.** فرض کنید $(X,\sum,\mu)$یک فضای اندازه متناهی و $\mathrm{E}$ یک مشبکه باناخ $\sigma$-پیوسته ترتیبی باشد. هم‌چنین، فرض کنید $(f_n)$ دنباله‌ای از توابع باخنر انتگرال‌پذیر باشد به‌طوری‌که تقریباً برای همه $w \in X$، $f_n(w) \uparrow f(w)$ و $sup_{n\in N} \int \left||f_n|\right| < \infty$ . در این صورت، $f$ نیز باخنر انتگرال‌پذیر است و

$$sup_{n\in N} \int f_n d\mu = \int f\, d\mu.$$

در گزارهٔ بالا، شرط $\sigma$-پیوسته ترتیبی بودن، ضروری است و نمی‌تواند حذف شود. به مثال زیر توجه کنید.

**مثال.** فرض کنید $X=[0,1]$ با اندازهٔ لبگ و$E=l_\infty$ . برای هر $n \in N$ ، تابع $f_n\colon X \to E$ با ضابطهٔ

$$f_n(t) = (t,t,\dots,t,0,0,\dots)$$

را در نظر بگیرید که در آن $t$، $n$ بار تکرار شده است. به‌وضوح، $f_n(t) \uparrow f(t)$ که در آن $f(t)$ دنباله ثابت $t$ است. قرار دهید: $\alpha_n = \int (f_n - f)(t) d\mu$. حال فرض کنید $\pi_i$ تصویر خطی مرتبه $i$-ام تعریف شده روی $\mathrm{E}$ باشد. از آن‌جاکه $\pi_i$ پیوسته است، برای به اندازه کافی بزرگ $i$ با استفاده از خواص انتگرال باخنر داریم:

$$.\pi_i(\alpha_n) = \int \pi_i(0,0,\dots,0,-t,-t,\dots)d\mu = \int_0^1 -tdt = -\frac{1}{2}$$

بنابراین، $\alpha_n \nrightarrow 0$.

اکنون، گزارهٔ ۱ را تعمیم می‌دهیم.

**قضیهٔ ۱.** فرض کنید $(X,\sum,\mu)$ یک فضای اندازهٔ متناهی و $E$ یک مشبکهٔ باناخ $\sigma$-پیوسته ترتیبی باشد. هم‌چنین، فرض کنید $(f_n)$ یک دنبالهٔ تقریباً کراندار ترتیبی از توابع انتگرال‌پذیر باخنر از $X$ به $E$ باشد به‌طوری‌که $f_n \xrightarrow{uo} f$. در این صورت، $f$ نیز باخنر انتگرال‌پذیر است و داریم:

$$\int f_n d\mu \to \int f\, d\mu.$$


[ DOI: 10.52547/mmr.7.2.347 ]

برهان. ابتدا این نکته را متذکر می‌شویم که با توجه به فرض، $f_n(w) \overset{uo}{\rightarrow} f(w)$ تقریباً برای همه $w \in X$. با استفاده از گزارهٔ ۳,۷ در [۵]، دنبالهٔ $(f_n(w))$ نسبت به نرم به $f(w)$ همگرا است. بنابراین با استفاده از قضیهٔ ۱,۲۶ [۶]، نتیجه می‌گیریم که $f$ اندازه‌پذیر است. از آن‌جا برای همه $w \in X$ ، دنبالهٔ $(f_n(w))$ کراندار است، با استفاده از لم ۳,۶ در [۵] داریم:

$$||f(w)|| \leq liminf||f_n(w)|| < \infty.$$

دقت کنید دنباله $(f_n)$ کراندار است، بنابراین،بر اساس لم فاتو این نتیجه به‌دست می‌آید:

$$\int ||f(w)||d\mu \leq \int liminf||f_n(w)||d\mu \leq liminf \int \left||f_n(w)|\right|d\mu(w) < \infty.$$

از این‌رو، با توجه به قضیهٔ ۱,۲۹ [۶]، $f$ نیز باخنر انتگرال‌پذیر است. توجه کنید با استفاده از لم ۳، $B(X, \mathrm{E}, \mu)$ نیز $\sigma$-پیوسته ترتیبی است. استفادهٔ مجدد از گزارهٔ ۳,۷ در [۵]، حکم زیر را تضمین می‌کند.

$$\left||f_n - f|\right| = \int \left||(f_n - f)(w)|\right|d\mu(w) \rightarrow 0$$

علاوه بر این، اگر در قضیهٔ ۱، $uo$ -همگرایی را با همگرایی ترتیبی جای‌گزین کنیم، می‌توان شرط تقریباً کراندار ترتیبی بودن را از مفروضات نادیده گرفت.

**نتیجه ۱.** فرض کنید $(\mathrm{X}, \sum, \mu)$ یک فضای اندازه متناهی و $\mathrm{E}$ یک مشبکه باناخ $\sigma$-پیوسته ترتیبی باشد. هم‌چنین، فرض کنید $(f_n)$ دنباله‌ای کراندار از توابع انتگرال‌پذیر باخنر از $X$ به $E$ باشد به‌طوری‌که $f_n \overset{o}{\rightarrow} f$. در این صورت، $f$ نیز باخنر انتگرال‌پذیر است و داریم:

$$\int f_n d\mu \rightarrow \int f\, d\mu.$$

**برهان.** ابتدا از فرض نتیجه می‌شود که $f_n(w) \overset{o}{\rightarrow} f(w)$ برای تقریباً همهٔ $w \in X$. با استفاده از فرض $\sigma$-پیوسته ترتیبی بودن $E$ ، نتیجه می‌گیریم که $||f_n(w)|| \rightarrow ||f(w)||$ برای تقریباً همهٔ $w \in X$. چون همگرایی ترتیبی، $uo$-همگرایی را نتیجه می دهد، با برهانی مشابه با برهان قضیهٔ ۱ حکم ثابت می‌شود.

دقت کنید که شرط تقریباً کراندار ترتیبی بودن در قضیهٔ ۱ ضروری است و نمی‌توان آن را حذف کرد. به مثال زیر توجه کنید.

**مثال.** فرض کنید $X = [0,1]$ با اندازهٔ لبگ و $E = L^1[0,1]$. دنباله $(f_n)$ را از $X$ به $E$ به‌صورت $f_n(w) = \delta_n$ در نظر بگیرید که در آن $\delta_n$ بدین‌صورت تعریف می‌شود: $n$ روی بازهٔ $[0, \frac{1}{n}]$ و صفر در بقیه جاها. به‌وضوح، $\left||\delta_n|\right| = 1$.

مشاهده کنید که $\delta_n \wedge 1 \downarrow 0$ که در آن تابع ثابت یک، یکهٔ ضعیف برای $E$ است، از این‌رو، طبق نتیجهٔ ۳,۵ در [۴]، $\delta_n \overset{uo}{\rightarrow} 0$. اما $\int f_n d\mu = \int \delta_n d\mu = 1$. توجه کنید چون دنبالهٔ $(f_n)$ به‌طور یکنواخت انتگرال‌پذیر نیست، تقریباً کراندار ترتیبی نیست. یادآوری می‌کنیم که برای فضای اندازهٔ $(X, \sum, \mu)$، یک مجموعه $A \subseteq L_1(\mu)$ به‌طور یکنواخت


[ DOI: 10.52547/mmr.7.2.347 ]

انتگرال‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که $\int_E |f(w)| d\mu(w) < \varepsilon$ زمانی که $f \in A$ و $\mu(E) < \infty$. برای توضیحات بیش‌تر به قضیهٔ ۵٫۲٫۹ در [۱] مراجعه شود.

**قضیهٔ ۲.** فرض کنید $(X, \sum, \mu)$ یک فضای اندازه متناهی و یک $E$ مشبکه باناخ باشد. در این صورت، $E$ یک KB-فضا است اگر و تنها اگر $B(X, \mathrm{E}, \mu)$، KB -فضا باشد.

**برهان.** فرض کنید $E$ یک KB-فضا است و $(f_n)$ یک دنبالهٔ صعودی مثبت و کراندار در $B(X, \mathrm{E}, \mu)$ باشد. نتیجه می‌گیریم که برای هر $n \in N$، $\int ||f_n(w)|| d\mu \leq M$ برای یک $M \in R_+$. توجه داشته باشید که دنبالهٔ $(\int ||f_n(w)|| d\mu)$ نیز صعودی و کراندار در $R$ است از این‌رو، با توجه به قضیهٔ لوی، به یک $\alpha \in R_+$ همگرا است، بنابراین، $\int (\left||f_n(w)|\right| - \frac{\alpha}{\mu(X)}) d\mu \to 0$. این نتیجه می‌دهد که دنبالهٔ $(\left||f_n|\right|) \subseteq L^1(\mu)$ نرم همگرا است. اما چون این دنباله، صعودی است، بنابراین، $||f_n(w)|| \uparrow \frac{\alpha}{\mu(X)}$ برای تقریباً همهٔ $w \in X$. این به نوبه خود، نتیجه می‌دهد که این دنباله، تقریباً همه جا همگرا است از این‌رو، تقریباً همه جا کراندار است. از این‌رو، دنبالهٔ $(f_n(w))$کراندار و صعودی است و بنا به فرض به یک $\alpha_w$ همگراست. تابع $f: X \to E$ را با ضابطهٔ $f(w) = \alpha_w$ در نظر بگیرید. از آن‌جاکه $f$ حد نقطه وار دنبالهٔ $(f_n)$ است، با استفاده از قضیهٔ ۱٫۲۶ در [۶]، اندازه‌پذیر است. علاوه بر آن، $f_n(w) \uparrow f(w)$ و لذا با توجه به گزارهٔ ۱، $f$ باخنر انتگرال‌پذیر نیز است. اکنون از قضیهٔ همگرایی یکنوا نتیجه می‌شود که

$$\left||f_n - f|\right| = \int \left||(f_n - f)(w)|\right| d\mu(w) \to 0.$$

برای جهت عکس، از لم ۱ استفاده شود.

**قضیه ۳.** فرض کنید $(X, \sum, \mu)$ یک فضای اندازه متناهی و یک $E$ مشبکه باناخ باشد. در این صورت، نرم $E$ به‌طور دنباله‌ای فاتو است اگر و تنها اگر نرم $B(X, \mathrm{E}, \mu)$ خاصیت مشابه را داشته باشد.

**برهان.** فرض کنید $E$ دارای خاصیت دنباله‌ای فاتو باشد و $(f_n)$ یک دنبالهٔ مثبت در $B(X, \mathrm{E}, \mu)$ باشد به‌طوری‌که $f_n \uparrow f$ برای تقریباً همهٔ $w \in X$. در این صورت، برای تقریباً همهٔ $w \in X$، $f_n(w) \uparrow f(w)$. با توجه به فرض، نتیجه می‌گیریم که $||f_n(w)|| \uparrow ||f(w)||$. از طرفی، دنبالهٔ $(\left||f_n(w)|\right|)$ نیز در اعداد حقیقی صعودی و کراندار است از این‌رو، برای تقریباً همهٔ $w \in X$، $||f_n(w)|| \to ||f(w)||$. به بیان دیگر،

$$\left||f(w)|\right| = \sup\{\left||f_n(w)|\right|\} = \lim\ ||f_n(w)||.$$

بنابراین، با استفاده از قضیهٔ همگرایی یکنوا،

$$\int ||f_n(w)|| d\mu \to \int ||f(w)|| d\mu.$$

از این‌رو، می‌توان عبارت زیر را نتیجه گرفت:

$$\int \left||f(w)|\right| d\mu = \int sup \left||f_n(w)|\right| d\mu = sup \int ||f_n(w)|| d\mu.$$

یعنی


[ DOI: 10.52547/mmr.7.2.347 ]

$$||f|| = \sup \{||f_n||\}.$$

برای طرف دیگر، از لم ۱ استفاده شود.

## منابع

1. Albiac F., Kalton N. J., "Topics in Banach space theory", Graduate texts in Mathematics, 233, Springer, New York (2006).
2. Aliprantis C. D., Burkinshaw O., "Positive operators", (Springer 2006).
3. Cartwright D. I., "The order completeness of some spaces of vector-valued functions", Bull. Austral, Math. Soc, 11(1974) 57-61.
4. Gao N., Troitsky V. G., Xanthos F., "Uo-convergence and its applications to Cesàro means in Banach lattices", Israel J. Math., 220 (2017) 649-689.
5. Gao N., Xanthos F., "Unbounded order convergence and application to martingales without probability", J. Math. Anal. Appl., 415 (2014) 931-947.
6. Van Zuijlen W., "Integration of functions with values in a Riesz space", Radboud universiteit Nijmegen, Master thesis (July 2012).



[ DOI: 10.52547/mmr.7.2.347 ]