

رده‌بندی p - گروه‌های متناهی با گروه خودریختی‌های فرادوری

شیرین فولادی*

دانشگاه خوارزمی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

دریافت: ۹۸/۰۹/۰۱

پذیرش: ۹۸/۱۰/۱۱

چکیده

در این مقاله p -گروه‌های متناهی که گروه خودریختی‌های آن یک گروه فرادوری است را برای p های فرد رده‌بندی می‌کنیم و به طور خاص ثابت می‌کنیم شرط لازم و کافی برای این که گروه خودریختی‌های یک p -گروه متناهی مانند G فرادوری شود آن است که G یک گروه دوری از مرتبه p^n باشد. **واژه‌های کلیدی:** گروه خودریختی، گروه فرادوری و p -گروه متناهی

مقدمه

نتایج بسیار زیادی در مورد گروه‌های متناهی که می‌توانند به صورت گروه خودریختی‌های یک گروه متناهی باشند به دست آمده است، به عنوان مثال می‌توان به مراجع [۴]، [۵] و [۱۴] اشاره کرد. علاوه بر این تلاش‌های فراوانی برای مشخص کردن گروه‌های متناهی که گروه‌های خودریختی‌های آنها p -گروه می‌باشند انجام شده است که می‌توان برای نمونه به مقالات [۴]، [۷] و [۸] مراجعه نمود. همچنین مثال‌های فراوانی از گروه‌های متناهی وجود دارد به طوری که این گروه‌ها نمی‌توانند به صورت گروه خودریختی‌های یک گروه باشند. ساده‌ترین مثال از این گروه‌ها می‌تواند گروه‌های دوری از مرتبه توانی از یک عدد اول فرد باشد.

برکویچ [1, research problem 158 (ii)] مسأله رده‌بندی p -گروه متناهی با گروه خودریختی ناآبلی مینیمال را مطرح کرد. نویسندگان مقاله [۹] شرط لازم و کافی برای این مسأله را اعلام کردند. گروه G را یک گروه فرادوری^۱ گویند در صورتی که دارای یک زیرگروه نرمال دوری مانند N باشد به طوری که گروه خارج قسمتی $\frac{G}{N}$ نیز دوری باشد. به علاوه فرض کنیم $Aut(G)$ بیان‌کننده گروه خودریختی‌های گروه G باشد. در این مقاله برای اعداد اول فرد p به رده‌بندی p -گروه‌های متناهی مانند G می‌پردازیم که $Aut(G)$ یک گروه فرادوری باشد و ثابت می‌کنیم شرط لازم و کافی برای این که گروه خودریختی‌های یک p -گروه متناهی G فرادوری باشد آن است که G گروهی دوری از مرتبه p^n باشد (قضیه ۲.۸).

*نویسنده مسئول s_fouladi@khu.ac.ir

¹ Metacyclic group

در این مقاله از نمادهای قراردادهای مرجع [۱] استفاده می‌شود. گروه خودریختی‌های مرکزی گروه G را با نماد $Aut_c(G)$ و اثر خودریختی α روی عضو x را با نماد x^α نشان می‌دهیم. مجموعه تمام اعضای $Aut_c(G)$ که مرکز گروه را نقطه به نقطه ثابت نگه می‌دارد را با نماد $Aut_Z^Z(G)$ نشان می‌دهیم. همچنین فرض کنید N زیرگروهی مشخص از G باشد نماد $Aut^N(G)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Aut^N(G) = \{ \alpha \in Aut(G) \mid g^{-1} g^\alpha \in N, \quad \forall g \in G \}$$

به سهولت دیده می‌شود که $Aut^N(G)$ زیرگروه نرمال $Aut(G)$ است. اگر $\Phi = \Phi(G)$ بیان کننده زیرگروه فراتینی گروه G باشد، $Aut^\Phi(G)$ با توجه [10, Satz III. 3.17] یک p -زیرگروه نرمال گروه $Aut(G)$ می‌شود.

۱. پیش نیازها

در این قسمت ابتدا به بیان برخی نتایج بنیادی و اساسی می‌پردازیم که برای نتایج اصلی این مقاله مورد نیاز است.

$$Aut_Z^Z(G) \cong Hom\left(\frac{G}{Z(G)}, Z(G)\right). \quad \text{قضیه ۱.}$$

برهان: به [10, Satz I. 17.1] یا [15, Result 1.1] مراجعه شود.

گروه ناآبلی G را ناآبلی مینیمال^۱ گویند در صورتی که تمام زیر گروه‌های واقعی آن آبلی باشد. در قضیه زیر نمایش p -گروه‌های متناهی ناآبلی مینیمال بیان می‌شود، برای برهان می‌توان به [1, Exercise 8a] مراجعه کرد.

قضیه ۲. فرض کنید G یک p -گروه ناآبلی مینیمال باشد در این صورت G با یکی از گروه‌های زیر یکرخت است.

$$i) \quad G_1 = \langle a, b \mid a^{p^m} = b^{p^n} = 1, a^b = a^{1+p^{m-1}} \rangle \quad m \geq 2, n \geq 1 \quad \text{و} \quad |G_1| = p^{m+n}.$$

$$ii) \quad G_2 = \langle a, b \mid a^{p^m} = b^{p^n} = c^p = 1, [a, b] = c, [a, c] = [b, c] = 1 \rangle \quad \text{و} \quad |G_2| = p^{m+n+1}.$$

$$iii) \quad G_3 = Q_8.$$

اکنون با توجه به نمایش گروه‌های معرفی شده در قضیه ۱.۲ به سهولت می‌توان نتیجه زیر را به دست آورد:
نتیجه ۱: با توجه به مفروضات قضیه قبل داریم:

$$Z(G_1) = \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle \quad \text{و} \quad Z(G_2) = \langle a^p \rangle \times \langle b^p \rangle \times \langle c \rangle.$$

۲. نتایج اصلی

در این قسمت با استفاده از مطالب بیان شده در مقدمات برای اعداد اول فرد به رده‌بندی p -گروه‌های متناهی می‌پردازیم که گروه خودریختی‌های آن یک گروه فرادوری است. ابتدا در لم زیر این رده‌بندی را برای p -گروه‌های آبلی بیان می‌کنیم.

¹ Minimal non-abelian group

لم ۱. فرض کنیم G یک p -گروه آبدلی متناهی باشد. در این صورت شرط لازم و کافی برای این که $Aut(G)$ یک گروه فرادوری شود آن است که $G \cong \mathbb{Z}_p^n$.

برهان: اگر $G \cong \mathbb{Z}_p^n$ آن گاه $Aut(G) \cong \mathbb{Z}_p^{n-1}$ ($p-1$) لذا به وضوح $Aut(G)$ یک گروه فرادوری است. برعکس فرض کنیم $Aut(G)$ فرادوری و تجزیه گروه G به زیرگروه‌های دوری‌اش به صورت $G \cong \mathbb{Z}_p^{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_p^{n_r}$ باشد که در آن $n_1 \geq \dots \geq n_r \geq 1$. با توجه به این که $Aut(G) \hookrightarrow Aut(\mathbb{Z}_p^{n_1}) \times \dots \times Aut(\mathbb{Z}_p^{n_r})$ و هر زیرگروه یک گروه فرادوری حداکثر دو مولدی است نتیجه می‌شود که $r \leq 2$. ادعا می‌کنیم $r = 1$ در غیر این صورت گروه G دارای نمایشی به صورت $G = \langle a, b \mid a^{p^{n_1}} = b^{p^{n_2}} = [a, b] = 1 \rangle$ می‌باشد. با استفاده از قضیه جایگذاری [11, Proposition 3, p.44] دیده می‌شود که توابع α, β, γ با ضابطه‌های

$$b^\gamma = b^{-1}, a^\gamma = a^{-1}, b^\beta = b^{1+p^{n_2-1}}, a^\beta = a, b^\alpha = b, a^\alpha = a^{1+p^{n_1-1}}$$

خودریختی‌های گروه G می‌باشند به طوری که $|\alpha| = |\beta| = p$, $|\gamma| = 2$ و $[\alpha, \beta] = [\alpha, \gamma] = [\beta, \gamma] = 1$. قرار می‌دهیم $H = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$. به سهولت دیده می‌شود که $H \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_2$. از این که $H \leq Aut(G)$ نتیجه می‌شود زیرگروه H فرادوری می‌باشد بنابراین حداکثر دو مولدی است که این یک تناقض است پس فرض خلف باطل است لذا گروه G دوری است.

تذکر: با توجه به لم فوق از این به بعد فرض می‌کنیم G یک p -گروه ناآبدلی متناهی و p عدد اول فرد است.

لم ۲. فرض کنیم G یک p -گروه ناآبدلی متناهی باشد به طوری که $Aut(G)$ یک گروه فرادوری باشد در این صورت $Z(G)$ دوری است.

برهان: با توجه به این که هر زیرگروه $Aut(G)$ فرادوری است لذا $Aut_Z^Z(G)$ فرادوریاست، بنابراین $d(Aut_Z^Z(G)) \leq 2$. با توجه به قضیه ۱،۱ داریم:

$$\begin{aligned} Aut_Z^Z(G) &\cong \text{Hom}\left(\frac{G}{Z(G)}, Z(G)\right) \cong \text{Hom}\left(\frac{\frac{G}{Z(G)}}{\left(\frac{G}{Z(G)}\right)', Z(G)}\right) \\ &\cong \text{Hom}\left(\frac{G}{G'Z(G)}, Z(G)\right). \end{aligned} \quad (*)$$

از این که G ناآبدلی متناهی است لذا $\frac{G}{G'Z(G)}$ دوری نیست، بنابراین $d\left(\frac{G}{G'Z(G)}\right) \geq 2$. اگر $Z(G)$ دوری نباشد با در نظر گرفتن رابطه (*) دیده می‌شود که $d(Aut_Z^Z(G)) \geq 4$ که این یک تناقض است. بنابراین $Z(G)$ دوری است.

لم ۳. فرض کنیم G یک p -گروه ناآبدلی متناهی باشد به طوری که $Aut(G)$ یک گروه فرادوری باشد. در این صورت $d(G) = 2$.

برهان: با توجه به این که G پوچتوان است لذا $G' \cap Z(G) \neq 1$. فرض کنیم $a \in G' \cap Z(G)$ از مرتبه p باشد. قرار می‌دهیم $A = \langle a \rangle$. با توجه به این که $A \leq Z(G)$ داریم:

$$\begin{aligned} \text{Aut}_A^A(G) &\cong \text{Hom}\left(\frac{G}{A}, A\right) \cong \text{Hom}\left(\frac{\frac{G}{A}}{\frac{G'}{A}}, A\right) \\ &\cong \text{Hom}\left(\frac{G}{G'}, \mathbb{Z}_p\right) \cong \frac{G}{G'}. \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن این مطلب که $\text{Aut}_A^A(G)$ فرادوری است، خواهیم داشت، $d\left(\frac{G}{G'}\right) = d(\text{Aut}_A^A(G)) \leq 2$. از این که $\frac{G}{G'}$ دوری نیست، داریم $d\left(\frac{G}{G'}\right) = 2$. فرض کنیم $\frac{G}{G'} = \langle G'a, G'b \rangle$ ، در این صورت $G = \langle G', a, b \rangle$. بنابراین $G = \langle a, b \rangle$.

لم ۴. فرض کنیم G یک p -گروه ناآبلی متناهی باشد به طوری که $\text{Aut}(G)$ یک گروه فرادوری باشد. در این صورت $Z(G) \leq \Phi(G)$

برهان: با توجه به لم ۳،۲ داریم $d(G) = 2$ لذا $|G: \Phi(G)| = p^2$. از طرفی چون $\text{Inn}(G)$ فرادوری و G ناآبلی است خواهیم داشت $d\left(\frac{G}{Z(G)}\right) = 2$ پس $|G: \Phi\left(\frac{G}{Z(G)}\right)| = p^2$. اما

$$\frac{G}{Z(G)} \geq \Phi\left(\frac{G}{Z(G)}\right) = \frac{\Phi(G)Z(G)}{Z(G)} \geq \frac{\Phi(G)Z(G)}{Z(G)} \quad (*)$$

که در آن M زیرگروه ماکسیمال G و شامل $Z(G)$ است. از این که $\Phi(G) \leq \Phi(G)Z(G) \leq G$ نتیجه می‌شود $|G: \Phi(G)Z(G)| \leq p^2$. با استفاده از رابطه (*) خواهیم داشت:

$$|G: \Phi(G)Z(G)| = \left| \frac{G}{Z(G)} : \frac{\Phi(G)Z(G)}{Z(G)} \right| \geq \left| \frac{G}{Z(G)} : \Phi\left(\frac{G}{Z(G)}\right) \right| = p^2.$$

بنابراین $|G: \Phi(G)Z(G)| = p^2$ اما $|G: \Phi(G)| = p^2$ و $\Phi(G) \leq \Phi(G)Z(G)$ بنابراین خواهیم داشت:

$$\Phi(G) = \Phi(G)Z(G)$$

که مطلب اخیر برهان را تکمیل می‌کند.

لم ۵. فرض کنیم G یک p -گروه ناآبلی متناهی باشد به طوری که $\text{Aut}(G)$ یک گروه فرادوری باشد. در این صورت G' دوری است.

برهان: با توجه به اینکه $\text{Inn}(G)$ فرادوری است لذا $\frac{G}{Z(G)}$ زیرگروهی دوری و نرمال مانند $\langle Z(G)b \rangle = \frac{M}{Z(G)}$ دارد به طوری که $\frac{\frac{G}{Z(G)}}{\frac{M}{Z(G)}} \cong \frac{G}{M}$ دوری است. به وضوح $M = \langle Z(G), b \rangle$ لذا زیرگروهی آبلی است. فرض کنیم $\frac{G}{M} = \langle Ma \rangle$ در این صورت با توجه به لم قبل $G = \langle a, b \rangle$. با توجه به اینکه $G' \leq M$ اعضای زیرگروه مشتق با b جا

بجا می‌شوند بنابراین $[a, b^i] = [a, b]^i$. فرض کنیم $| \frac{M}{Z(G)} | = o(Z(G)b) = p^m$ ادعا می‌کنیم $o([a, b]) = p^m$. واضح است $[a, b]^{p^m} = [a, b^{p^m}] = 1$ حال اگر عددی مانند $1 \leq n < m$ موجود باشد به طوری که $[a, b]^{p^n} = [a, b^{p^n}] = 1$ آن‌گاه $b^{p^n} \in Z(G)$ که این مطلب با $o(Z(G)b) = p^m$ در تناقض است. اکنون با به کار بردن لم [10, Aufgaben 2. Page 259] داریم:

$$|M| = |G'| |Z(G)| \text{ بنابراین داریم:}$$

$$| \frac{M}{Z(G)} | = |G'| = p^m \text{ و در نتیجه } G' = \langle [a, b] \rangle$$

لم ۶. فرض کنید G یک p -گروه ناآبلی مینیمال باشد در این صورت $\text{Aut}(G)$ نمی‌تواند یک گروه فرادوری باشد. **برهان:** فرض کنیم چنین نباشد و G یک p -گروه ناآبلی مینیمال باشد به طوری که $\text{Aut}(G)$ فرادوری باشد. در این صورت، چون p عددی اول و فرد است، طبق قضیه ۲,۱ گروه G با یکی از گروه‌های G_1 یا G_2 یکرخت است. ابتدا فرض کنیم $G = G_1$ در این صورت G گروه فرادوری شکافته شده است و طبق نمایش ارائه شده برای $\text{Aut}(G)$ در [3, Theorem 4.2]، $\text{Aut}(G)$ نمی‌تواند یک گروه فرادوری باشد.

اگر $G = G_2$ آن‌گاه طبق نتیجه ۳,۱ و دوری بودن مرکز، نتیجه می‌شود $a^p = b^p = 1$. بنابراین $|G| = p^3$. با توجه به قضیه جایگذاری [11, Proposition 3, p.44] دیده می‌شود توابع α, β و γ با ضابطه‌های $a^\alpha = ac, b^\alpha = b, a^\beta = ab, c^\beta = c, b^\beta = bc, a^\gamma = a, c^\gamma = c$ و $b^\gamma = b, c^\gamma = c$ خودریختی‌های گروه G می‌باشند به طوری که:

$$|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = p \text{ و } [\alpha, \beta] = [\alpha, \gamma] = [\beta, \gamma] = 1$$

به راحتی دیده می‌شود که $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. با توجه به این که $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle \leq \text{Aut}(G)$ می‌بایست $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle < \text{Aut}(G)$ و لذا باید حداکثر دو مولدی باشد، که این یک تناقض است.

قضیه ۷. اگر G یک p -گروه ناآبلی متناهی باشد آن‌گاه $\text{Aut}(G)$ نمی‌تواند یک گروه فرادوری باشد. **برهان:** فرض کنیم چنین نباشد و G یک p -گروه ناآبلی متناهی باشد به طوری که $\text{Aut}(G)$ فرادوری باشد. فرض کنیم کلاس پوچتوانی G برابر با C باشد. با توجه به نمادهای قضیه [13, Theorem 2] قرار می‌دهیم $N = \langle \omega \rangle$ فرض کنیم $N \cong \mathbb{Z}_p$ داریم ۲,۵. حال با توجه به لم ۲,۵ $\exp(\Gamma_c(G)) = p^t$. $N = \langle \omega \rangle$ فرض کنیم $N \cong \mathbb{Z}_p$ داریم ۲,۵. با توجه به لم ۲,۵ داریم $N \cong \mathbb{Z}_p$. فرض کنیم $N = \langle \omega \rangle$ با توجه این که $\frac{G}{Z(G)}$ فرادوری است لذا نمایشی به صورت زیر دارد:

$$\frac{G}{Z(G)} = \langle Za, Zb \mid Za^{p^n} = 1, Zb^{p^m} = Za^r, Zb^{-1}ZaZb = Za^k \rangle$$

به وضوح m کوچک‌ترین عدد صحیح مثبتی است که $Zb^{p^m} \in Z(\frac{G}{Z(G)})$. با توجه به لم ۴,۲، $\langle a, b \rangle = G$ همچنین با به کار بردن قضیه [13, Theorem 2] می‌دانیم $|\text{Aut}^N(G)| = p^2$. هر عضو $\text{Aut}^N(G)$ اعضای N و $\frac{G}{N}$ را نقطه

به نقطه ثابت نگه می‌دارد و $\langle \alpha, \beta \rangle = \text{Aut}^N(G)$ که در آن $a^\alpha = a\omega$ ، $b^\alpha = b$ ، $a^\beta = a$ و $b^\beta = b\omega$ با یک محاسبه ساده دیده می‌شود $|\alpha| = |\beta| = p$ ، $[\alpha, \beta] = 1$ و $\alpha, \beta \in Z(\text{Aut}^\Phi(G))$ حال دو حالت برای c که رده پوچتوانی گروه G می‌باشد در نظر می‌گیریم:

حالت اول $c > 2$: با توجه به قراردادها و مفروضات فوق داریم $m \geq 1$. قرار می‌دهیم $x = b^{p^{m-1}}$ اگر i_x بیان کننده خودریختی داخلی القا شده توسط x باشد به سهولت دیده می‌شود $|i_x| = p$. ادعا می‌کنیم

$$\langle i_x \rangle \cap \langle \beta \rangle = 1$$

زیرا در غیر این صورت $\langle i_x \rangle = \langle \beta \rangle$ پس عدد صحیحی مانند $t \geq 0$ وجود دارد به طوری که $\beta = i_x^t$. لذا $b\omega = b^\beta = x^{-t} b^{i_x^t} = b$ که این یک تناقض است. قرار می‌دهیم $H = \langle i_x, \beta \rangle$. با توجه به این که $\text{Inn}(G) \leq \text{Aut}^\Phi(G)$ و $\beta \in Z(\text{Aut}^\Phi(G))$ ادعا می‌کنیم $\alpha \notin H$ زیرا در غیر این صورت اعداد صحیح $0 \leq t, j < p$ موجود است به طوری که $\alpha = i_x^t \beta^j$. با در نظر گرفتن اثر توابع روی عضو b داریم $b = b^\alpha = b^\beta = b\omega^j$ در نتیجه $j = 0$. پس $\alpha = i_x^t$ که در آن $0 < t < p$. لذا

$$a\omega = a^\alpha = x^{-t} a x^t \rightarrow i_a = i_x^t i_a i_x^{-t}$$

بنابراین $i_a i_x^t = i_x^t i_a$ با در نظر گرفتن این مطلب که $i_b i_x^t = i_x^t i_b$ و $\langle i_x \rangle = \langle i_x^t \rangle$ نتیجه می‌گیریم که $i_b^{m-1} = i_x \in Z(\text{Inn}(G))$ که این با انتخاب m در تناقض است. پس $\alpha \notin H$. حال با توجه به این که $\alpha \in Z(\text{Aut}^\Phi(G))$ خواهیم داشت:

$$\langle \alpha, \beta, i_x \rangle \cong \langle \alpha \rangle \times \langle \beta \rangle \times \langle i_x \rangle \leq \text{Aut}(G)$$

که این با فرادوری بودن زیرگروه‌های $\text{Aut}(G)$ در تناقض است.

حالت دوم $c = 2$: فرض کنیم $\exp(G') = p^n$. با توجه به این که کلاس پوچتوانی گروه برابر ۲ و $d\left(\frac{G}{Z(G)}\right) = 2$ داریم:

$\exp\left(\frac{G}{Z(G)}\right) = \exp(G')$ و $\frac{G}{Z(G)} \cong \mathbb{Z}_{p^n} \times \mathbb{Z}_{p^n}$ با توجه به تعریف α, β در ابتدای برهان و این که $\alpha, \beta \in \text{Aut}^\Phi(G)$ داریم $[\alpha, \text{Inn}(G)] = [\beta, \text{Inn}(G)] = 1$. اگر $\alpha \notin \text{Inn}(G)$ و یا $\beta \notin \text{Inn}(G)$ آن‌گاه با در نظر گرفتن این مطلب که $|\alpha| = |\beta| = p$ خواهیم داشت:

$$\langle \text{Inn}(G), \alpha \rangle = \text{Inn}(G) \langle \alpha \rangle = \text{Inn}(G) \times \langle \alpha \rangle \leq \text{Aut}(G)$$

$$\langle \text{Inn}(G), \beta \rangle = \text{Inn}(G) \langle \beta \rangle = \text{Inn}(G) \times \langle \beta \rangle \leq \text{Aut}(G)$$

لذا $d(\langle \text{Inn}(G), \alpha \rangle) = 3$ یا $d(\langle \text{Inn}(G), \beta \rangle) = 3$ که این با فرادوری بودن همه زیرگروه‌های $\text{Aut}(G)$ در تناقض است. پس می‌توانیم فرض کنیم $\alpha, \beta \in \text{Inn}(G)$. با توجه به این که کلاس پوچتوانی G برابر ۲ و $G = \langle$

$a, b >$ به سهولت دیده می‌شود هر عضو گروه نمایشی به صورت $a^i b^j [b, a]^t$ دارد. با توجه به مقاله [۱۲] گروه G دارای خودریختی‌ای غیر داخلی مانند γ از مرتبه p است به طوری که زیرگروه فراتینی را نقطه به نقطه ثابت نگه می‌دارد، دو حالت برای n در نظر می‌گیریم:

$$n > 1 \quad (I)$$

فرض کنیم $a^\gamma = a^i b^j [b, a]^t$ و $b^\gamma = a^r b^s [b, a]^{t'}$ ادعا می‌کنیم $\gamma \in \text{Aut}^\Phi(G)$ در غیر این صورت $a^{-1} a^i b^j [b, a]^t \notin \Phi(G)$ و یا $a^{-1} b^{-1} a^r b^s [b, a]^{t'} \notin \Phi(G)$ و به طور معادل $a^{i-1} b^j \notin \Phi(G)$ و یا $a^r b^{s-1} \notin \Phi(G)$. پس نتیجه می‌شود $(p \nmid i - 1$ یا $p \nmid j)$ یا $(p \nmid r$ یا $p \nmid s - 1)$.

بدون آن که به استدلال مسأله خللی وارد شود فرض کنیم پراتنز اول اتفاق بیافتد برای حالت دوم به صورت مشابه استدلال می‌کنیم. با توجه به این که γ نقطه به نقطه زیرگروه فراتینی را ثابت نگه می‌دارد داریم:

$$a^p = (a^p)^\gamma = (a^i b^j [b, a]^t)^p = (a^i b^j)^p [b, a]^{tp} = a^{ip} b^{jp} [b, a]^{\frac{ijp(p-1)}{2} + tp}$$

$$\Rightarrow a^{(1-i)p} = b^{jp} [b, a]^{\frac{ijp(p-1)}{2} + tp}$$

با توجه به این که کلاس پوچتوانی گروه γ می‌باشد، نتیجه می‌شود $Z(G)a^{(1-i)p} = Z(G)b^{jp}$ این مطلب که $\frac{G}{Z(G)} \cong \mathbb{Z}_p^n \times \mathbb{Z}_p^n$ ، $n > 1$ و $(p \nmid i - 1$ یا $p \nmid j)$ نتیجه می‌شود $\langle Z(G)a \rangle \cap \langle Z(G)b \rangle \neq 1$ که این یک تناقض است.

$$n = 1 \quad (II)$$

در این حالت داریم $\frac{G}{Z(G)} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ بنابراین با توجه به لم ۲،۴ داریم $Z(G) = \Phi(G)$ ادعا می‌کنیم گروه G ناآبلی مینیمال است زیرا اگر M یک زیرگروه ماکسیمال G باشد آن‌گاه $\frac{M}{Z(G)} \cong \mathbb{Z}_p$ پس نتیجه می‌شود که M زیرگروه آبلی است. حال با استفاده از لم ۶،۲ نتیجه می‌شود گروه خودریختی‌های G نمی‌تواند فرادوری باشد. حال با توجه به لم‌ها و قضایای فوق قضیه اصلی زیر را نتیجه می‌گیریم:

قضیه ۸. شرط لازم و کافی برای این که گروه خودریختی‌های یک p -گروه متناهی مانند G فرادوری شود آن است که G یک گروه دوری از مرتبه p^n باشد.

References

1. Y. Berkovich, *Groups of Prime Power Order* Vol. 1, Walter de Gruyter, Berlin (2008).
2. J. N. S. Bidwell and M. J. Curran, The automorphism group of a split metacyclic p -group, *Arch. Math.* **87** (2006) 488–497.

3. R. Brandl, S. Franciosi, F.de Giovanni, Minimal Non-Nilpotent Groups as automorphism groups, *Monatsh. Math.* **112** (1991), no.2, 89-98
4. M. J. Curran, Automorphisms of certain p -groups (p odd), *Bull. Aus. Math. Soc.* **38** (1988), no.2, 299-305.
5. G. Cutolo, H. Smith and J. Wiegold, p -groups of maximal class as automorphism groups, *Illinois J. Math.*, **47** (2003), no.1-2, 141-156.
6. D. Flannery and D. MacHale, Some finite groups which are rarely automorphism groups-I, *Math. Proc. R. Ir. Acad.* **81A** (1981), no.2, 209-215.
7. J. Flynn and D. MacHale, Determining all finite groups whose automorphism group is a p -group, *Math. Proc. R. Ir. Acad.* **91A** (1991), no.2, 259-264.
8. J. Flynn, D. MacHale and E. A. O'Brein, R. Sheehy, Finite groups whose automorphism groups are 2-groups, *Math. Proc. R. Ir. Acad.* **94A** (1994), no.2, 137-145.
9. S. Fouladi and R. Orfi, Minimal non-abelian groups as automorphism groups of finite groups, *Journal of Algebra and its Application* **13** (2014), no. 5, 1350150, 6 pp.
10. B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, volume 134 of *Grundlehren Math. Wiss.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.
11. D.L. Johnson, Presentation of groups. 2nd ed., LMS Stud. Texts, Cambridge University press 1997.
12. H. Liebeck, Outer automorphisms in nilpotent p -groups of class 2. *J. Lond. Math. Soc.* **40** (1965), 268-275
13. H. Liebeck, The automorphism group of finite p -group, *Journal of Algebra* **4** (1966), 426-432.
14. D. MacHale, Some finite groups which are rarely automorphism groups-II, *Math. Proc. R. Ir. Acad.* **83A** (1983), no.2, 189-196.
15. Schmid, P.: Normal p -subgroups in the group of outer automorphisms of a finite p -group. *Math. Z.* **147** (1976) (3), 271-277.