رده‌بندی p - گروه‌های متناهی با گروه خودریختی‌های فرادوری

شیرین فولادی*
دانشگاه خوارزمی، دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

دریافت: ۹۸/۰۹/۰۱ پذیرش: ۹۸/۱۰/۱۱

چکیده

در این مقاله p-گروهای متناهی که گروه خودریختی‌های آن یک گروه فرادوری است را برای p های فرد رده‌بندی می‌کنیم و به طور خاص ثابت می‌کنیم شر ط لازم و کافی برای این‌که گروه خودریختی‌های یک p- گروه متناهی مانند G فرادوری شود آن است که G یک گروه دوری از مرتبهٔ p^n باشد.

واژه‌های کلیدی: گروه خودریختی، گروه فرادوری و p-گروه متناهی

مقدمه

نتایج بسیار زیادی در مورد گروه‌های متناهی که می‌توانند به صورت گروه خودریختی‌های یک گروه متناهی باشند به دست آمده است، به عنوان مثال می‌توان به مراجع [۴] ، [۵] و [۱۴] اشاره کرد. علاوه بر این تلاش های فراوانی برای مشخص کردن گروههای متناهی که گروههای خودریختی‌های آنها $p-$ گروه می‌باشند انجام شده است که می‌توان برای نمونه به مقالات [۴] ، [۷] و [۸] مراجعه نمود. همچنین مثال‌های فراوانی از گروه‌های متناهی وجود دارد به طوری که این گروه‌ها نمی‌توانند به صورت گروه خودریختی‌های یک گروه باشند. ساده‌ترین مثال از این گروه‌ها می‌تواند گروه‌های دوری از مرتبهٔ توانی از یک عدد اول فرد باشد.

برکویچ [1, research problem 158 (ii)] مسأله رده‌بندی $p-$ گروه متناهی با گروه خودریختی ناآبلی مینیمال را مطرح کرد. نویسندگان مقاله [۹] شرط لازم و کافی برای این مسأله را اعلام کردند. گروه G را یک گروه فرادوری[۱] گویند در صورتی که دارای یک زیرگروه نرمال دوری مانند N باشد به طوری که گروه خارج قسمتی $\frac{G}{N}$ نیز دوری باشد. به علاوه فرض کنیم $Aut(G)$ بیان کننده گروه خودریختی‌های گروه G باشد. در این مقاله برای اعداد اول فرد p به رده‌بندی $p-$ گروه‌های متناهی مانند G می‌پردازیم که $Aut(G)$ یک گروه فرادوری باشد و ثابت می‌کنیم شرط لازم و کافی برای این که گروه خودریختی‌های یک $p-$ گروه متناهی G فرادوری باشد آن است که G گروهی دوری از مرتبهٔ p^n باشد (قضیهٔ ۲.۸).

*نویسندهٔ مسئول s_fouladi@khu.ac.ir

[1] Metacyclic group

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.631]

در این مقاله از نمادهاو قراردادهای مرجع [۱] استفاده می‌شود. گروه خودریختی‌های مرکزی گروه G را با نماد $Aut_c\ (G)$ و اثر خودریختی α روی عضو x را با نماد x^{α} نشان می‌دهیم. مجموعهٔ تمام اعضایی از $Aut_c\ (G)$ که مرکز گروه را نقطه به نقطه ثابت نگه می‌دارد را با نماد $\mathrm{Aut}_{\mathrm{Z}}^{\mathrm{Z}}\ (\mathrm{G})$ نشان می‌دهیم. همچنین فرض کنید N زیرگروهی مشخص از G باشد نماد $\mathrm{Aut}^{\mathrm{N}}(\mathrm{G})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{Aut}^{\mathrm{N}}(\mathrm{G}) = \{\ \alpha\ \in \mathrm{Aut}(\mathrm{G})\ |\ \mathrm{g}^{-1}\ \ \mathrm{g}^{\alpha} \in\ \mathrm{N}, \qquad \forall\ \mathrm{g} \in \mathrm{G}\ \}$$

به سهولت دیده می‌شود که $\mathrm{Aut}^{\mathrm{N}}(\mathrm{G})$ زیرگروه نرمال $\mathrm{Aut}(\mathrm{G})$ است. اگر $\Phi = \Phi(\mathrm{G})$ بیان کننده زیرگروه فراتینی گروه G باشد، $\mathrm{Aut}^{\Phi}(\mathrm{G})$ با توجه [10, Satz III. 3.17] یک p− زیرگروه نرمال گروه $\mathrm{Aut}(\mathrm{G}\ )$ می‌شود.

۱. پیش نیازها

در این قسمت ابتدا به بیان برخی نتایج بنیادی و اساسی می‌پردازیم که برای نتایج اصلی این مقاله مورد نیاز است.

قضیه ۱. $Aut_Z^Z\ (\mathrm{G})\ \ \cong Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G))$.

برهان: به [10, Satz I. 17.1] یا [15, Result 1.1] مراجعه شود.

گروه ناآبلی G را ناآبلی مینیمال[1] گویند در صورتی که تمام زیر گروه‌های واقعی آن آبلی باشد. در قضیهٔ زیر نمایش $p-$ گروه‌های متناهی ناآبلی مینیمال بیان می‌شود، برای برهان می‌توان به [1, **Exercise 8a**] مراجعه کرد.

قضیه ۲. فرض کنید G یک p− گروه ناآبلی مینیمال باشد در این صورت G با یکی از گروه‌های زیر یکریخت است.

i) $G_1 =< a, b\ |\ a^{p^m} = b^{p^n} = 1\ , a^b = a^{1+p^{m-1}} >\ \ m \geq 2, n \geq 1$ و $|G_1| = p^{m+n}$.

ii) $G_2 =< a, b\ |a^{p^m} = b^{p^n} = c^p = 1\ \ [a, b] = c\ , [a, c] = [b, c] = 1 >$ و $|G_2| = p^{m+n+1}$.

iii) $G_3 = Q_8$.

اکنون با توجه به نمایش گروه‌های معرفی شده در قضیهٔ ۱.۲ به سهولت می‌توان نتیجهٔ زیر را به دست آورد:

نتیجه ۱: با توجه به مفرضات قضیهٔ قبل داریم:

$$Z(G_1) =< a^p > \times < b^p > \text{ و } Z(G_2) =< a^p > \times < b^p > \times < c > .$$

۲. نتایج اصلی

در این قسمت با استفاده از مطالب بیان شده در مقدمات برای اعداد اول فرد به رده‌بندی p−گروهای متناهی می‌پردازیم که گروه خودریختی‌های آن یک گروه فرادوری است. ابتدا در لم زیر این رده‌بندی را برای $p-$ گروه‌های آبلی بیان می‌کنیم.

[1] Minimal non-abelian group

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.631]

لم ۱. *فرض کنیم G یک $p-$ گروه آبلی متناهی باشد. در این صورت شرط لازم و کافی برای این که $Aut(G)$ یک گروه فرادوری شود آن است که $G \cong \mathbb{Z}_{p^n}$.*

برهان: اگر $\mathrm{G} \cong \mathbb{Z}_{\mathrm{p^n}}$ آن‌گاه $\mathrm{Aut(G)} \cong \mathbb{Z}_{\mathrm{p^{n-1}}\,(\mathrm{p}-1)}$ لذا به وضوح $\mathrm{Aut(G)}$ یک گروه فرادوری است. برعکس فرض کنیم $\mathrm{Aut(G)}$ فرادوری و تجزیهٔ گروه G به زیرگروه‌های دوری‌اش به صورت $\mathrm{G} \cong \mathbb{Z}_{\mathrm{p^{n_1}}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{\mathrm{p^{n_r}}}$ باشد که در آن $\mathrm{n_1} \geq \cdots \geq \mathrm{n_r} \geq 1$. با توجه به این‌که $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{\mathrm{p^{n_1}}}) \times \ldots \times \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{\mathrm{p^{n_r}}}) \hookrightarrow \mathrm{Aut(G)}$ و هر زیرگروه یک گروه فرادوری حداکثر دو مولدی است نتیجه می‌شود که $\mathrm{r} \leq 2$. ادعا می‌کنیم $\mathrm{r} = 1$ در غیر این صورت گروه G دارای نمایشی به صورت $\mathrm{G} =< a, b \mid \mathrm{a^{p^{n_1}}} = \mathrm{b^{p^{n_2}}} = [\mathrm{a,b}] = 1 >$ می‌باشد. با استفاده از قضیهٔ جایگذاری [11,Proposition 3, p.44] دیده می‌شود که توابع α ، β و γ با ضابطه‌های

$$\mathrm{a^\alpha = a^{1+p^{n_1-1}}}\ ،\ \mathrm{b^\alpha = b}\ ،\ \mathrm{a^\beta = a}\ ،\ \mathrm{b^\beta = b^{1+p^{n_2-1}}}\ ،\ \mathrm{a^\gamma = a^{-1}}\ \text{و}\ \mathrm{b^\gamma = b^{-1}}$$

خودریختی‌های گروه G می‌باشند به طوری که $|\alpha| = |\beta| = p$ ، $|\gamma| = 2$ و $[\alpha, \beta] = [\alpha, \gamma] = [\beta, \gamma] = 1$. قرار می‌دهیم $H =< \alpha, \beta, \gamma >$. به سهولت دیده می‌شود که $H \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_2$. از این‌که $H \leq Aut(G)$ نتیجه می‌شود زیرگروه H فرادوری می‌باشد بنابراین حداکثر دو مولدی است که این یک تناقض است پس فرض خلف باطل است لذا گروه G دوری است.

تذکر: با توجه به لم فوق از این به بعد فرض می کنیم G یک $\mathrm{p}-$ گروه ناآبلی متناهی و p عدد اول فرد است.

لم ۲. *فرض کنیم G یک $p-$ گروه نا آبلی متناهی باشد به طوری که $Aut(G)$ یک گروه فرادوری باشد در این صورت $Z(G)$ دوری است.*

برهان: با توجه به این‌که هر زیرگروه $\mathrm{Aut(G)}$ فرادوری است لذا $\mathrm{Aut_Z^Z(G)}$ فرادوریاست، بنابراین $\mathrm{d(Aut_Z^Z(G))} \leq 2$. با توجه به قضیهٔ ۱٫۱ داریم:

$$\mathrm{Aut_Z^Z(G)} \cong \mathrm{Hom}\left(\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{Z(G)}}, \mathrm{Z(G)}\right) \cong \mathrm{Hom}\left(\frac{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{Z(G)}}}{\left(\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{Z(G)}}\right)'}, \mathrm{Z(G)}\right)$$

$$\cong \mathrm{Hom}\left(\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G'Z(G)}}, \mathrm{Z(G)}\right). \qquad (*)$$

از این‌که G ناآبلی متناهی است لذا $\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G'Z(G)}}$ دوری نیست، بنابراین $\mathrm{d}(\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{G'Z(G)}}) \geq 2$. اگر $Z(\mathrm{G})$ دوری نباشد با در نظر گرفتن رابطهٔ (*) دیده می شود که $\mathrm{d(Aut_Z^Z(G))} \geq 4$ که این یک تناقض است. بنابراین $\mathrm{Z(G)}$ دوری است.

لم ۳. *فرض کنیم G یک $p-$ گروه نا آبلی متناهی باشد به طوری که $Aut(G)$ یک گروه فرادوری باشد. در این صورت $d(G) = 2$.*

برهان: با توجه به این‌که G پوچتوان است لذا $G' \cap Z(G) \neq 1$. فرض کنیم $a \in G' \cap Z(G)$ از مرتبهٔ p باشد. قرار می‌دهیم $A =< a >$. با توجه به این که $A \leq Z(G)$ داریم:

$$\mathrm{Aut}_A^A(G) \cong \mathrm{Hom}\left(\frac{G}{A}, A\right) \cong \mathrm{Hom}\left(\frac{\frac{G}{A}}{\left(\frac{G}{A}\right)'}, A\right)$$

$$\cong \mathrm{Hom}\left(\frac{G}{G'}, \mathbb{Z}_p\right) \cong \frac{G}{G'}.$$

با در نظر گرفتن این مطلب که $\mathrm{Aut}_A^A(G)$ فرادوری است، خواهیم داشت، $d\left(\frac{G}{G'}\right) = d(\mathrm{Aut}_A^A(G)) \leq 2$. از این که $\frac{G}{G'}$ دوری نیست، داریم $d\left(\frac{G}{G'}\right) = 2$. فرض کنیم $\frac{G}{G'} =< G'a, G'b >$، دراین صورت $G =< G', a, b >$. بنابراین $G =< a, b >$.

لم ۴. *فرض کنیم G یک $p-$گروه نا آبلی متناهی باشد به طوری که $Aut(G)$ یک گروه فرادوری باشد. در این صورت $Z(G) \leq \Phi(G)$*

برهان: با توجه به لم ۳،۲ داریم $d(G) = 2$ لذا $|G: \Phi(G)| = p^2$. از طرفی چون $\mathrm{Inn}(G)$ فرادوری و G نا آبلی است خواهیم داشت $d\left(\frac{G}{Z(G)}\right) = 2$ پس $\left|\frac{G}{Z(G)} : \Phi\left(\frac{G}{Z(G)}\right)\right| = p^2$. اما

$$\frac{G}{Z(G)} \geq \Phi\left(\frac{G}{Z(G)}\right) = \frac{\cap M}{Z(G)} \geq \frac{\Phi(G)Z(G)}{Z(G)} \qquad (*)$$

که در آن M زیرگروه ماکسیمال G و شامل $Z(G)$ است. از این که $\Phi(G) \leq \Phi(G)Z(G) \leq G$ نتیجه می‌شود $|G: \Phi(G)Z(G)| \leq p^2$. با استفاده از رابطهٔ (*) خواهیم داشت:

$$|G: \Phi(G)Z(G)| = \left|\frac{G}{Z(G)} : \frac{\Phi(G)Z(G)}{Z(G)}\right| \geq \left|\frac{G}{Z(G)} : \Phi\left(\frac{G}{Z(G)}\right)\right| = p^2.$$

بنابراین $|G: \Phi(G)Z(G)| = p^2$. اما $|G: \Phi(G)| = p^2$ و $\Phi(G) \leq \Phi(G)Z(G)$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\Phi(G) = \Phi(G)Z(G)$$

که مطلب اخیر برهان را تکمیل می‌کند.

لم ۵. فرض کنیم G یک $p-$ گروه ناآبلی متناهی باشد به طوری که $\mathrm{Aut}(G)$ یک گروه فرادوری باشد. در این صورت G' دوری است.

برهان: با توجه به اینکه $Inn(G)$ فرادوری است لذا $\frac{G}{Z(G)}$ زیرگروهی دوری و نرمال مانند $\frac{M}{Z(G)} =< Z(G)b >$ دارد به طوری که $\frac{\frac{G}{Z(G)}}{\frac{M}{Z(G)}} \cong \frac{G}{M}$ دوری است. به وضوح $M =< Z(G), b >$ لذا زیرگروهی آبلی است. فرض کنیم $\frac{G}{M} =< Ma >$ در این صورت با توجه به لم قبل $G =< a, b >$. با توجه به اینکه $G' \leq M$ اعضای زیرگروه مشتق با b جا

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.631]

بجا می‌شوند بنابراین $[a,b^i]=[a,b]^i$. فرض کنیم $\left|\frac{M}{Z(G)}\right|=o(Z(G)b)=p^m$ ادعا می کنیم $o([a,b])=$ p^m.واضح است $[a,b]^{p^m}=[a,b^{p^m}]=1$ حال اگر عددی مانند $1\leq n<m$ موجود باشد به طوری که $[a,b]^{p^n}=[a,b^{p^n}]=1$ آن‌گاه $b^{p^n}\in Z(G)$ که این مطلب با $o(Z(G)b)=p^m$ در تناقض است. اکنون با به کار بردن لم [10, Aufgaben 2. Page 259] داریم:

$|M|=|G'||Z(G)|$. بنابراین داریم:

$$|\frac{M}{Z(G)}|=|G'|=p^m \text{ و در نتیجه } G'=<[a,b]>.$$

لم ۶. فرض کنید G یک p– گروه ناآبلی مینیمال باشد در این صورت Aut(G) نمی‌تواند یک گروه فرادوری باشد.

برهان: فرض کنیم چنین نباشد و G یک p– گروه نا آبلی مینیمال باشد به طوری که Aut(G) فرادوری باشد. در این صورت، چون p عددی اول و فرد است، طبق قضیهٔ ۲,۱ گروه G با یکی از گروه‌های G_1 یا G_2 یکریخت است. ابتدا فرض کنیم $G=G_1$ در این صورت G گروه فرادوری شکافته شده است و طبق نمایش ارائه شده برای Aut(G) در [3 ,Theorem 4.2] ، Aut(G) نمی‌تواند یک گروه فرادوری باشد.

اگر $G=G_2$ آن‌گاه طبق نتیجهٔ ۳,۱ و دوری بودن مرکز، نتیجه می‌شود $a^p=b^p=1$. بنابراین $|G|=p^3$. با توجه به قضیهٔ جایگذاری [11, Proposition 3, p.44] دیده می شود توابع α ، β و γ با ضابطه‌های $a^\alpha=ac$ ،$b^\alpha=b$ ،$c^\alpha=c$ ،$a^\beta=a$ ،$b^\beta=bc$ ،$c^\beta=c$ ،$a^\gamma=ab$ ،$b^\gamma=b$ و $c^\gamma=c$ خودریختی‌های گروه G می‌باشند به طوری که:

$$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=p \text{ و } [\alpha,\beta]=[\alpha,\gamma]=[\beta,\gamma]=1.$$

به راحتی دیده می‌شود که $<\alpha,\beta,\gamma>\cong\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p$. با توجه به این‌که $<\alpha,\beta,\gamma>\leq Aut(G)$ می‌بایست $<\alpha,\beta,\gamma>$ فرادوری و لذا باید حداکثر دو مولدی باشد، که این یک تناقض است.

قضیه ۷. اگر G یک p– گروه ناآبلی متناهی باشد آن‌گاه Aut(G) نمی‌تواند یک گروه فرادوری باشد.

برهان: فرض کنیم چنین نباشد و G یک p– گروه ناآبلی متناهی باشد به طوری که Aut(G) فرادوری باشد. فرض کنیم کلاس پوچتوانی G برابر با c باشد. با توجه به نمادهای قضیهٔ [13, Theorem 2] قرار می‌دهیم $N=\Gamma_c^{p^{t-1}}(G)$ که در آن $\exp(\Gamma_c(G))=p^t$. حال با توجه به لم ۲,۵ داریم $N\cong\mathbb{Z}_p$. فرض کنیم $N=<\omega>$ با توجه این که $\frac{G}{Z(G)}$ فرادوری است لذا نمایشی به صورت زیر دارد:

$$\frac{G}{Z(G)}=<Za\,,Zb\mid Za^{p^n}=1, Zb^{p^m}=Za^r,\qquad Zb^{-1}ZaZb=Za^k>$$

به وضوح m کوچک‌ترین عدد صحیح مثبتی است که $Zb^{p^m}\in Z\left(\frac{G}{Z(G)}\right)$. با توجه به لم ۴,۲، $G=<a,b>$ همچنین با به کاربردن قضیهٔ [13, Theorem 2] می‌دانیم $|Aut^N(G)|=p^2$. هر عضو $Aut^N(G)$ اعضای N و $\frac{G}{N}$ را نقطه

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.631]

به نقطه ثابت نگه می‌دارد و $\mathrm{Aut}^{N}(G) =< \alpha, \beta >$ که در آن $a^{\alpha} = a\omega$ ، $b^{\alpha} = b$، $a^{\beta} = a$ و $b^{\beta} = b\omega$. با یک محاسبهٔ ساده دیده می‌شود $|\alpha| = |\beta| = p$ ، $[\alpha , \beta]=1$ و $\alpha, \beta \in Z(\mathrm{Aut}^{\Phi}(G))$ حال دو حالت برای c که ردهٔ پوچتوانی گروه G می‌باشد در نظر می‌گیریم:

حالت اول $c > 2$: با توجه به قراردادها و مفروضات فوق داریم $m \geq 1$. قرار می دهیم $x = b^{p^{m-1}}$ اگر i_x بیان کننده خودریختی داخلی القا شده توسط x باشد به سهولت دیده می‌شود $|i_x| = p$. ادعا می‌کنیم

$$< i_x > \cap < \beta > = 1$$

زیرا در غیر این صورت $< i_x > = < \beta >$ پس عدد صحیحی مانند $t \geq 0$ وجود دارد به طوری که $\beta = i_{x^t}$. لذا $b\omega = b^{\beta} = x^{-t} b^{i_{x^t}} = b$ که این یک تناقض است. قرار می‌دهیم $H = < i_x , \beta >$. با توجه به این‌که $\beta \in Z(\mathrm{Aut}^{\Phi}(G))$ و $\mathrm{Inn}(G) \leq \mathrm{Aut}^{\Phi}(G)$ داریم $H \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. ادعا می‌کنیم $\alpha \notin H$ زیرا در غیر این صورت اعداد صحیح $0 \leq t, j < p$ موجود است به طوری که $\alpha = i_{x^t} \beta^j$. با در نظر گرفتن اثر توابع روی عضو b داریم $b = b^{\alpha} = b^{\beta^j} = b\omega^{i}$ در نتیجه $j = 0$. پس $1 \neq \alpha = i_{x^t}$ که در آن $0 < t < p$. لذا

$$a\omega = a^{\alpha} = x^{-t} a\, x^{t} \;\; \rightarrow \;\; i_a = i_{x^t} i_a i_{x^{-t}}$$

بنابراین $i_a i_{x^t} = i_{x^t} i_a$ با در نظر گرفتن این مطلب که $i_b i_{x^t} = i_{x^t} i_b$ و $< i_x > = < i_{x^t} >$ نتیجه می‌گیریم که $i_{b^{m-1}} = i_x \in Z(\mathrm{Inn}(G))$ که این با انتخاب m در تناقض است. پس $\alpha \notin H$. حال با توجه به این که $\alpha \in Z(\mathrm{Aut}^{\Phi}(G))$ خواهیم داشت:

$$< \alpha, \beta , i_x > \cong < \alpha > \times < \beta > \times < i_x > \leq Aut(G)$$

که این با فرادوری بودن زیرگروه‌های $\mathrm{Aut}(G)$ در تناقض است.

حالت دوم $c = 2$: فرض کنیم $\exp(G') = p^n$. با توجه به این که کلاس پوچتوانی گروه برابر ۲ و $d\left(\frac{G}{Z(G)}\right) = 2$ داریم:

$\exp\left(\frac{G}{Z(G)}\right) = \exp(G')$ و $\frac{G}{Z(G)} \cong \mathbb{Z}_{p^n} \times \mathbb{Z}_{p^n}$. با توجه به تعریف α, β در ابتدای برهان و این که $\alpha , \beta \in Z(\mathrm{Aut}^{\Phi}(G))$ داریم $[\alpha , \mathrm{Inn}(G)] = [\beta , \mathrm{Inn}(G)] = 1$. اگر $\alpha \notin \mathrm{Inn}(G)$ و یا $\beta \notin \mathrm{Inn}(G)$ آن‌گاه با در نظر گرفتن این مطلب که $|\alpha| = |\beta| = p$ خواهیم داشت:

$$< Inn(G), \alpha > = Inn(G) < \alpha > = Inn(G) \times < \alpha > \leq Aut(G)$$

$$< Inn(G), \beta > = Inn(G) < \beta > = Inn(G) \times < \beta > \leq Aut(G)$$

لذا $d(< Inn(G), \alpha >) = 3$ یا $d(< Inn(G), \beta >) = 3$ که این با فرادوری بودن همهٔ زیرگروه‌های $\mathrm{Aut}(G)$ در تناقض است . پس می‌توانیم فرض کنیم $\alpha, \beta \in \mathrm{Inn}(G)$. با توجه به این‌که کلاس پوچتوانی G برابر ۲ و $G =<$

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.631]

$< a,b >$ به سهولت دیده می‌شود هر عضو گروه نمایشی به صورت $a^ib^j[b,a]^t$ دارد. با توجه به مقاله [۱۲] گروه G دارای خودریختی‌ای غیر داخلی مانند γ از مرتبهٔ p است به طوری که زیرگروه فراتینی را نقطه به نقطه ثابت نگه می‌دارد، دو حالت برای n در نظر می‌گیریم:

I) $\boldsymbol{n} > 1$

فرض کنیم $a^{\gamma} = a^ib^j[b,a]^t$ و $b^{\gamma} = a^rb^s[b,a]^{t'}$ ادعا می‌کنیم $\gamma \in Aut^{\Phi}(G)$. در غیر این صورت $a^{-1}a^ib^j[b,a]^t \notin \Phi(G)$ و یا $a^rb^s[b,a]^{t'}\,b^{-1} \notin \Phi(G)$ و به طور معادل $a^{i-1}b^j \notin \Phi(G)$ و یا $a^rb^{s-1} \notin \Phi(G)$. پس نتیجه می‌شود $(p \nmid j$ یا $p \nmid i-1)$ یا $(p \nmid s-1$ یا $p \nmid r)$.

بدون آن که به استدلال مسأله خللی وارد شود فرض کنیم پرانتز اول اتفاق بیافتد برای حالت دوم به صورت مشابه استدلال می‌کنیم. با توجه به این که γ نقطه به نقطه زیرگروه فراتینی را ثابت نگه می‌دارد داریم:

$$a^p = (a^p)^{\gamma} = \left(a^ib^j[b,a]^t\right)^p = \left(a^ib^j\right)^p[b,a]^{tp} = a^{ip}b^{jp}[b,a]^{\frac{ijp(p-1)}{2}+tp}$$

$$\Rightarrow \quad a^{(1-i)p} = b^{jp}\,[b,a]^{\frac{ijp(p-1)}{2}+tp}$$

با توجه به این که کلاس پوچتوانی گروه ۲ می‌باشد، نتیجه می‌شود $Z(G)a^{(1-i)p} = Z(G)b^{jp}$ در نهایت با در نظر گرفتن این مطلب که $n > 1$ ، $\frac{G}{Z(G)} \cong \mathbb{Z}_{p^n} \times \mathbb{Z}_{p^n}$ ، $\frac{G}{Z(G)} =< Z(G)a > \times < Z(G)b >$ و $(p \nmid j$ یا $p \nmid i-1)$ نتیجه می شود $< Z(G)a > \cap < Z(G)b > \neq 1$ که این یک تناقض است.

II) $\boldsymbol{n = 1}$

در این حالت داریم $\frac{G}{Z(G)} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ بنابراین با توجه به لم ۲،۴ داریم $Z(G) = \Phi(G)$ ادعا می‌کنیم گروه G ناآبلی مینیمال است زیرا اگر M یک زیرگروه ماکسیمال G باشد آن‌گاه $\frac{M}{Z(G)} \cong \mathbb{Z}_p$ پس نتیجه می‌شود که M زیرگروه آبلی است. حال با استفاده از لم ۶،۲ نتیجه می‌شود گروه خودریختی‌های G نمی‌تواند فرادوری باشد. حال با توجه به لم‌ها و قضایای فوق قضیه اصلی زیر را نتیجه می‌گیریم:

قضیه ۸. شرط لازم و کافی برای این که گروه خودریختی‌های یک p – گروه متناهی مانند G فرادوری شود آن است که G یک گروه دوری از مرتبهٔ p^n باشد.

References

1. Y. Berkovich, *Groups of Prime Power Order* Vol. 1, Walter de Gruyter, Berlin (2008).
2. J. N. S. Bidwell and M. J.Curran, The automorphism group of a split metacyclic p-group, *Arch. Math.* **87** (2006) 488–497.

3. R. Brandl, S. Franciosi, F.de Giovanni, Minimal Non-Nilpotent Groups as automorphism groups, *Monatsh. Math.***112** (1991), no.2, 89-98

4. M. J. Curran, Automorphisms of certain p-groups (p odd), *Bull. Aus. Math. Soc.* **38** (1988), no.2, 299-305.

5. G. Cutolo, H. Smith and J. Wiegold, p-groups of maximal class as automorphism groups, *Illinois J. Math.*, **47** (2003), no.1-2, 141-156.

6. D. Flannery and D. MacHale, Some fini groups which are rarely automorphism groups-I, *Math. Proc. R. Ir. Acad.* **81A** (1981), no.2, 209-215.

7. J. Flynn and D. MacHale, Determining all finite groups whose automorphism group is a p-group, *Math. Proc. R. Ir. Acad.* **91A** (1991), no.2, 259-264.

8. J. Flynn, D. MacHale and E. A. O'Brein, R. Sheehy, Finite groups whose automorphism groups are 2-groups, *Math. Proc. R. Ir. Acad.* **94A** (1994), no.2,137-145.

9. S. Fouladi and R. Orfi, Minimal non-abelian groups as automorphism groups of finite groups, *Journal of Algebra and its Application* **13** (2014), no. 5, 1350150, 6 pp.

10. B. Huppert, *Endliche Gruppen I,* volume 134 *of Grundlehren Math. Wiss.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

11. D.L. Johnson, Presentation of groups. 2nd ed., LMS Stud. Texts, Camberidge University press 1997.

12. H. Liebeck, Outer automorphisms in nilpotent *p*-groups of class 2. J. Lond. Math. Soc. **40** (1965) , 268–275

13. H. Liebeck, The automorphism group of finite p-group, *Journal of Algebra* **4** (1966), 426-432.

14. D. MacHale, Some finite groups which are rarely automorphism groups-II, *Math. Proc. R. Ir. Acad***.** **83A** (1983), no.2, 189-196.

15. Schmid, P.: Normal *p*-subgroups in the group of outer automorphisms of a finite *p*-group. Math. Z. **147** (1976) (3), 271–277.

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.631]