دوتختی بودن جبرهای سگال مجرد بر پایهٔ مشخصه‌ها

امیر سهامی[۱]، مهدی رستمی*[۲]، مرتضی اسمعیلی[۳]، ارسلان رحمانی[۴]
۱. دانشگاه ایلام، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی
۲. دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر
۳. دانشگاه خوارزمی، دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر
۴. دانشگاه کردستان، دانشکدهٔ علوم پایه، گروه ریاضی

دریافت ۹۸/۱۲/۱۳ پذیرش ۹۹/۰۹/۰۳

چکیده

در این مقاله به بررسی و مطالعهٔ مفهوم ϕ-دوتختی چپ برای جبرهای سگال مجرد می‌پردازیم که در آن ϕ یک مشخصه روی جبر باناخ است. به‌طور دقیق‌تر، یک شرط لازم و کافی برای ϕ-دوتختی چپ جبرهای سگال مجرد مجهز به یکه تقریبی چپ را ارائه می‌دهیم. به‌عنوان یک نتیجه نشان می‌دهیم که اگر $S(G)$ یک جبر سگال دلخواه روی گروه توپولوژیک فشرده موضعی G و $\phi: L^1(G) \to \mathbb{C}$ یک مشخصه باشد، آن‌گاه $S(G)$ یک جبر باناخ $\phi|S(G)$-دوتختی چپ است اگر و تنها اگر G یک گروه میانگین‌پذیر باشد. در واقع، این نتیجه می‌تواند به‌عنوان تعمیمی از [۴، قضیهٔ ۳.۴] در نظر گرفته شود. علاوه‌براین، به بررسی ارتباط بین ϕ-دوتختی چپ با مفهوم ϕ-میانگین‌پذیری درونی جبرهای باناخ پرداخته و نشان می‌دهیم اگر A یک جبر باناخ ϕ-میانگین‌پذیر درونی باشد، آن‌گاه مفاهیم ϕ-دوتختی چپ و ϕ-میانگین‌پذیری چپ معادل هستند.

واژه‌های کلیدی: جبر سگال مجرد، ϕ-دوتختی چپ، ϕ-میانگین‌پذیری چپ، ϕ-میانگین‌پذیری درونی.
رده‌بندی موضوعی ریاضی ۲۰۱۰: 64M10, 43A07, 43A20.

مقدمه و تعاریف اولیه

فرض کنیم A یک جبر باناخ و E یک A-دومدول باناخ باشد. در این صورت می‌توان فضای دوگان E را که با E' نشان داده می‌شود به‌عنوان یک A-دومدول باناخ با اعمال مدولی زیر در نظر گرفت.

$$(a \cdot f)(x) = f(x \cdot a), \quad (f \cdot a)(x) = f(a \cdot x) \qquad (a \in A, x \in E, f \in E').$$

هم‌چنین جبر باناخ حاصل‌ضرب تانسوری تصویری[۱] $A \otimes_p A$ را می‌توان به‌عنوان یک A-دومدول باناخ در نظر گرفت که در آن

$$a \cdot (b \otimes c) = ab \otimes c, \quad (b \otimes c) \cdot a = b \otimes ca \qquad (a, b, c \in A).$$

اگر E و F دو A-مدول باناخ چپ (راست) باشند، آن‌گاه عملگر خطی $T: E \to F$ را یک همریختی A-مدولی چپ (راست) نامیم هرگاه

$$T(a \cdot x) = a \cdot T(x) \quad (T(x \cdot a) = T(x) \cdot a), \qquad (a \in A, x \in E).$$

برای اطلاعات بیش‌تر در این زمینه به منابع [۳] و [۱۶] مراجعه شود.

*نویسنده مسئول mross@aut.ac.ir

1. Projective tensor product

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.16.2]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.101]

تعریف ۱. جبر باناخ A را دوتختی[1] نامیم هرگاه همریختی A-دومدولیِ پیوسته $\rho: A \to (A \otimes_p A)''$ موجود باشد به‌طوری‌که داشته باشیم $\pi_A'' \circ \rho = \kappa_A$ که در آن $\kappa_A: A \to A''$ نگاشت نشاننده کانونی و $\pi_A: A \otimes_p A \to A$ عملگر قطری تعریف شده با ضابطه زیر است.

$$\pi_A(a \otimes b) = ab, \qquad (a, b \in A).$$

مفهوم دوتختی بودن جبرهای باناخ اولین بار توسط هلمسکی[2] معرفی و بررسی شد. به‌طور دقیق‌تر، دو تختی بودن جبرهای باناخ از مفاهیم اساسی در نظریه مانستگی[3] جبرهای باناخ است. ریاضی‌دانان زیادی به این مفهوم توجه کرده‌اند و به بررسی آن برای رده‌های مختلفی از جبرهای باناخ و ارتباط آن با برخی از مفاهیم همانستگی[4] جبرهای باناخ پرداخته‌اند. به‌عنوان یک نتیجه بسیار مهم نشان داده شده است که برای گروه توپولوژیک فشرده موضعی G، جبر گروهی $L^1(G)$ دوتختی است اگر و تنها اگر G یک گروه میانگین‌پذیر باشد یعنی یک میانگین پایای چپ مانند m روی فضای $L^\infty(G)$ موجود است [۱۶] . هم‌چنین نشان داده شده است که هر جبر باناخ دوتختی A مجهز به یکهٔ تقریبی کراندار، یک جبر باناخ میانگین‌پذیر است به این معنی که عضوی مانند $M \in (A \otimes_p A)''$ موجود است به‌طوری‌که

$$a \cdot M = M \cdot a, \quad \pi_A''(M)a = a \qquad (a \in A).$$

مفاهیم دوتختی و میانگین‌پذیری جبرهای باناخ برای رده‌های مختلف و مهمی از جبرهای باناخ از جمله جبرهای نیم‌گروهی، جبرهای فوریه، جبرهای سگال و جبرهای اندازه مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته‌اند. برای اطلاعات بیش‌تر در این باره به منابع [۲]، [۳]، [۵]، [۱۳] و [۱۴] مراجعه شود. کانیوث[5] و دیگران در [۱۰]، مفهوم جدیدی برگرفته از میانگین‌پذیری معرفی کردند که بر پایه تابعک‌های خطی ضربی روی جبرهای باناخ است. در سرتاسر این مقاله، تابعک خطی ضربی ناصفر روی جبر باناخ A را مشخصه[6] می‌نامیم و مجموعهٔ تمام مشخصه‌ها روی A را با نماد $\Delta(A)$ نمایش می‌دهیم. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و $\phi \in \Delta(A)$. در این صورت جبر باناخ A را ϕ-میانگین‌پذیر چپ[7] نامیم هرگاه عضوی مانند $m \in A''$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$a \cdot m = \phi(a)m, \quad \tilde{\phi}(m) = 1 \qquad (a \in A),$$

که در آن $\tilde{\phi}: A'' \to \mathbb{C}$ توسیع خطی ضربی نگاشت ϕ تعریف شده به‌صورت $\tilde{\phi}(F) = F(\phi)$ است. به‌طور مشابه مفاهیم ϕ-میانگین‌پذیر راست و ϕ-میانگین‌پذیری جبرهای باناخ قابل تعریف هستند. این مفاهیم به‌وسیلهٔ ریاضی‌دانان زیادی بررسی و شده است. برای مثال، برخی نتایج در مورد ϕ-میانگین‌پذیری جبرهای فوریه، جبرهای سگال مجرد و جبرهای گروهی در منابع [۱]، [۷]، [۹]، [۱۰] و [۱۱] ارائه شده است. به‌تازگی برخی از مؤلفان در [۴] و [۱۷] با الهام گرفتن از مفهوم ϕ-میانگین‌پذیری چپ جبرهای باناخ به معرفی و بررسی مفهومی با عنوان ϕ-دوتختی بودن چپ جبرهای باناخ پرداخته‌اند.

تعریف ۲. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و $\phi \in \Delta(A)$. در این صورت جبر باناخ A را ϕ-دوتختی چپ[8] نامیم هرگاه نگاشت خطی پیوسته $\rho: A \to (A \otimes_p A)''$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم

$$\rho(ab) = \phi(b)\rho(a) = a \cdot \rho(b), \quad \tilde{\phi} \circ \pi_A'' \circ \rho(a) = \phi(a).$$

1. Biflat
2. Helemskii
3. Homology
4. Cohomology
5. Kaniuth
6. Character
7. Left ϕ-amenable
8. Left ϕ-biflat

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.16.2]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.101]

لازم بذکر است که مفهوم ϕ-دوتختی چپ جبرهای باناخ تعریف شده در بالا همان مفهوم شرایط $(\mathbf{W})$ برای جبرهای باناخ است که در [۴] معرفی و بررسی شده است. برای گروه فشرده موضعی تک‌هنگی[1] G نشان داده شده است که جبر لبگ-فوریه $LA(G)$، ϕ-دوتختی چپ است اگر و تنها اگر G میانگین‌پذیر باشد [۴، نتیجهٔ ۵ .۳]. هم‌چنین در [۱۷]، مفهوم ϕ-دوتختی چپ دوگان دوم برخی جبرهای باناخ ماتریسی بررسی شده است. در [۴]، مؤلفان به بررسی مفهوم ϕ-دوتختی چپ جبرهای باناخ سگال مجرد متقارن پرداخته و به‌عنوان یک نتیجه نشان دادند اگر $S(G)$ یک جبر سگال متقارن باشد، آن‌گاه شرط لازم و کافی برای ϕ-دوتختی بودن $S(G)$ این است که گروه G میانگین‌پذیر باشد.

در این مقاله، قصد داریم ϕ-دوتختی بودن جبرهای باناخ سگال مجرد مجهز به یکه تقریبی چپ را بررسی و مطالعه کنیم و شرط لازم و کافی برای آن ارائه دهیم. با به‌کارگیری این مطلب نشان می‌دهیم اگر $S(G)$ جبر سگال دلخواه روی گروه فشرده موضعی G باشد و $\phi \in \Delta(L^1(G))$ ، آن‌گاه $S(G)$ یک جبر باناخ $\phi|S(G)$-دوتختی چپ است اگر و تنها اگر G یک گروه میانگین‌پذیر باشد. در واقع، این نتیجه می‌تواند به‌عنوان تعمیمی از [۴، قضیهٔ ۴. ۳] در نظر گرفته شود. علاوه‌براین، به بررسی ارتباط بین ϕ-دوتختی بودن با مفهوم ϕ-میانگین‌پذیری درونی جبرهای باناخ پرداخته و نشان می‌دهیم اگر A یک جبر باناخ ϕ-میانگین‌پذیر درونی باشد، آن‌گاه مفاهیم ϕ-دوتختی چپ و ϕ-میانگین‌پذیری چپ معادل هستند. در واقع، این نتیجه نیز تعمیمی از [۴، قضیهٔ ۲. ۲] است.

شرط لازم و کافی برای ϕ -دوتختی بودن جبرهای سگال مجرد

ویژگی‌های همانستگی و مانستگی جبرهای سگال مجرد در مقالات متعددی از جمله [۱]، [۹] و [۱۸] مورد توجه قرار گرفته است. هدف اصلی ما در این بخش بررسی و مطالعهٔ مفهوم ϕ-دوتختی چپ برای جبرهای باناخ سگال مجرد است. در واقع، یک شرط لازم و کافی برای مفهوم ϕ-دوتختی چپ جبرهای سگال مجرد مجهز به یکهٔ تقریبی چپ ارائه می‌دهیم. بدین منظور ابتدا مفهوم جبر سگال مجرد را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۳. فرض کنیم A یک جبر باناخ با نرم $||\cdot||_A$ باشد. در این صورت جبر باناخ B با نرم $||\cdot||_B$ را یک جبر سگال مجرد[2] نسبت به A نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

الف) B یک ایده‌آل چپ چگال در A باشد.

ب) عدد ثابت $M > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $b \in B$ داشته باشیم $||b||_A \leq M||b||_B$.

ج) عدد ثابت $C > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $b \in B, a \in A$ داشته باشیم

$$\left|\left|ab\right|\right|_B \leq C||a||_A\,||b||_B.$$

علاوه براین، گوییم B جبر سگال متقارن[3] نسبت به A است هرگاه B یک ایده‌آل دو طرفه در A باشد به‌طوری‌که عدد ثابت $C > 0$ موجود باشد که

$$||ba||_B \leq C\left|\left|a\right|\right|_A \left|\left|b\right|\right|_B \qquad (a \in A, b \in B).$$

برای اطلاعات بیش‌تر در مورد جبرهای سگال مجرد به [۶] مراجعه شود. لازم بذکر است که جبرهای سگال مجردی وجود دارند که متقارن نیستند (مثال ۸ را ملاحظه کنید).

نمادگذاری ۴. فرض کنیم $T_1: X \to Z$ و $T_2: Y \to W$ عملگرهای خطی و کراندار روی فضاهای باناخ باشند. در این صورت نگاشت

1. Unimodular
2. Abstract Segal algebra
3. Symmetric Segal algebra

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.16.2]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.101]

$T_1 \otimes T_2 : X \otimes_p Y \to Z \otimes_p W$ تعریف شده با ضابطهٔ زیر یک عملگر خطی و کراندار است.

$$(T_1 \otimes T_2)(x \otimes y) = T_1(x) \otimes T_2(y) \qquad (x \in X, y \in Y).$$

اگر X یک A-مدول باناخ چپ و Y یک A-مدول باناخ راست باشند می‌توان دید $X \otimes_p Y$ یک A-دومدول باناخ با اعمال مدولی زیر است.

$$a \cdot (x \otimes y) = a \cdot x \otimes y, \ \ (x \otimes y) \cdot a = x \otimes y \cdot a \qquad (a \in A, x \in X, y \in Y).$$

هم‌چنین اگر T_2, T_1 به‌ترتیب همریختی‌های A-مدولی چپ و راست باشند، آن‌گاه $T_1 \otimes T_2$ یک همریختی A-مدولی است.

برای به‌دست آوردن نتیجه اصلی این بخش نیازمند لم مقدماتی ۵ هستیم. لازم به‌ذکر است که نتیجهٔ زیر را می‌توان به‌عنوان تعمیمی از [۱۷، قضیهٔ ۲.۱] در نظر گرفت.

لم ۵. فرض کنیم A یک جبر باناخ ϕ-دوتختی چپ باشد به‌طوری‌که $Aker\phi = \{ab : a \in A, b \in ker\phi\}$ یک زیرمجموعهٔ نرم چگال در $ker\phi$ است. در این صورت A یک جبر باناخ ϕ-میانگین‌پذیر چپ است.

برهان: چون A یک جبر باناخ ϕ-دوتختی چپ است، عملگر خطی کراندار $\rho: A \to (A \otimes_p A)''$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $a, b \in A$ داریم

$$\rho(ab) = a \cdot \rho(b) = \phi(b)\rho(a), \qquad \tilde{\phi} \circ \pi_A'' \circ \rho(a) = \phi(a).$$

قرار دهیم $\zeta := (id_A \otimes q)'' \circ \rho: A \to (A \otimes_p \frac{A}{ker\phi})''$ که در آن منظور از $id_A: A \to A$ نگاشت همانی و $q: A \to \frac{A}{ker\phi}$ نگاشت خارج قسمتی است. به‌وضوح ζ یک نگاشت A-دومدولی چپ کراندار است. فرض کنیم $l \in ker\phi$ دلخواه باشد. با توجه به فرض نتیجه می‌شود دنباله‌های $(a_n) \subseteq A$ و $(k_n) \subseteq ker\phi$ موجودند به‌طوری‌که $a_n k_n \to l$. بنابراین

$$\begin{aligned} \zeta(l) &= \lim_n (id_A \otimes q)'' \circ \rho(a_n k_n) \\ &= \lim_n \phi(k_n)(id_A \otimes q)'' \circ \rho(a_n) = 0. \end{aligned}$$

با توجه به این مطلب به‌راحتی می‌توان دید نگاشت ζ نگاشتی مانند $\overline{\zeta}: \frac{A}{ker\phi} \to (A \otimes_p \frac{A}{ker\phi})''$ را القا می‌کند. حال با توجه به این‌که $A \otimes_p \mathbb{C} \cong A$ تعریف کنیم

$$\theta := \left(id_A \otimes \overline{\phi}\right)'' \circ \overline{\zeta}: \frac{A}{ker\phi} \to A'',$$

که در آن $\overline{\phi} \in \Delta(\frac{A}{ker\phi})$ مشخصه القا شده به‌وسیلهٔ ϕ است. به‌وضوح θ یک نگاشت A-دومدولی چپ کراندار است و

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} \circ \theta(a + ker\phi) &= \tilde{\phi} \circ \left(id_A \otimes \overline{\phi}\right)'' \circ \overline{\zeta}(a + ker\phi) \\ &= \left(\phi \otimes \overline{\phi}\right)'' \circ \zeta(a) \\ &= \left(\phi \otimes \overline{\phi}\right)'' \circ (id_A \otimes q)'' \circ \rho(a) \\ &= \tilde{\phi} \circ \pi_A'' \circ \rho(a) = \phi(a). \end{aligned}$$

حال قرار دهیم $m := \theta(a_0 + ker\phi) \in A''$ که در آن $a_0 \in A$ به‌گونه‌ای است که $\phi(a_0) = 1$. در این صورت برای هر $a \in A$ بدیهی است که $aa_0 - \phi(a)a_0 \in ker\phi$ و در نتیجه

$$aa_0 + ker\phi = \phi(a)a_0 + ker\phi.$$

بنابراین

$$a \cdot m = \theta(aa_0 + ker\phi) = \theta(\phi(a)a_0 + ker\phi) = \phi(a)m, \quad \tilde{\phi}(m) = \phi(a_0) = 1.$$

در نتیجه A یک جبر باناخ ϕ-میانگین‌پذیر چپ است و حکم ثابت می‌شود.

ذکر این نکته حائز اهمیت است که در [۱، لم ۲.۲] ثابت شده است که اگر B یک جبر سگال مجرد دلخواه نسبت به جبر باناخ A باشد، آن‌گاه $\Delta(A) = \{\phi|B : \phi \in \Delta(A)\}$. اکنون می‌توانیم قضیهٔ اصلی این بخش را ارائه کرده و شرط لازم و کافی برای ϕ-دوتختی بودن جبرهای باناخ سگال مجهز به یکهٔ تقریبی چپ را به‌دست آوریم.

قضیهٔ ۶. فرض کنیم A یک جبر باناخ و B یک جبر سگال مجرد نسبت به A باشد به‌طوری‌که دارای یکهٔ تقریبی چپ است. در این صورت عبارات زیر هم‌ارزند.

۱. A یک جبر باناخ ϕ-دوتختی چپ است.

۲. B یک جبر باناخ $\phi|B$-دوتختی چپ است.

۳. B یک جبر باناخ $\phi|B$-میانگین‌پذیر چپ است.

۴. A یک جبر باناخ ϕ-میانگین‌پذیر چپ است.

برهان: (۲) $\Rightarrow$ (۱) با توجه به فرض عملگر خطی کراندار $\Gamma: A \to (A \otimes_p A)''$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $a, b \in A$ داریم

$$\Gamma(ab) = a \cdot \Gamma(b) = \phi(b)\Gamma(a), \qquad \tilde{\phi} \circ \pi_A'' \circ \Gamma(a) = \phi(a).$$

چون B در A چگال است می‌توان عضو $b_0 \in B$ را اختیار کرد به‌طوری‌که $\phi(b_0) = 1$. حال نگاشت خطی کراندار $R_{b_0}: A \to B$ را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$R_{b_0}(a) = ab_0 \qquad (a \in A).$$

در این صورت با در نظر گرفتن نگاشت خطی کراندار $\rho \coloneqq \left(R_{b_0} \otimes R_{b_0}\right)'' \circ \Gamma|B: B \to (B \otimes_p B)''$ برای هر $b_1, b_2 \in B$ داریم:

$$\rho(b_1 b_2) = b_1 \rho(b_2) = \phi(b_2)\rho(b_1).$$

هم‌چنین

$$\begin{aligned}\tilde{\phi} \circ \pi_B'' \circ \rho(b_1) &= \tilde{\phi} \circ \pi_B'' \circ \left(R_{b_0} \otimes R_{b_0}\right)'' \circ \Gamma|B(b_1)\\ &= \tilde{\phi} \circ \pi_A'' \circ \Gamma(b_1) = \phi(b_1).\end{aligned}$$

این مطلب نشان می‌دهد B یک جبر باناخ $\phi|B$-دوتختی چپ است.

(۳) $\Rightarrow$ (۲) چون B دارای یکه تقریبی چپ است به‌سادگی می‌توان نتیجه گرفت $\{b_1 b_2 : b_1 \in B, b_2 \in ker\phi|B\}$ یک زیرمجموعهٔ نرم چگال $ker\phi|B$ است. حال با به‌کارگیری لم ۵ نتیجه می‌شود B یک جبر باناخ $\phi|B$-میانگین‌پذیر چپ است.

هم‌چنین استلزام (۴) $\Rightarrow$ (۳) از [۱، قضیهٔ ۲.۳] و استلزام (۱) $\Rightarrow$ (۴) از [۴، قضیهٔ ۲.۲] نتیجه می‌شود.

تعریف ۷. برای گروه فشرده موضعی G زیرفضای خطی $S(G)$ از جبرگروهی $L^1(G)$ را یک جبر سگال روی G نامیم هرگاه

الف) $S(G)$ زیر مجموعهٔ چگال در $L^1(G)$ باشد.

ب) $S(G)$ با نرم $||\cdot||_{S(G)}$ یک فضای باناخ است و برای هر $f \in S(G)$ داریم $||f||_{L^1(G)} \leq ||f||_{S(G)}$.

ج) برای هر $f \in S(G)$ و $y \in G$ داشته باشیم $L_y(f) \in S(G)$ و نگاشت $y \to L_y(f)$ از G بتوی $S(G)$ پیوسته است که در آن $L_y(f)(x) = f(y^{-1}x)$.

د) برای هر $f \in S(G)$ و $y \in G$ داشته باشیم $\left||L_y(f)|\right|_{S(G)} = ||f||_{S(G)}$.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.16.2]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.101]

علاوه براین، گوییم $S(G)$ یک جبر سگال متقارن روی G است هرگاه برای هر $f \in S(G)$ و $y \in G$ داشته باشیم $R_y(f) \in S(G)$ و نگاشت $y \to R_y(f)$ از G بتوی $S(G)$ پیوسته است و $||R_y(f)||_{S(G)} = ||f||_{S(G)}$ که در آن $R_y(f)(x) = f(xy^{-1})$.

برای جزییات بیش‌تر دربارهٔ جبرهای سگال روی گروه‌های فشردهٔ موضعی به [۱۴] مراجعه شود. به‌عنوان یک نتیجه شناخته شده هر جبر سگال یک جبر سگال مجرد نسبت به جبر گروهی $L^1(G)$ است ولی عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست. برای مثال جبر باناخ $L^\infty(G)$ یک جبر سگال مجرد نسبت به $L^1(G)$ است ولی $L^\infty(G)$ یک جبر سگال نیست [۱۸، مثال ۴.۸]. در ادامه مثالی از جبرهای سگال مجرد ارائه می‌دهیم که متقارن نیستند.

مثال ۸. فرض کنیم G یک گروه فشرده موضعی باشد که تک‌هنگی نیست. در این صورت زیرفضای خطی $S(G) = C_0(G) \cap L^1(G)$ با نرم تعریف شده به‌صورت $||f||_{S(G)} = ||f||_1 + ||f||_\infty$ یک جبر سگال نامتقارن روی G است. هم‌چنین برای هر $1 \le p < \infty$ زیرفضای خطی $S(G) = L^p(G) \cap L^1(G)$ با نرم $||f||_{S(G)} = ||f||_1 + ||f||_p$ یک جبر سگال نامتقارن روی G است [۱۵، بخش ۵] .

در [۴، قضیهٔ ۳.۴]، مؤلفان ϕ-دوتختی بودن چپ جبرهای سگال متقارن را بررسی و یک شرط لازم و کافی برای آن به‌دست آوردند. در ادامه به‌عنوان یک نتیجهٔ اساسی از قضیهٔ ۶، ϕ-دوتختی بودن چپ جبرهای سگال را در حالت کلی مشخص‌سازی می‌کنیم.

نتیجهٔ ۹. فرض کنیم G یک گروه فشرده موضعی و $S(G)$ یک جبر سگال روی G باشد. در این صورت برای هر $\phi \in \Delta(L^1(G))$ عبارات زیر هم‌ارزند.

۱. $L^1(G)$ یک جبر باناخ ϕ-دوتختی چپ است.

۲. $S(G)$ یک جبر باناخ $\phi|S(G)$-دوتختی چپ است.

۳. G میانگین‌پذیر است.

برهان: ابتدا با توجه به [۱۵، قضیهٔ ۱ از فصل ۸] می‌دانیم هر جبر سگال دلخواه $S(G)$ همواره دارای یکه تقریبی چپ است. حال با استفاده از قضیهٔ ۶ و [۴، نتیجهٔ ۳.۱] اثبات تمام است.

در پایان این بخش، مفهوم ϕ-دوتختی چپ جبرهای سگال مجرد را در حالتی بررسی می‌کنیم که A یک جبر باناخ با یکه تقریبی چپ است. ذکر این نکته حائز اهمیت است که ایده برهان قضیهٔ ۱۰ برگرفته از اثبات [۱۲، قضیهٔ ۱. ۲] در مورد مفهوم ϕ-دوتصویری جبرهای باناخ است.

قضیهٔ ۱۰. فرض کنیم A یک جبر باناخ با یکه تقریبی چپ باشد و $\phi \in \Delta(A)$. در این صورت برای هر جبر سگال مجرد B نسبت به A شرایط زیر هم‌ارزند.

۱. B یک جبر باناخ $\phi|B$-دوتختی چپ است.

۲. B یک جبر باناخ $\phi|B$-میانگین‌پذیر چپ است.

برهان: (۲) $\Rightarrow$ (۱) چون B یک جبر باناخ $\phi|B$-دوتختی چپ است، نگاشت خطی و کراندار $\rho: B \to \left(B \otimes_p B\right)''$ موجود است به‌طوری‌که در شرایط تعریف ۲ صدق می‌کند. هم‌چنین فرض کنیم $b_0 \in B$ و R_{b_0} به‌ترتیب همان عضو و نگاشتی باشد که در برهان قضیهٔ ۶ استفاده شد. حال نگاشت خطی کراندار

$$\lambda := (I \otimes I)'' \circ \rho \circ R_{b_0}: A \to \left(A \otimes_p A\right)'',$$

را در نظر می‌گیریم که در آن $I: B \to A$ نگاشت شمول است. در این صورت برای هر $a \in A$ و $b_1, b_2 \in B$ داریم

$$\begin{aligned}\tilde{\phi} \circ \pi_A'' \circ \lambda(a) &= \tilde{\phi} \circ \pi_A'' \circ (I \otimes I)'' \circ \rho \circ R_{b_0}(a)\\ &= \tilde{\phi} \circ \pi_B'' \circ \rho \circ R_{b_0}(a) = \phi(ab_0) = \phi(a),\end{aligned}$$

و علاوه‌براین

$$\begin{aligned} b_1 \cdot \lambda(b_2) &= b_1 \cdot (I \otimes I)'' \circ \rho \circ R_{b_0}(b_2) \\ &= (I \otimes I)'' \circ \rho \circ R_{b_0}(b_1 b_2) \\ &= \phi(b_2)(I \otimes I)'' \circ \rho \circ R_{b_0}(b_1) \\ &= \phi(b_2)\lambda(b_1). \end{aligned}$$

با فرض این‌که $K = ker\phi$ و $q: A \to \frac{A}{K}$ نگاشت خارج قسمتی باشد قرار می‌دهیم $\zeta \coloneqq (id_A \otimes q)'' \circ \lambda: A \to (A \otimes_p \frac{A}{K})''$. بدیهی است ζ نگاشتی خطی و کراندار است. از طرفی چون A دارای یکه تقریبی چپ است، AK در K نرم چگال است و در نتیجه برای هر $k \in K$ دنباله‌های $(a_n) \subseteq A$ و $(k_n) \subseteq K$ موجودند به‌طوری‌که $a_n k_n \to k$. در این صورت

$$\begin{aligned} \zeta(k) &= (id_A \otimes q)'' \circ \lambda(k) \\ &= \lim (id_A \otimes q)'' \circ \lambda(a_n k_n) \\ &= \lim \phi(k_n)(id_A \otimes q)'' \circ \lambda(a_n) = 0 \end{aligned}$$

بنابراین نگاشت ζ یک نگاشت روی فضای خارج قسمتی $\frac{A}{K}$ القا می‌کند که آن‌را با همان نماد ζ نمایش می‌دهیم. از آن‌جاکه $\frac{A}{K} \cong \mathbb{C}$ به‌راحتی می‌توان $m \coloneqq \zeta(b_0 + K)$ را به‌عنوان یک عضو در A'' در نظر گرفت. بدین‌ترتیب برای هر $b \in B$ داریم

$$\begin{aligned} b \cdot m &= b \cdot \zeta(b_0 + K) = \zeta(b b_0 + K) \\ &= \zeta(\phi(b) b_0 + K) = \phi(b) m, \end{aligned}$$

و هم‌چنین

$$\left(\phi \otimes \overline{\phi}\right)'' \circ \lambda(b) = \tilde{\phi} \circ \pi_A'' \circ \rho(b) = \phi(b), \qquad \tilde{\phi} \circ \left(id_A \otimes \overline{\phi}\right)'' = \left(\phi \otimes \overline{\phi}\right)'',$$

که در آن $\overline{\phi}: \frac{A}{K} \to \mathbb{C}$ مشخصه تعریف شده به‌صورت $\overline{\phi}(a + K) = \phi(a)$ است. بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(m) &= \tilde{\phi} \circ \zeta(b_0 + K) \\ &= \tilde{\phi} \circ (id_A \otimes q)'' \circ \lambda(b_0) \\ &= \left(\phi \otimes \overline{\phi}\right)'' \circ \lambda(b_0) = \tilde{\phi} \circ \pi_B'' \circ \rho(b_0) \\ &= \phi(b_0) = 1. \end{aligned}$$

حال چون B در A چگال است برای هر $a \in A$ داریم $a \cdot m = \phi(a) m$ و در نتیجه A یک جبر باناخ ϕ-میانگین‌پذیر چپ است. با جای‌گزینی $m \cdot b_0$ به‌جای m می‌توان فرض کرد $m \in B''$ و در نتیجه B یک جبر باناخ $\phi|B$-میانگین‌پذیر چپ است.

استلزام (۱) $\Rightarrow$ (۲) نیز بدیهی است و بدین‌ترتیب اثبات تمام است.

ارتباط بین ϕ-دوتختی و ϕ-میانگین‌پذیری درونی

هدف اصلی در این بخش بررسی ارتباط بین ϕ-دوتختی بودن با مفهوم ϕ-میانگین‌پذیری درونی جبرهای باناخ است. به‌عنوان نتیجه اساسی نشان می‌دهیم اگر A یک جبر باناخ ϕ-میانگین‌پذیر درونی باشد، آن‌گاه مفاهیم ϕ-دوتختی چپ و ϕ-میانگین‌پذیری چپ معادل هستند. در ابتدا مفهوم ϕ-میانگین‌پذیری درونی جبرهای باناخ را معرفی می‌کنیم.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.16.2]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.101]

تعریف ۱۱. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و $\phi \in \Delta(A)$. در این صورت A، ϕ-میانگین‌پذیر درونی[1] است هرگاه تور $(a_\alpha) \subseteq A$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $a \in A$ داشته باشیم

$$aa_\alpha - a_\alpha a \to 0, \quad \phi(a_\alpha) = 1.$$

در حالتی‌که جبر باناخ A جابه‌جایی یا دارای یکهٔ تقریبی کراندار باشد به‌راحتی می‌توان دید A، ϕ-میانگین‌پذیر درونی است ولی عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست [۸]. هم‌چنین در [۴، قضیهٔ ۲.۲] ثابت شده است که اگر جبر باناخ A دارای یکهٔ تقریبی کراندار باشد، آن‌گاه مفاهیم ϕ-دوتختی چپ و ϕ-میانگین‌پذیری چپ معادل هستند. با توجه به این مطالب در ادامه یک تعمیم از [۴، قضیهٔ ۲.۲] را برای جبرهای باناخ ϕ-میانگین‌پذیر درونی ثابت می‌کنیم.

لم ۱۲. فرض کنیم A یک جبر باناخ ϕ-میانگین‌پذیر درونی باشد که در آن $\phi \in \Delta(A)$. در این صورت این عبارات هم‌ارزند:

۱. A یک جبر باناخ ϕ-دوتختی چپ است.

۲. A یک جبر باناخ ϕ-میانگین‌پذیر چپ است.

برهان: (۲) $\Leftarrow$ (۱) چون A یک جبر باناخ ϕ-دوتختی چپ است، عملگر خطی کراندار $\rho: A \to (A \otimes_p A)''$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $a, b \in A$ داریم

$$\rho(ab) = a \cdot \rho(b) = \phi(b)\rho(a), \qquad \tilde{\phi} \circ \pi_A'' \circ \rho(a) = \phi(a).$$

از طرفی دیگر چون A ϕ-میانگین‌پذیر درونی است در نتیجه تور $(a_\alpha) \subseteq A$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $a \in A$ داریم

$$aa_\alpha - a_\alpha a \to 0, \quad \phi(a_\alpha) = 1.$$

قرار دهیم $m_\alpha = \rho(a_\alpha)$. بدیهی است (m_α) یک تورکراندار در $\left(A \otimes_p A\right)''$ است و

$$a \cdot m_\alpha - \phi(a)m_\alpha = \rho(aa_\alpha - a_\alpha a) \to 0 \qquad (a \in A),$$

و هم‌چنین

$$\tilde{\phi} \circ \pi_A''(m_\alpha) = \phi(a_\alpha) = 1.$$

از طرف دیگر بنابر قضیهٔ باناخ-آل‌اوغلو می‌دانیم تور (m_α) دارای نقطه انباشتگی مانند M در توپولوژی ضعیف ستاره روی $\left(A \otimes_p A\right)''$ است. در این صورت برای هر $a \in A$ داریم

$$a \cdot M - \phi(a)M = w^* - \lim_\alpha a \cdot m_\alpha - \phi(a)m_\alpha = 0,$$

و با توجه به پیوستگی نگاشت‌های $\tilde{\phi}$ و π_A'' نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره نتیجه می‌شود

$$\tilde{\phi} \circ \pi_A''(M) = w^* - \lim_\alpha \tilde{\phi} \circ \pi_A''(m_\alpha) = 1.$$

حال با به‌کارگیری [۷، قضیهٔ ۲.۳] نتیجه می‌گیریم که A یک جبر باناخ ϕ-میانگین‌پذیر چپ است.

قضیهٔ ۱۳. فرض کنیم A یک جبر باناخ ϕ-میانگین‌پذیر درونی باشد که در آن $\phi \in \Delta(A)$ و B یک جبر سگال مجرد نسبت به A باشد. در این صورت این عبارات هم‌ارزند:

۱. B یک جبر باناخ $\phi|B$-دوتختی چپ است.

۲. B یک جبر باناخ $\phi|B$-میانگین‌پذیر چپ است.

برهان: (۲) $\Leftarrow$ (۱) فرض کنیم $R_{b_0}, q, \rho, \lambda, \zeta$ همان نگاشت‌های استفاده شده در برهان قضیهٔ ۱۰ باشند. چون A، ϕ-میانگین‌پذیر درونی است در نتیجه تور $(a_\alpha) \subseteq A$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $a \in A$ داریم

$$aa_\alpha - a_\alpha a \to 0, \quad \phi(a_\alpha) = 1.$$

1. Inner ϕ-amenable

قرار دهیم $m_\alpha := \zeta(a_\alpha) \in \left(A \otimes \frac{A}{K}\right)'' \cong A''$. بوضوح (m_α) یک تور کراندار در A'' است که برای هر $b \in B$ داریم

$$\begin{aligned} b \cdot m_\alpha - \phi(b)m_\alpha &= b \cdot (id_A \otimes q)'' \circ (I \otimes I)'' \circ \rho \circ R_{b_0}(a_\alpha) \\ &\quad -\phi(b)(id_A \otimes q)'' \circ (I \otimes I)'' \circ \rho \circ R_{b_0}(a_\alpha) \\ &= (id_A \otimes q)'' \circ (I \otimes I)'' \circ \rho \circ R_{b_0}(ba_\alpha) \\ &\quad -(id_A \otimes q)'' \circ (I \otimes I)'' \circ \rho \circ R_{b_0}(a_\alpha b) \\ &= (id_A \otimes q)'' \circ (I \otimes I)'' \circ \rho \circ R_{b_0}(ba_\alpha - a_\alpha b) \to 0. \end{aligned}$$

علاوه براین

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(m_\alpha) &= \tilde{\phi} \circ (id_A \otimes q)'' \circ (I \otimes I)'' \circ \rho \circ R_{b_0}(a_\alpha) \\ &= \tilde{\phi} \circ \pi_B \circ \rho \circ R_{b_0}(a_\alpha) \\ &= \phi(a_\alpha) = 1. \end{aligned}$$

حال با در نظر گرفتن $M \in A''$ به‌عنوان نقطه انباشتگی تور کراندار (m_α) در توپولوژی ضعیف ستاره داریم

$$b \cdot M = \phi(b)M, \quad \tilde{\phi}(M) = 1 \quad (b \in B).$$

حال از آن‌جاکه B در A چگال است نتیجه می‌شود

$$a \cdot M = \phi(a)M, \quad \tilde{\phi}(M) = 1 \quad (a \in A),$$

و در نتیجه A یک جبر باناخ ϕ-میانگین‌پذیر چپ است. اکنون با به‌کارگیری [۱، قضیهٔ ۲.۳]، نتیجه می‌شود که B یک جبر باناخ $\phi|B$-میانگین‌پذیر چپ است. استلزام (۱) ⇐ (۲) نیز از [۴، قضیهٔ ۲.۲] نتیجه می‌شود.

در ادامه، به‌عنوان یک کاربرد از قضیهٔ ۱۳ می‌توان نتیجهٔ ۹ که در بخش قبل ارائه شد را با روشی دیگر بدین‌صورت به‌دست آورد.

نتیجهٔ ۱۴. فرض کنیم G یک گروه فشرده موضعی و $S(G)$ یک جبر سگال روی G باشد. در این صورت برای هر $\phi \in \Delta(L^1(G))$ این عبارات هم‌ارزند:

۱. $L^1(G)$ یک جبر باناخ ϕ-دوتختی چپ است.

۲. $S(G)$ یک جبر باناخ $\phi|S(G)$-دوتختی چپ است.

۳. G میانگین‌پذیر است.

برهان: (۱) ⇐ (۲) چون جبر گروهی $L^1(G)$ همواره دارای یکه تقریبی کراندار است، با استفاده از لم ۳ نتیجه می‌گیریم $L^1(G)$ یک جبر باناخ ϕ-میانگین‌پذیر چپ است. حال با به‌کارگیری [۱، قضیهٔ ۲.۳] نتیجه می‌شود جبر سگال $S(G)$، $\phi|S(G)$-میانگین‌پذیر چپ و در نتیجه $\phi|S(G)$-دوتختی چپ است.

(۲) ⇐ (۳) با توجه به این‌که جبر گروهی $L^1(G)$ همواره دارای یکه تقریبی کراندار است نتیجه می‌شود $L^1(G)$ یک جبر باناخ ϕ-میانگین‌پذیر درونی است. اکنون با توجه به این‌که $S(G)$ یک جبر باناخ $\phi|S(G)$-دوتختی چپ است و با استفاده از قضیهٔ ۱۳ نتیجه می‌شود $S(G)$ یک جبر باناخ $\phi|S(G)$-میانگین‌پذیر چپ است. بنابراین G یک گروه میانگین‌پذیر است [۱، نتیجهٔ ۴. ۳].

استلزام (۱) ⇐ (۳) نیز بدیهی است.

نتیجهٔ ۱۵. فرض کنیم A یک جبر باناخ ϕ-میانگین‌پذیر درونی باشد که در آن $\phi \in \Delta(A)$. در این صورت برای هر جبر سگال مجرد B نسبت به A شرایط زیر هم‌ارزند.

۱. B یک جبر باناخ $\phi|B$-دوتختی چپ است.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.16.2]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.101]

۲. A یک جبر باناخ ϕ-میانگین‌پذیر چپ است.

برهان: از لم ۱۲ و [۱، قضیهٔ ۳. ۲] به‌راحتی نتیجه می‌شود.

منابع

1. Alaghmandan M., Nasr Isfahani R., Nemati M., "Character amenability and contractibility of abstract Segal algebras", Bull. Aust. Math. Soc., 82 (2010) 274-281.
2. Dales H. G., Ghahramani F., Ya. Helemskii A., "Amenability of measure algebras", J. London Math. Soc., 66 (2002) 213-226.
3. Dales H. G., Lau A. T., Strauss D., "Banach algebras on semigroups and their compactifications", Mem. Amer. Math. Soc., 205 (2010) 1-165.
4. Essmaili M., Rostami M., Amini M., "A Characterization of biflatness of Segal algebras based on a character", Glasnik Math., 51 (71) (2016) 45-58.
5. Forrest B. E., Runde V., "Amenability and weak amenability of the Fourier algebra", Math. Z., 250 (2005) 731-744.
6. Ghahramani F., Lau A. T., "Weak amenability of certain classes of Banach algebras without bounded approximate identity", Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 133 (2002) 357-371.
7. Hu Z., Monfared M. S., Traynor T., "On character amenable Banach algebras", Studia Math., 193 (2009) 53-78.
8. Jabbari A., Mehdi Abad T., Zaman Abadi M., "On ϕ-inner amenable Banach algebras", Colloq. Math., 122 (2011) 1-10.
9. Javanshiri H., Nemati M., "Invariant ϕ-means for abstract Segal algebras related to locally compact groups", Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 25 (2018) 687-698.
10. Kaniuth E., Lau A. T., Pym J., "On ϕ-amenability of Banach algebras", Math. Proc. Camb. Philos. Soc., 44 (2008) 85-96.
11. Monfared M. S., "Character amenability of Banach algebras", Math. Proc. Camb. Philos. Soc., 144 (2008) 697-706.
12. Pourabbas A., Sahami A., "On character biprojectivity of Banach algebras", U.P.B. Sci. Bull., Series A. 78 (4) (2016) 163-174.
13. Pourmahmood-Aghababa H., "Amenability properties of Figà-Talamanca-Herz algebras on inverse semigroups", Studia Mathematica, 1 (233) (2016) 1-12.
14. Ramsden P., "Biflatness of semigroup algebras", Semigroup Forum, 79 (2009) 515-530.
15. Reiter H., "L^1-algebras and Segal algebras", Lecture Notes in Mathematics, 231 Springer, (1971).
16. Runde V., "Lectures on Amenability", Springer, New York (2002).
17. Sahami A., "On left ϕ-biprojectivity and left ϕ-biflatness of certain Banach algebras", U.P.B. Sci. Bull., Series A.,Vol. 81,Iss 4, (2019).
18. Samea H., "Essential amenability of abstract Segal algebras", Bull. Aust. Math. Soc., 79 (2009) 319-325.

[DOR: 20.1001.1.25882546.1400.7.1.16.2]
[DOI: 10.52547/mmr.7.1.101]