Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

The Aluffi algebra and linearity condition

Parisa Solhi[1], **Abbas Nasrollahnejad** [2]

1. Department Department of Mathematics, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran.

E-mail: pa.solhi@uma.ac.ir

2. Department Department of Mathematics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan, Iran.

✉E-mail: abbasnn@iasbs.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
19 January 2020
Received in revised form:
4 April 2020
Accepted:
14 June 2020
Published online:
31 December 2022

Keywords:
Aluffi algebra,
Blowup
algebra,
Singularity,
Ideal of linear type.

ABSTRACT

Introduction

Paolo Aluffi in [1] introduced a graded Algebra for purpose of defining a characteristic cycle of a hypersurface in parallel to Conormal cycle in intersection theory. Let $Y \subseteq X \subseteq M$ be closed embedding of schemes, where X is a hypersurface in the smooth variety M and Y is the singular subscheme of X. Aluffi constructed a graded $\mathcal{O}_X$-algebra $\mathrm{qSym}_{\mathrm{X\subseteq M}}\left(\mathcal{J}_{Y,X}\right)$, which he called quasi-symmetric algebra, defined by

$$\mathrm{qSym}_{\mathrm{X\subseteq M}}\left(\mathcal{J}_{Y,X}\right) := \mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}\left(\mathcal{J}_{Y,X}\right) \otimes_{\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_\mathrm{M}}(\mathcal{J}_{Y,M})} \mathcal{R}_{\mathcal{O}_M}\left(\mathcal{J}_{Y,M}\right),$$

where $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}\left(\mathcal{J}_{Y,X}\right)$ is the symmetric algebra of the ideal sheaf $\mathcal{J}_{Y,X}$ of Y in X and $\mathcal{R}_{\mathcal{O}_M}\left(\mathcal{J}_{Y,M}\right)$ is the Rees algebra of the ideal sheaf $\mathcal{J}_{Y,M}$ of Y in M. Aluffi proved that the characterisctic cycle of X in M is equal

$$(-1)^{\dim X}\left[\mathrm{Proj}\left(\mathrm{qSym}_{\mathrm{X\subseteq M}}\left(\mathcal{J}_{Y,X}\right)\right)\right]. \qquad (1)$$

Furthermore, the Chern-Mather and Schwartz-MacPherson classes of X are (up to sing) the shadows of the principal cycles $[\mathrm{Proj}(\mathcal{R}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}_{Y,X}))]$ and $[\mathrm{Proj}\left(\mathrm{qSym}_{\mathrm{X\subseteq M}}\left(\mathcal{J}_{Y,X}\right)\right)]$ in $\mathbb{P}(T^*M|X)$, respectively [1. Theorems 3.2 and 4.4].

Inspired by this construction, the second author and A. Simis studied algebraic and geometric properties of this algebra, naming it the Aluffi algebra [2] and [3]. Let R be a commutative Noetherian ring and $J \subseteq I \subseteq R$ ideals of R. The Aluffi algebra of I/J is

$$\mathcal{A}_{R/J}(I/J) := \mathrm{Sym}_{\mathrm{R/J}}(I/J) \otimes_{\mathrm{Sym}_R(I)} \mathcal{R}_R(I)\,.$$

The Aluffi algebra is an intermediate graded algebra between the Rees and symmetric algebras. The latter algebras are important in the resolution of singularities [4]. Given an ideals $J \subseteq I \subseteq R$ we have

$$\mathrm{Sym}_{\mathrm{R/J}}(I/J) \twoheadrightarrow \mathcal{A}_{R/J}(I/J) \twoheadrightarrow \mathcal{R}_{R/J}(I/J). \qquad (2)$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-17]

The right-hand surjection studied in [5] and [6]. The kernel of this homomorphism which is the Valabrega-Valla module has close relation with the other themes in commutative algebra as the Artin-Rees number, the relation type number and standard basis in the sense of Hironaka.

Let R be a Noetherian ring and $I = (f_1, \dots, f_m)$ ideal of R. There is a natural R-algebra homomorphis from the symmetric algebra of I to the Rees algebra $\alpha\colon \mathrm{Sym}_R(I) \twoheadrightarrow \mathcal{R}_R(I)$. The ideal I is called of linear type if α is an isomorphism. By the definition of the Aluffi algebra, if I is of linear type, then the left surjective homomorphism in (2) is an isomorphism. Therefore, by using the formula (1) to compute the characteristic cycles of X, we just need to compute the principal cycles of the naïve blowup $\mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}_{Y,X}))$. Therefore, it is reasonable to ask, when or for which classes of pair of ideals the Aluffi algebra is isomorphic with the symmetric algebra. For the importance of this isomorphism in algebraic geometry, we give a definition provided this isomorphism hold. A pair of ideals $J \subseteq I \subseteq R$ satisfies in linearity condition when the Aluffi algebra of I/J is isomorphism with the corresponding symmetric algebra. It is clear that if I or I/J are of linear type, then $J \subseteq I$ satisfies in linearity condition. In the case that J is the defining ideal of a reduced hypersurface with isolated singularities and I is the Jacobian ideal of J, the linearity condition characterized in terms of type of singularities. In particular, any hypersurface with simple singularity satisfies in linearity condition [7] and [8].

Results

In this work, we study the linearity condition. Given an ideal $J \subseteq I \subseteq R$ in the Noetherian ring R, we prove that $J \subseteq I$ satisfies in linearity condition if and only if $N_r \subseteq \tilde{J} N_{r-1}$ for $r \geq 1$, where N_r is the kernel of homogeneous component of degree r of the R-algebra homomorphism $\alpha\colon \mathrm{Sym}_R(I) \twoheadrightarrow \mathcal{R}_R(I)$. We show that the following classes of ideals satisfy in linearity condition:

1. The ideals $(f) \subseteq I_f$, where f is defining equation of a reduced affine hypersurface $X = \mathrm{Spec}\,(\mathrm{K}[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{n}]/(f)) \subseteq \mathbb{A}^\mathrm{n}_\mathrm{K}$ such that the singular subscheme of X is non-singular and $I_f = \left(f, \frac{\partial f}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial X_n}\right)$ is the Jacobian ideal of f.
2. The ideals $J \subseteq I$, where J, I are monomial ideals in the polynomial ring $R = K[X_1, \dots, X_n]$ and I minimally is generated by J and a monomial m.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-17]

We prove that a pair of ideals $J \subseteq I = (X_1, \dots, X_n)^d \subseteq R = K[X_1, \dots, X_n]$ satisfies linearity condition if and only if $d = 1$. Finally, we prove that if $J \subseteq R$ is a complete intersection and I is an ideal contain J, then $J \subseteq I$ satisfies linearity condition if and only if the ideal I is of linear type.

References

1. Aluffi P., "Shadows of blow-up algebras", Tohoku Math. J, 56, (2004) 593-619.

2. Nasrollah Nejad A., "The Aluffi Algebra of an Ideal", Ph. D. Thesis, Universidade Federal de Pernambuco, Brazil, 2010.

3. Nasrollah Nejad A., Simis A., "The Aluffi algebra", J. Singularities, 3 (2011) 20-47.

4. Ellwood D., Hauser H., Mori S., Schicho J., "The resolution of singular algebraic varieties", Clay Mathematics Institute Summer School 2012, Obergurgl. CMI series, Amer. Math. Soc. 2014.

5. Nasrollah Nejad A., Shahidi Z., Zaare-Nahandi R., "Torsion-free Aluffi algebras", J. Algebra, 513 (2018) 190-207.

6. Nasrollah Nejad A., Zaare Nahandi R., "Aluffi torsion-free ideal," J. Algebra, 346 (2011) 284-298.

7. Nasrollah Nejad A., "The Aluffi algebra of a hypersurface with isolated singularities", Communication in algebra, 46 (8) (2018) 3353-3562.

8. Farrahy A.B., Nasrollah Nejad A., "Hypersurface with linear type singular loci", Journal of Algebra and its Application, https://doi.org/10.1142/S0219498820501698.

How to cite: Solhi, P., Nasrollahnejad, A. (2022). The Aluffi algebra and linearity condition. *Mathematical Researches*, 8 (4), 137-150.

© The Author(s). Publisher: Kharazmi University

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-17]

Mathematical Researches
Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/
Kharazmi University

جبر آلوفی و شرط خطی

پریسا صلحی[۱]، عباس نصراله‌نژاد[۲]✉

۱. گروه ریاضی، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران. رایانامه: pa.solhi@uma.ac.ir
۲. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان، ایران. رایانامه: abbasnn@iasbs.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۲۹
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۱/۱۶
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۳/۲۵
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۱۰/۱۰

واژه‌های کلیدی:
جبر آلوفی،
جبر فراگستری،
تکینگی،
ایده ال از نوع خطی.

چکیده

جبر آلوفی نسخه جبری دورهای مشخصه در هندسهٔ جبری و یک جبر مدرج میانی بین جبر ریس و جبر متقارن است. فرض کنیم R حلقه جابجایی نوتری و $J \subseteq I$ ایده آل هایی از حلقه R باشند. گوییم $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می کند هرگاه جبر آلوفی و جبر متقارن I/J یکریخت باشند. در این مقاله شرط لازم و کافی برای شرط خطی ارائه می دهیم و کلاس هایی از ایده آل های $J \subseteq I$ را معرفی می کنیم که در شرط خطی صدق می کنند. ثابت می کنیم که اگر J ایده آل اشتراکی کامل باشد، آن گاه شرط خطی $J \subseteq I$ و نوع خطی بودن I معادلند.

استناد: صلحی، پریسا؛ نصراله‌نژاد، عباس؛ (۱۴۰۱). جبر آلوفی و شرط خطی. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۴)، ۱۵۰-۱۳۷.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

© نویسندگان.
CC BY NC

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-17]

مقدمه

در [۱] پائولو آلوفی[۱] جبر مدرجی را برای تعریف دورهای مشخصه به موازات دورهای همنورمال برای یک ابررویه در نظریه اشتراک‌ها معرفی می‌کند. فرض کنیم $Y \subseteq X \subseteq M$، که X یک ابررویه در چندگونای هموار M و Y زیر چندگونای تکین X باشد. در این حالت آلوفی، $\mathcal{O}_X$- جبر مدرج $\mathrm{qSym}_{X\subseteq M}(\mathcal{J}_{Y,X})$ را ساخت و آن را جبر شبه‌متقارن نامید که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathrm{qSym}_{X\subseteq M}(\mathcal{J}_{Y,X}) := \mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}_{Y,X}) \otimes_{\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_M}(\mathcal{J}_{Y,M})} \mathcal{R}_{\mathcal{O}_M}(\mathcal{J}_{Y,M})$$

که $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}_{Y,X})$ جبر متقارن ایده‌آل تعریف $\mathcal{J}_{Y,X}$ از Y در X، $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_M}(\mathcal{J}_{Y,M})$ و $\mathcal{R}_{\mathcal{O}_M}(\mathcal{J}_{Y,M})$ به ترتیب جبر متقارن و جبر ریس ایده‌آل تعریف $\mathcal{J}_{Y,M}$ از Y در M هستند. آلوفی ثابت کرد که دورهای مشخصه $[\mathrm{Ch}(X)]$ از X برابر است با

$$(-1)^{\dim X}\left[\mathrm{Proj}\left(\mathrm{qSym}_{X\subseteq M}(\mathcal{J}_{Y,X})\right)\right] \qquad (۱)$$

هم چنین او ثابت کرد که کلاس‌های چرن – ماتر[۲] و شوارتز – ماک فرسن[۳] با تقریب علامت بنا به قضیه‌های ۳.۲ و ۴.۴ [۱] به ترتیب تصویر دورهای $[\mathrm{Proj}(\mathcal{R}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}_{Y,X}))]$ و $\left[\mathrm{Proj}\left(\mathrm{qSym}_{X\subseteq M}(\mathcal{J}_{Y,X})\right)\right]$ در $\mathbb{P}(T^*M|X)$ هستند. با الهام از این ساختار، نویسنده دوم و آرون سیمیس[۴] در[۲] و [۳] ویژگی‌های جبری و هندسی این جبر را مطالعه کردند و آن را جبر آلوفی نامیدند. فرض کنیم R حلقه جابه‌جایی نوتری و $J \subseteq I$ ایده‌آل‌هایی از حلقهٔ R باشند. در این صورت جبر آلوفی I/J به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{A}_{R/J}(I/J) := \mathrm{Sym}_{R/J}(I/J) \otimes_{\mathrm{Sym}_R(I)} \mathcal{R}_R(I)$$

مهم‌ترین ویژگی جبر آلوفی این است که جبر آلوفی یک جبر میانی بین جبر متقارن و جبر ریس است. این دو جبر از دیدگاه هندسی جبرهای فراگستری نامیده می‌شوند و از اهمیت ویژه‌ای در نظریهٔ تحلیل تکینگی چندگوناهای جبری برخوردارند [۴]. برای ایده‌آل‌های $J \subseteq I$ از R داریم:

$$\mathrm{Sym}_{R/J}(I/J) \twoheadrightarrow \mathcal{A}_{R/J}(I/J) \twoheadrightarrow \mathcal{R}_{R/J}(I/J) \qquad (۲)$$

هم‌ریختی سمت راست و این که چه زمانی این همریختی، یکریختی است در مقاله‌های [۵] و [۶] بررسی شده است و ارتباط نزدیکی با سایر مفاهیم در جبر جابه‌جایی نظیر عدد آرتین ریس، عدد ارتباط نوعی و پایه‌های استاندارد دارد.

فرض کنیم R حلقه جابه‌جایی نوتری و $I = (f_1, \dots, f_m) \subseteq R$ ایده‌آلی از R باشد، در این صورت همواره هم‌ریختی R – جبری پوشا از جبر متقارن I به جبر ریس I وجود دارد.

$$\mathrm{Sym}_R(I) \twoheadrightarrow \mathcal{R}_R(I) \qquad (۳)$$

[1] Paolo Aluffi
[2] Chern-Mather
[3] Schwatrz-MacPherson
[4] Aron Simis

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-17]

ایده‌آل I را از نوع خطی گوییم اگر هم‌ریختی بالا، یکریختی باشد. با تعریف جبر آلوفی اگر I از نوع خطی باشد، آن‌گاه هم ریختی سمت چپ (۲) یکریختی است. بنابراین با استفاده از فرمول (۱) برای محاسبهٔ دورهای مشخصه X فقط کافی است دورهای اصلی جبر متقارن $I//J$ را محاسبه کنیم. بنابراین کاملاً طبیعی است این سوال را مطرح کنیم که چه موقع یا برای چه کلاس‌هایی از ایده‌آل‌ها، جبر آلوفی یکریخت با جبر متقارن است. چون ایده‌آل تعریف جبر متقارن $I//J$ فقط به اولین سیزیجی ایده‌آل I بستگی دارد و توسط چندجمله‌ای‌های خطی روی حلقه چندجمله‌ای‌های $R//J[T_1, \ldots, T_m]$ تعریف می شود. از دیدگاه محاسباتی توصیف کردن ایده‌آل تعریف جبر متقارن ساده است و بیشتر ویژگی‌های جبری اعم از کوهن – مکالی، گرنشتاین، ایده‌آل‌های اول وابسته و غیره مطالعه شده است [۷] و [۸]. بنا به اهمیت یکریختی جبر متقارن و آلوفی از لحاظ هندسی و جبری تعریف شرط خطی را ارائه می‌دهیم. می گوییم ایده‌آل‌های $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کنند هرگاه جبر آلوفی $I//J$ با جبر متقارن یکریخت باشد. به وضوح اگر I از نوع خطی باشد یا $I//J$ از نوع خطی باشد، $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کنند.

در این مقاله ابتدا جبرآلوفی و ویژگی‌های مهم آن را بیان می‌کنیم و به مطالعهٔ ایده‌آل‌هایی می‌پردازیم که در شرط خطی صدق می‌کنند. شرط لازم و کافی بر حسب مؤلفه‌های همگن هم‌ریختی (۲) ارائه می‌دهیم و کلاس‌هایی از ایده‌آل‌ها را معرفی می‌کنیم که در شرط خطی صدق می‌کنند. در ادامه به این سوال جواب می‌دهیم که آیا شرط خطی بودن $J \subseteq I$ و از نوع خطی بودن I معادلند؟ مثال‌هایی را ارائه می‌دهیم که در حالت کلی شرط خطی و نوع خطی بودن I معادل نیستند. برای حالتی که ایده‌آل J اصلی و توسط یک عنصر منظم تولید می شود و I شامل J است، اثبات شده است که شرط خطی و نوع خطی بودن I بنا به گزارهٔ ۴.۱ [۳] معادل هستند. این نتیجه را برای حالتی که J ایده‌آل اشتراکی کامل و I شامل J است، تعمیم می‌دهیم.

جبرهای آلوفی

فرض کنیم R حلقه جابه‌جایی نوتری و I ایده‌آلی از حلقهٔ R و $\{f_1, \ldots, f_m\}$ یک مجموعه مولد برای I باشد. به این داده‌ها دو جبر وابسته می‌کنیم که در جبر جابه‌جایی و هندسهٔ جبری از اهمیت زیادی برخوردار هستند. اولین جبر، جبر متقارن ایده‌آل I است که یک جبر مدرج است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Sym}_R(I) \ := \ \oplus_{\,n\geq 0}\, \mathrm{Sym}_R^n\,(I) = \oplus_{\,n\geq 0}\, T_R^n\,(I)/J \ \cap T_R^n\,(I)$$

که $T_R^n\,(I)$ جبر تانسوری از مرتبهٔ n و $J = (x \otimes y - y \otimes x \ \mid x, y \in I) \subseteq T_R^2\,(I)$ ایده‌آل دوطرفه از جبر تانسوری $\mathrm{T_R}(I) \ = \oplus_{\,n\geq 0}\, T_R^n\,(I)$ است. اگر ایده‌آل I نمایش مینیمال زیر را داشته باشد:

$$R^n \xrightarrow{\varphi=(a_{ij})} R^m \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-17]

که φ اولین سیزیجی ماتریس ایده‌آل I است، آن‌گاه با خاصیت جهانی جبر متقارن، نمایش زیر را برای جبر متقارن I خواهیم داشت:

$$\mathrm{Sym}_R(I) \cong \frac{R[T_1, \ldots, T_m\,]}{\mathcal{L}}$$

که $R[T_1, \ldots, T_m\,]$ حلقه چندجمله‌ای‌ها با متغیرهای T_i روی R است و $\mathcal{L}$ ایده‌آلی است که توسط چندجمله‌ای‌های خطی $\mathcal{L}_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}T_j$ تولید می‌شود. در حقیقت $\mathcal{L}$ توسط درایه‌های ماتریس $[T_1 \ldots T_m\,]\cdot\varphi$ تولید می‌شود. $\mathcal{L}$ را ایده‌آل تعریف جبر متقارن I گوییم. دومین جبر، جبر ریس ایده‌آل I است که به جبر فراگستری معروف است و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{R}_R(I) := \bigoplus_{\mathrm{n}\geq 0} I^n t^n \;=\; R[f_1\, t, \ldots, f_m \mathrm{t}\,] \;\subseteq\; \mathrm{R}[t]$$

هم‌ریختی R – جبری پوشای زیر را داریم:

$$R[T_1, \ldots, T_m\,] \twoheadrightarrow \mathcal{R}_R(I) \qquad , \qquad T_i \;\longmapsto\; f_i\, t$$

هستهٔ هم‌ریختی بالا که با نماد $\mathcal{J}$ نمایش می‌دهیم، توسط تمام چندجمله‌ای‌ها در $R[T_1, \ldots, T_m\,]$ تولید می‌شود که با مقداردهی $f_i t$ به صفر می‌روند. اگر $R[T_1, \ldots, T_m\,]$ را حلقهٔ مدرجی در نظر بگیریم که $\deg(T_i) = 1$، آن‌گاه $\mathcal{J}$ یک ایده‌آل مدرج است و $\mathcal{J} = \bigoplus_{\mathrm{i}\geq 1}\mathcal{J}_i$ و $\mathcal{J}_1 = \mathcal{L}$ همان ایده‌آل تعریف جبر متقارن است. بنابراین همواره هم‌ریختی R – جبری طبیعی پوشای $\lambda\colon \mathrm{Sym}_R(I) \twoheadrightarrow \mathcal{R}_R(I)$ را داریم.

تعریف ۱. ایده‌آل $I \subseteq R$ را از نوع خطی گوییم اگر λ یک به یک باشد. به عبارت دیگر اگر $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1$.

اگر I توسط یک دنبالهٔ منظم تولید شود، آن‌گاه بنا به قضیهٔ ۲. ۳. ۲ [۹]، I از نوع خطی است. دسته‌بندی ایده‌آل‌ها از نوع خطی یکی از مسأله‌های مهم در جبر جابه‌جایی است [۹] و [۱۰]. جبرهای متقارن و ریس به جبرهای فراگستری معروف هستند چون چندگونای تصویری وابسته به این جبرها همان فراگستری یک چندگونا در تحلیل تکینگی است [۴].

حال فرض کنیم $J \subseteq I$ ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند. با خاصیت تابعگونی جبر متقارن، هم‌ریختی R – جبری پوشای $\mathrm{Sym}_R(I) \twoheadrightarrow \mathrm{Sym}_{\mathrm{R/J}}(I/J)$ و در نتیجه دیاگرام زیر را داریم:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sym}_R(I) & \twoheadrightarrow & \mathcal{R}_R(I) \\ \downarrow\!\!\downarrow & & \\ \mathrm{Sym}_{\mathrm{R/J}}(I/J) & & \end{array}$$

می توانیم این دیاگرام را با حاصل ضرب تانسوری کامل کنیم که منجر به بیان مفهوم زیر می‌شود.

تعریف ۲. فرض کنیم R حلقه جابه‌جایی نوتری و $J \subseteq I$ ایده‌آل‌هایی از R باشند. جبر آلوفی I/J به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{A}_{R/J}(I/J) := \;\mathrm{Sym}_{\mathrm{R/J}}(I/J) \otimes_{\mathrm{Sym}_R(I)} \mathcal{R}_R(I).$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-17]

جبرآلوفی نسخهٔ جبری دورهای مشخصه در نظریه اشتراک‌ها در هندسهٔ جبری می‌باشد[۱]. مهم‌ترین ویژگی‌های جبر آلوفی در گزارهٔ زیر آورده شده است.

گزارهٔ ۳ [۲، لم ۲.۱]. فرض کنیم R حلقه جابه‌جایی نوتری، $J \subseteq I$ ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند.

۱) اگر I از نوع خطی باشد، آن‌گاه $\mathcal{A}_{R/J}(I/J) \cong \mathrm{Sym}_{\mathrm{R/J}}(I/J)$.

۲) جبر آلوفی نمایش زیر را دارد:

$$\mathcal{A}_{R/J}(I/J) \cong \frac{\mathcal{R}_R(I)}{(J,\tilde{J})\mathcal{R}_R(I)} \cong \bigoplus_{\mathrm{n\geq1}} I^n/JI^{n-1}$$

که J از درجه صفر، $\tilde{J}$ از درجه ۱ در جبر ریس I هستند.

۳) جبر آلوفی یک جبر میانی است:

$$\mathrm{Sym}_{\mathrm{R/J}}(I/J) \twoheadrightarrow \mathcal{A}_{R/J}(I/J) \twoheadrightarrow \mathcal{R}_{R/J}(I/J)$$

هم‌ریختی R – جبری سمت راست در ویژگی (۳) و هستهٔ آن که مدول والابرگا – والا[5] است در حالت کلی و برای چندگوناهای جبری خاصی مطالعه شده است [۶] و ارتباط نزدیکی با دیگر مفاهیم جبر جابه‌جایی بنا به گزارهٔ ۲ .۱۴ و نتیجهٔ ۲ .۱۷ [۳] نظیر عدد آرتین – ریس، پایه‌های استاندارد و عدد نوع ربطی دارد. در قسمت بعدی این مقاله به مطالعهٔ هم‌ریختی R – جبری در بند ۳ گزارهٔ بالا خواهیم پرداخت.

شرط خطی

از دیدگاه آلوفی و هم‌چنین هندسی هم‌ریختی سمت چپ در ویژگی (۳) از اهمیت زیادی برخوردار است که در مقدمه به آن اشاره کردیم. برای حالتی که J ایده‌آل تعریف یک ابررویه با تکینیگی‌های ایزوله و I ایده‌آل تعریف تکینگی‌های ابررویه وابسته به J است، به مقاله‌های [۱۱] و [۱۲] مراجعه کنید. در این مقاله‌ها بیشتر حالتی که I از نوع خطی است مطالعه شده است و در حالت کلی این هم‌ریختی مطالعه نشده است. بنا به اهمیت این هم‌ریختی تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۴. فرض کنیم $J \subseteq I$ ایده‌آل‌هایی از حلقهٔ جابه‌جایی نوتری R باشند. می‌گوییم $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کند اگر جبر آلوفی I/J و جبر متقارن متناظر یکریخت باشند.

فرض کنیم I ایده‌آلی از حلقهٔ جابه‌جایی نوتری R باشد. هم‌ریختی $\lambda\colon \mathrm{Sym}_R(I) \twoheadrightarrow \mathcal{R}_R(I)$ هم‌ریختی‌های $\lambda^{(r)}\colon \mathrm{Sym}_R^r(I) \longrightarrow \mathcal{R}_R^r(I) = I^r$ از مؤلفه‌های همگن از درجه $\mathrm{r} \geq 1$ را القا می‌کند. توجه کنیم که برای $\mathrm{r} = 0,1$ ، $\lambda^{(r)}$ یکریختی مدرج طبیعی است. پس اولین جایی که این دو جبر یکریخت نیستند، $\mathrm{r} = 2$ خواهد بود. هسته $\lambda^{(r)}$ را با $\mathrm{N_r}$ نمایش می‌دهیم.

---
5 Valabrega-Valla

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-17]

گزارهٔ ۵. فرض کنیم R حلقهٔ جابه‌جایی نوتری و $J \subseteq I$ ایده‌آل‌هایی از حلقهٔ R باشند. شرایط زیر معادلند:

۱) $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کند.

۲) برای $r \geq 1$، $N_r \subseteq \tilde{J}\, N_{r-1}$.

اثبات. دیاگرام زیر با سطرها و ستون‌های دقیق را داریم:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \tilde{J}N_{r-1} & \to & N_r & \to & K_r & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \tilde{J}\mathrm{Sym}_R^{r-1}(I) & \to & \mathrm{Sym}_R^r(I) & \to & \mathrm{Sym}_{\frac{R}{\tilde{J}}}^r(I/J) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & JI^{r-1} & \to & I^r & \to & \mathcal{A}_{R/J}^r(I/J) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

که K_r برای کامل کردن دیاگرام بالا تعریف شده است. $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کند اگر و تنها اگر برای هر $r \geq 2$، $K_r = 0$ و در نتیجه $N_r \subseteq \tilde{J}\, N_{r-1}$.

فرض کنیم $R = K[X_1, \dots, X_n]$ حلقه چندجمله ای با n متغیر روی میدان K با مشخصه صفر باشد. فرض کنیم $f \in R$ چندجمله ای کاهش یافته باشد که ابررویه کاهش یافته $X = \mathrm{Spec}\left(R/(f)\right)$ در فضای آفین $\mathbb{A}_k^n = \mathrm{Spec}(R)$ را تعریف می کند. فرض کنیم $I_f = (f, J_f)$ ایده‌آل ژاکوبی f باشد که

$$J_f = (\partial f/\partial X_1, \dots, \partial f/\partial X_n)$$

ایده‌آل گرادیانی f است. زیر اسکیم تکین ابررویه X توسط ایده‌آل ژاکوبی تعریف می‌شود.

گزارهٔ ۶. فرض کنیم $X = \mathrm{Spec}\left(R/(f)\right)$ ابررویه کاهش یافته در فضای آفین n – بعدی $\mathbb{A}_k^n$ باشد. اگر زیراسکیم تکین X، ناتکین باشد آن‌گاه $(f) \subseteq I_f$ در شرط خطی صدق می‌کند.

اثبات. چون $\mathrm{Spec}\left(R/(f)\right)$ ناتکین است پس نشاندن $\mathrm{Spec}\left(R/(f)\right) \subseteq \mathbb{A}_k^n$ نشاندن منظم است با [۱۳، B.7]، جبر متقارن مدول کونرمال I_f/I_f^2 یکریخت با حلقهٔ مدرج وابسته I_f است. بنا به قضیهٔ ۲. ۲. ۱ [۹]، این معادل با این است

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-17]

که I_{f} به صورت موضعی ایده‌آل از نوع خطی است و چون از نوع خطی بودن ویژگی موضعی است پس I_{f} از نوع خطی است و در نتیجه $(\mathrm{f}) \subseteq I_{\mathrm{f}}$ در شرط خطی صدق می‌کند.

قضیه ۷. فرض کنیم $R = K[X_1, \dots, X_n]$ حلقه چندجمله ای‌ها روی میدان K و $J \subseteq I$ ایده‌آل‌های تک‌جمله‌ای از R باشد. اگر I به صورت مینیمال توسط J و تک‌جمله‌ای m تولید شود، آن‌گاه $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کند.

اثبات. قرار می‌دهیم $J = (m_1, \dots, m_r)$ و $I = (\mathrm{J}, \mathrm{m} = m_{r+1})$. فرض کنیم Λ_{s} مجموعه همهٔ دنباله‌های غیرصعودی از اعداد $\{1, \dots, r+1\} \supseteq \alpha = (i_1, \dots, i_s)$ از طول s باشد. در این صورت $\mathrm{M}_\alpha = m_{i_1} \dots m_{i_s}$ حاصل ضرب تک جمله‌ای‌های متناظر با اندیس α در I است و هم‌چنین $\mathrm{T}_\alpha = T_{i_1} \dots T_{i_s}$ تک‌جمله‌ای متناظر با α در $R[T_1, \dots, T_{r+1}]$ است. برای هر $\alpha, \beta \in \Lambda_{\mathrm{s}}$ دوجمله‌ای زیر را داریم:

$$T_{\alpha,\beta} = \frac{\mathrm{M}_\beta}{\gcd(\mathrm{M}_\alpha, \mathrm{M}_\beta)} \mathrm{T}_\alpha - \frac{\mathrm{M}_\alpha}{\gcd(\mathrm{M}_\alpha, \mathrm{M}_\beta)} \mathrm{T}_\beta$$

بنابر [۱۴] ایده‌آل تعریف $\mathcal{J}$ جبر ریس I، توسط ایده‌آل تعریف جبر متقارن $\mathcal{L}$ و دوجمله‌ای‌های $\mathcal{J}_{\mathrm{s}} = \{T_{\alpha,\beta} \mid \alpha, \beta \in \Lambda_{\mathrm{s}}\}$ تولید می شود به عبارت دیگر $\mathcal{J} = \mathcal{L}S + (\cup_{s \geq 2} \mathcal{J}_{\mathrm{s}})S$. بنابراین جبر آلوفی I/J نمایش زیر را دارد:

$$\mathcal{A}_{R/J}(I/J) \cong \frac{R[T_1, \dots, T_{r+1}]}{(J, \tilde{J}, \mathcal{J})} \cong \frac{R[T_1, \dots, T_{r+1}]}{(\mathcal{J}, T_1, \dots, T_r, \mathcal{L}) + (\mathcal{J}_{\mathrm{s}} \mid \mathrm{s} \geq 2)}$$

حال فرض کنیم $\mathrm{s} \geq 2$ و $T_{\alpha,\beta}\ \mathcal{J}_{\mathrm{s}}$. اگر T_i برای بعضی $i = 1, \dots, r$ ، T_α و T_β را عاد کند، آن‌گاه $T_{\alpha,\beta}$ متعلق به ایده‌آل $\tilde{J} = (T_1, \dots, T_r)$ و در نتیجه متعلق به ایده‌آل تعریف جبر متقارن I/J است. فرض کنیم $\alpha = (i_1, \dots, i_s)$ و $\beta = (r+1, \dots, r+1)$. داریم:

$$gcd(\mathrm{M}_\alpha, \mathrm{M}_\beta) = gcd(\mathrm{M}_\alpha, m_{r+1}^{s'}) = m_{r+1}^{s'}$$

که $1 \leq s' \leq \mathrm{s}$ است. در نتیجه داریم:

$$T_{\alpha,\beta} = m_{r+1}^{s-s'} \mathrm{T}_\alpha - \mathrm{M} \mathrm{T}_{r+1}{}^{\mathrm{s}} \in \mathcal{J}_{\mathrm{s}}$$

که $\mathrm{M} = \mathrm{f}_\alpha / m_{r+1}^{s'}$. چون برای $i = 1, \dots, r$ دوجمله‌ای‌های $\mathcal{L}_{\mathrm{i}} = m_{r+1} \mathrm{T}_{\mathrm{i}} - m_i \mathrm{T}_{r+1} \in \mathcal{L}$ متعلق به ایده‌آل تعریف جبر متقارن I هستند. بنابراین هر $T_{\alpha,\beta} \in \mathcal{J}_{\mathrm{s}}$ با $\beta = (r+1, \dots, r+1)$ را می‌توانیم بر حسب $\mathcal{L}_{\mathrm{i}}$ و عناصر دیگر از $\mathcal{L}$ که از سیزیجی عناصر J بدست می‌آیند بنویسیم. پس برای $\mathrm{s} \geq 2$ داریم:

$$\mathcal{J}_{\mathrm{s}} \subseteq (\mathcal{J}, T_1, \dots, T_r, \mathcal{L})$$

که این نشان می‌دهد برای $J \subseteq I$ شرط خطی برقرار است.

گزارهٔ ۸. فرض کنیم $R = K[X_1, \dots, X_n]$ و $J \subseteq I = (X_1, \dots, X_n)^d$ ایده‌آل‌هایی از حلقهٔ R باشند. در این‌صورت $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کند اگر و تنها اگر $\mathrm{d} = 1$.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-17]

اثبات: اگر $\mathrm{d} = 1$ آن‌گاه I از نوع خطی است و $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کند. حال فرض کنیم $\mathrm{d} \geq 2$. مولدهای $I = (X_1, \dots, X_n)^d$ را به صورت الفبایی با شرط $X_1 > \cdots > X_n$ مرتب می‌کنیم. فرض کنیم $\varphi: R[T_1, \dots, T_N] \twoheadrightarrow \mathcal{R}_R(I)$، هم ریختی R – جبر پوشا باشد که هر T_i را به i امین تک‌جمله‌ای از درجهٔ d در I می‌برد که $N = \binom{d+n-1}{n-1}$ هستهٔ هم‌ریختی φ همان ایده‌آل تعریف جبر ریس I است. همهٔ تک‌جمله‌ای‌ها $m_1, \dots, m_r$ از درجهٔ ۱ − d در R را که به صورت الفبایی مرتب شده‌اند را در نظر می‌گیریم که $r = \binom{d+n-1}{n-1}$. فرض کنیم **M** یک ماتریس از اندازهٔ $\mathrm{n} \times \mathrm{r}$ است که درایه (i, j) ام آن متغیر $\mathrm{T_K}$ است که $\varphi(\mathrm{T_K}) = x_i m_j$ و فرض کنیم $\mathbf{X} = [X_1 \dots X_n]^T$ ماتریس ستونی از متغیرها حلقه R باشد. قرار می دهیم $\boldsymbol{Q} = [\,\mathbf{X} \mid \mathbf{M}]$ که یک ماتریس از اندازهٔ $\mathrm{n} \times (\mathrm{r} + 1)$ است. بنا به قضیه۴ [۱۵]، ایده‌آل تولید شده توسط 2-کهادهای ماتریس $\boldsymbol{Q}$، $\mathrm{I}_2(\mathbf{Q})$ ایده‌آل تعریف جبر ریس I است. پس جبر آلوفی نمایش زیر را دارد:

$$\mathcal{A}_{R/J}(I/J) \cong \frac{R[T_1, \dots, T_N]}{\left(J, L_1, \dots, L_s, \mathrm{I}_2(\mathbf{Q})\right)}$$

که L_iها چندجمله‌ای‌های خطی در $R[T_1, \dots, T_N]$ هستند که ایده‌آل $\tilde{J}$ را تعریف می‌کنند. ایده‌آل تعریف جبر متقارن توسط $\mathrm{J}, L_1, \dots, L_s$ و تمام۲-کهادهای ماتریس **Q** تولید می_شود که ستون متغیرها، $\boldsymbol{X}$ انتخاب شده است و این ۲-کهادها به فرم $X_i T_j - X_j T_i$ هستند. بنابراین مولدهای $\mathrm{I}_2(\mathbf{Q})$ که به فرم $T_i^2 - T_k T_l$ و $T_i T_j - T_k T_l$ هستند متعلق به ایده‌آل تعریف جبر متقارن I/J نمی‌توانند باشند و این اثبات را کامل می‌کند.

شرط خطی و نوع خطی

دیدیم که اگر I از نوع خطی باشد، آن‌گاه $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کند. ولی عکس این گزاره در حالت کلی برقرار نیست.

مثال ۹. فرض کنیم $f = \sum_{0 \leq i < j \leq n-1} X_i X_j - {X_n}^2$ و $R = K[x_0, \dots, x_n] = K[X_0, \dots, X_n]/(f)$. ایده‌آل‌های $J \subseteq I$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$J = (x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_n) \subseteq I = (x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \subseteq R$$

آن‌گاه $I/J \cong (X_{n-1})$, $R/J \cong K[X_{n-1}]$. چون $I/J \subseteq R/J$ توسط یک عنصر منظم تولید می‌شود I/J از نوع خطی است و

$$\mathrm{Sym}_{\mathrm{R/J}}(I/J) \cong \mathcal{A}_{R/J}(I/J) \cong \mathcal{R}_{R/J}(I/J)$$

ایده‌ال I از نوع خطی نیست چون چندجمله‌ای $\sum_{0 \leq i < j \leq n-1} T_i T_j - {T_n}^2 \in R[T_0, \dots, T_n]$ متعلق به ایده‌آل تعریف جبر ریس I است.

مثال بالا را به صورت زیر تعمیم می دهیم.

گزارهٔ ۱۰. فرض کنیم $(\mathrm{R}, \boldsymbol{m})$ حلقهٔ موضعی نامنظم و $J \subseteq I$ ایده‌آل‌هایی از R باشند. اگر $I = \boldsymbol{m}$ و R/J حلقهٔ موضعی منظم باشد، آن‌گاه $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کند و I از نوع خطی نیست.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-17]

اثبات. چون R/J حلقهٔ موضعی منظم است، ایده‌آل I/J توسط یک دنبالهٔ منظم تولید می‌شود و از ویژگی (۳) جبر آلوفی داریم:

$$\mathrm{Sym}_{\mathrm{R/J}}(I/J) \cong \mathcal{A}_{R/J}(I/J) \cong \mathcal{R}_{R/J}(I/J)$$

در نتیجه $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کند.

حال فرض کنیم $I = \boldsymbol{m}$ از نوع خطی باشد پس $\mathrm{Sym}_R(I) \cong \mathcal{R}_R(I)$ و داریم:

$$\mathrm{Sym}_{\mathrm{R/I}}(I/\mathrm{I}^2) \cong \mathrm{Sym}_{\mathrm{R}}(I) \otimes_R R/I \cong \mathcal{R}_R(I) \otimes_R R/I = gr_I(R)$$

که $gr_I(R)$ حلقه مدرج وابسته I است. با لم ناکایاما و قضیهٔ ۱۵ .۷ [۱۶]، داریم:

$$\mu(\mathrm{I}) = \dim_{\mathrm{R/I}} \mathrm{Sym}_{\mathrm{R/I}}(\mathrm{I}/\mathrm{I}^2) = \dim gr_I(R) = \dim R$$

که $\mu(\mathrm{I})$ تعداد عناصر یک مجموعهٔ مولد مینیمال برای I است و $\mu(\mathrm{I}) = \dim R$ تناقض با نامنظم بودن حلقهٔ R است.

مثال۱۱. فرض کنیم $R = K[x, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{w}]$ و

$$J = (xy, xz, xw, yz, yw, zw) \subseteq I = (J, w^2)$$

بنا به قضیهٔ (۷)، $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کند ولی I از نوع خطی نیست. ایده‌آل تعریف جبر ریس I دوجمله‌ای‌هایی از درجهٔ ۲ به صورت زیر دارد:

$$T_2T_5 - T_1T_6\ , T_3T_4 - T_1T_6\ , T_3T_5 - T_1T_7,\ \ T_3T_6 - T_2T_7,\ \ T_5T_6 - T_4T_7$$

سؤال. فرض کنیم $(\mathrm{R}, \boldsymbol{m})$ حلقهٔ موضعی منظم، $J \subseteq I$ ایده‌آل‌هایی از R باشند به طوری که $J \subseteq \boldsymbol{m}I$. مثال‌هایی ارائه دهید که $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کند و I از نوع خطی نیست.

در حالتی که J ایده‌آل اصلی در حلقهٔ نوتری R و توسط یک عنصر منظم تولید می‌شود و I ایده‌آلی شامل J است، بنا به گزارهٔ ۱ .۴[۳] شرط خطی و از نوع خطی بودن I معادلند. این نتیجه را به حالتی که J اشتراکی کامل است، تعمیم می‌دهیم. ایده‌آلی را اشتراکی کامل گوییم اگر توسط یک دنبالهٔ منظم تولید شود.

قضیه۱۲. فرض کنیم R حلقه نوتری و $J \subseteq R$ اشتراکی کامل و I ایده‌آلی شامل J باشد. شرایط زیر معادلند:

۱) $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کند.

۲) I از نوع خطی است.

اثبات. (۱) $\Rightarrow$ (۲) بنا به ویژگی (۱) جبر آلوفی برقرار است. فرض کنیم $\{f_1, \dots, f_m\}$ یک دنبالهٔ منظم در R باشد و $J = (f_1, \dots, f_m)$ و $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کند. قرار می‌دهیم:

$$\overline{\mathrm{R}} = \mathrm{R}/(f_1, \dots, f_{m-1})\,, \qquad \bar{J} = J/(f_1, \dots, f_{m-1}) = (\overline{f_m}) \subseteq \bar{\mathrm{I}} = I/(f_1, \dots, f_{m-1})$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-17]

داریم $\bar{I}/\bar{J} \cong I/J$ ، $\bar{R}/\bar{J} \cong R/J$. از این‌که $J \subseteq I$ در شرط خطی صدق می‌کند، نتیجه می‌شود که $\bar{I}/\bar{J} \subseteq \bar{R}/\bar{J}$ در شرط خطی صدق می‌کند و بنا به گزارهٔ ۱ .۴ [۳]، $\bar{I}$ از نوع خطی است و در نتیجه بنا به نتیجهٔ ۱ .۵ [۳]، I از نوع خطی است که (۲) $\Rightarrow$ (۱) را ثابت می کند.

References

1. Aluffi P., "Shadows of blow-up algebras", Tohoku Math. J, 56, (2004) 593-619.

2. Nasrollah Nejad A., "The Aluffi Algebra of an Ideal", Ph. D. Thesis, Universidade Federal de Pernambuco, Brazil, 2010.

3. Nasrollah Nejad A., Simis A., "The Aluffi algebra", J. Singularities, 3 (2011) 20-47.

4. Ellwood D., Hauser H., Mori S., Schicho J., "The resolution of singular algebraic varieties", Clay Mathematics Institute Summer School 2012, Obergurgl. CMI series, Amer. Math. Soc. 2014.

5. Nasrollah Nejad A., Shahidi Z., Zaare-Nahandi R., "Torsion-free Aluffi algebras", J. Algebra, 513 (2018) 190-207.

6. Nasrollah Nejad A., Zaare Nahandi R., "Aluffi torsion-free ideal," J. Algebra, 346 (2011) 284-298.

7. Herzog J., Simis A., Vasconcelos W., "Koszul homology and blowing-up rings", in Commutative Algebra, Proceedings, Trento (S. Greco and G. Valla, Eds.). Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 84, Marcel-Dekker, 1983, 79--169.

8. Huneke C., Rossi M., "The dimension and components of Symmetric algebras", J. Algebra, 98 (1986) 200-210.

9. Vasconcelos W., "Arithmeticof Blowup Algebras", London Mathematical Society, Lecture Notes Series 195, Cambridge University Press, 1994.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-17]

10. Herrmann M., Moonen, B., Villamayor O., "Ideals of linear type and some variants", The Curves Seminar at Queen's, Vol. VI (Kingston, ON, 1989), Exp. No. H, 37 pp., Queen's Papers in Pure and Appl. Math., 83, Queen's Univ., Kingston, ON, 1989.

11. Nasrollah Nejad A., "The Aluffi algebra of a hypersurface with isolated singularities", Communication in algebra, 46 (8) (2018) 3353-3562.

12. Farrahy A.B., Nasrollah Nejad A., "Hypersurface with linear type singular loci", Journal of Algebra and its Application, https://doi.org/10.1142/S0219498820501698.

13. Fulton W., "Intersection Theory", Springer-Verlag, Berlin, 1984.

14. Taylor D., "Ideals generated by monomials in an R–sequence", Ph. D. thesis, University of Chicago, 1966.

15. Barshay J., "Graded Algebras of Powers of Ideals Generated by A-Sequences", J. Algebra, 25 (1973) 90–99.

16. Matsumura H., "Commutative Ring Theory", Cambridge studies in advanced mathematics 8, Cambridge University Press, 1986.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-17]