Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Extension functors of generalized local cohomology modules and Serre subcategories

Kamal Bahmanpour

Department of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran.

E-mail: bahmanpour.k@gmail.com

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
8 March 2020
Revised form:
8 June 2020
Accepted:
20 June 2020
Published online:
14 May 2022

Keywords:
Associated prime ideal;
Cofinite module;
Complete local ring;
Generalized local cohomology module;
Krull dimension.

ABSTRACT

Introduction

Let R be a commutative Noetherian ring (with identity) and I be an ideal of R. The local cohomology modules $\mathrm{H}_I^i(M)$, $i = 0, 1, 2, ...$, of an R-module M with respect to I, with support in $V(I)$, were introduced by A. Grotendieck in [14, 15]. The local cohomology module $\mathrm{H}_I^i(M)$ is defined as:

$$\mathrm{H}_I^i(M) = \varinjlim_{n\geq 1} \mathrm{Ext}_R^i(R/I^n, M).$$

Also, for each pair of R-modules M and N, the generalized local cohomology modules

$$\mathrm{H}_I^i(M,N) \cong \varinjlim_{n\geq 1} \mathrm{Ext}_R^i(M/I^nM, N),$$

were introduced by Herzog in [17]. Clearly, this notation is a generalization of the ordinary local cohomology module.

Hartshorn defined an R-module M to be I-cofinite if $\mathrm{Supp}(M) \subseteq V(I)$ and $\mathrm{Ext}_R^i(R/I, M)$ is finitely generated for all i and asked:

For which rings R and ideals I are the modules $\mathrm{H}_I^i(M)$ I-cofinite for all i and all finitely generated modules M?

In [8], K. Bahmanpour et al., introduced the new notation of the n-th finiteness dimension $f_I^n(M)$, for all $n \in \mathbb{N}_0$. More precisely, they used the following notation:

$$f_I^n(M) := \inf\{f_{IR_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M/IM) \text{ and } \dim(R/\mathfrak{p}) \geq n\},$$

where, for each ideal J of R and each finitely generated R-module N, the finiteness dimension $f_J(N)$ of N relative to J is defined as:

$$f_J(N) := \inf\{i \in \mathbb{N}_0 : \mathrm{H}_J^i(N) \text{ is not finitely generated}\}$$

In [3], Asadollahi and Naghipour introduced the notation of the R-modules in dimension $< n$, for all $n \in \mathbb{N}_0$. More precisely, by them definition, an R-module M is said to be in dimension $< n$ if and only if $\dim(M/N) < n$ for some finitely generated submodule N of M. Moreover, they showed that if R is a complete local ring then for any finitely generated R-module M there is another description of $f_I^n(M)$ as follows:

$$f_I^n(M) := \inf\{0 \leq i \in \mathbb{Z} : \mathrm{H}_I^i(M) \text{ is not in dimension } < \mathrm{n}\}.$$

In [18], Hoang generalized their result to generalized local cohomology as follows:

$$f_I^n(M,N) := \inf\{0 \leq i \in \mathbb{Z} : \mathrm{H}_I^i(M,N) \text{ is not in dimension } < \mathrm{n}\}.$$

where N is another finitely generated R-module. Also, he proved that if $I_M = \mathrm{Ann}_R(M/IM)$ then $f_I^n(M,N)$ is defined as:

$$f_I^n(M,N) := \inf\{f_{IR_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, N_\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(N/I_MN) \text{ and } \dim(R/\mathfrak{p}) \geq n\},$$

where, for each ideal J of R and each pair of finitely generated R-modules M, N, the finiteness dimension $f_J(M,N)$ of M, N relative to J is defined as:

$$f_J(M,N) := \inf\{i \in \mathbb{N}_0 : \mathrm{H}_J^i(M,N) \text{ is not finitely generated}\}.$$

Also in [1], Abazari and the present author proved that, if $(R,\mathfrak{m})$ is a complete local ring, then for all $i < f_I^n(M)$ and all $j \geq 0$, the R-modules $\mathrm{Ext}_R^j\left(R/I, \mathrm{H}_I^i(M,N)\right)$ are in dimension $< n-2$.

Throughout this paper, R will always be a commutative Noetherian ring with non-zero identity and I will be an ideal of R. For each R-module L, we denote by

$\mathrm{Ass}_R(L)$ the set of associated prime ideals of L. Also, for any ideal $\mathfrak{a}$ of R, we denote $\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R : \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\}$ by $V(\mathfrak{a})$. For any unexplained notation and terminology we refer the reader to [10] and [24].

Question. If $(R, \mathfrak{m})$ is a complete local ring, then for all $i < f_I^n(M, N)$ and all $j \geq 0$, are the R-modules $\mathrm{Ext}_R^j\left(R/I, \mathrm{H}_I^i(M, N)\right)$ in dimension $< n-2$?

Material and methods

In this paper, the symbol $\mathcal{C}_{<n}(R)$ denote the category of all R-modules in dimension $< n$ and the symbol $\mathcal{C}_{<n}(I, R)$ denotes the category of all R-modules T, such that $\mathrm{Ext}_R^j(R/I, T)$ is in $\mathcal{C}_{<n}(R)$, for all $j \geq 0$. Lemmas 2.1 and 2.2 and theorems 2.3 and 2.4, which are suitable generalizations of some well-known results are needed in this paper.

Results and discussion

The main purpose of this paper is to prepare an affirmative answer to our question in general. Moreover, we shall give some applications of this result concerning the finiteness of special sets of associated prime ideals of the generalized local cohomology modules.

Conclusion

We prove that if $(R, \mathfrak{m})$ is a Noetherian complete local ring, I is an ideal of R, $t \geq 0$ and $n \geq 2$ are two integers and M, N are two finitely generated R-modules such that for each $0 \leq i \leq t$ the R-module $\mathrm{H}_I^i(M, N)$ is in $\mathcal{C}_{<n}(R)$, then for any finitely generated R-module X with support in $V(I)$, each element of the set

$$\mathfrak{J} := \{\mathrm{Ext}_R^j\left(X, \mathrm{H}_I^i(M, N)\right) : j \geq 0 \text{ and } 0 \leq i \leq t\}$$
$$\cup \{\mathrm{Hom}_R\left(X, \mathrm{H}_I^{t+1}(M, N)\right), \mathrm{Ext}_R^1\left(X, \mathrm{H}_I^{t+1}(M, N)\right)\}$$

is in $\mathcal{C}_{<n-2}(R)$ (Theorem 2.7). The following results are immediately consequences of this result. Let $(R, \mathfrak{m})$ be a Noetherian complete local ring, I be an ideal of R and $n \geq 2$ be an integer and M, N be two finitely generated R-modules such that $\dim(N/IN) = n$. Then for any finitely generated R-module X with support in $V(I)$, each element of the set

$$\mathfrak{J} := \{\mathrm{Ext}_R^j\left(X, \mathrm{H}_I^i(M, N)\right) : j \geq 0 \text{ and } i \geq 0\}$$

is in $\mathcal{C}_{<n-1}(R)$ (Corollary 2.8). Let $(R, \mathfrak{m})$ be a Noetherian complete local ring, I be an ideal of R, M, N be two finitely generated R-modules and $n \geq 2$ be an integer. Then for all $i < f_I^n(M, N)$ and all $j \geq 0$, the R-modules $\mathrm{H}_I^i(M, N)$ are in $\mathcal{C}_{<n-2}(I, R)$ (Corollary 2.9). Another result of this paper is a generalization of [3, Theorem 2.8] and [1, Theorem 2.10]. Let $(R, \mathfrak{m})$ be a Noetherian complete local ring, I be an ideal of R, $t \geq 0$ and $n \geq 2$ be two integers and M, N be two finitely generated R-modules such that for each $0 \leq i \leq t$ the R-module $\mathrm{H}_I^i(M, N)$ is in $\mathcal{C}_{<n}(R)$. Then for any finitely generated R-module X with support in $V(I)$, the following statements hold: (i) For each element L of the set

$$\mathfrak{J} := \{\mathrm{Ext}_R^j\left(X, \mathrm{H}_I^i(M, N)\right) : j \geq 0 \text{ and } 0 \leq i \leq t\}$$
$$\cup \{\mathrm{Hom}_R\left(X, \mathrm{H}_I^{t+1}(M, N)\right), \mathrm{Ext}_R^1\left(X, \mathrm{H}_I^{t+1}(M, N)\right)\}$$

the set

$$\mathrm{Ass}_R(L)_{\geq n-2} := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(L) : \dim(R/\mathfrak{p}) \geq n-2\}$$

is finite.

(ii) For each $0 \leq i \leq t+1$, the set

$$\mathrm{Ass}_R(\mathrm{H}_I^i(M, N))_{\geq n-2} = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(\mathrm{H}_I^i(M, N)) : \dim(R/\mathfrak{p}) \geq n-2\}$$

is finite.

(iii) The set

$$\mathrm{Ass}_R\Big(\bigoplus_{i=0}^{f_I^n(M,N)} \mathrm{H}_I^i(M, N)\Big)_{\geq n-2} = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R\Big(\bigoplus_{i=0}^{f_I^n(M,N)} \mathrm{H}_I^i(M, N)\Big) : \dim(R/\mathfrak{p}) \geq n-2\}$$

is finite. (Theorem 2.11).

How to cite: Bahmanpour, K., (2022). Extension functors of generalized local cohomology modules and Serre subcategories. *Mathematical Researches*, 8 (1), 43-56.

Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

تابع‌گون‌های توسیع مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته و زیررسته‌های سِر

کمال بهمن پور

نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضیات و کاربردها، دانشکدهٔ علوم، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران، پست الکترونیکی: bahmanpour.k@gmail.com

اطلاعات مقاله	چکیده

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۲/۱۸
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۳/۱۹
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۳/۳۱
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۲۴

واژه‌های کلیدی:
ایده‌آل اول وابسته،
بعد کرول،
حلقه موضعی کامل،
کوهمولوژی موضعی،
مدول هم‌متناهی.

فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی، نوتری و کامل و I یک ایده‌آل سره از R باشد. فرض کنیم M، N و X سه R- مدول متناهی مولد باشند به طوری که $\mathrm{Supp}\,(X) \subseteq V(\mathrm{I})$. فرض کنید $t \geq 0$ یک عدد صحیح باشد به طوری که برای هر $0 \leq i \leq t$، R- مدول $\mathrm{H}_I^i(M,N)$ در بعد $n >$ است. در این صورت نشان می‌دهیم هر عضو L از مجموعهٔ

$$\mathfrak{J} = \{\mathrm{Ext}_R^j\left(X, \mathrm{H}_I^i(M,N)\right) \ : \ j \geq 0 \text{ و } 0 \leq i \leq t\} \cup \{\mathrm{Ext}_R^i\left(X, \mathrm{H}_I^{t+1}(M,N)\right) \ : \ i = 0,1\}$$

در بعد $n-2 >$ است و به عنوان یک نتیجه از آن ثابت می‌کنیم مجموعهٔ

$$\mathrm{Ass_R}(L) \cap \{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec(R)} \ : \ \dim R/\mathfrak{p} \geq \mathrm{n}-2\}$$

متناهی است. به ویژه مجموعهٔ

$$\mathrm{Ass_R}\left(\oplus_{i=0}^{t+1} \mathrm{H}_I^i(M,N)\right) \cap \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec\,(R)} \ : \ \dim R/\mathfrak{p} \geq \mathrm{n}-2\}$$

متناهی است. همچنین ثابت می کنیم R- مدول $\mathrm{Ext}_R^j(X, \mathrm{H}_I^i(M,N))$ برای اعداد صحیح $i,j \geq 0$، در بعد $n-1 >$ است منوط بر این که $\dim(N/IN) = n$. این موارد تعمیم نتایج اصلی هونیکه-کوه در مرجع بیست، دلفینو در مرجع دوازده، چیریاکسکو در مرجع یازده، اسدالهی- نقی پور در مرجع سه، کوی در مرجع بیست و یک، برادمن- لشگری در مرجع نه، بهمن پور- نقی پور در مرجع هفت و بهمن پور و همکاران در مرجع هشت، روی حلقه‌های موضعی و کامل است.

استناد: بهمن‌پور؛ کمال. (۱۴۰۱). تابع‌گون‌های توسیع مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته و زیررسته‌های سِر. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۱)، ۵۶-۴۳.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و نوتری با عضو همانی و I ایده‌آلی از R باشد. مدول‌های کوهمولوژی موضعی $\mathrm{H}_I^i(M)$، به طوری که $i = 0, 1, 2, \ldots$ از R- مدول M نسبت به I که در آن $\mathrm{Supp}\,(\mathrm{H}_I^i(M)) \subseteq V(I)$، توسط گروتندیک در [۱۴،۱۵] تعریف شده است. مدول کوهمولوژی موضعی $\mathrm{H}_I^i(M)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{H}_I^i(M) = \varinjlim_{n\geq 1} \mathrm{Ext}_R^i(R/I^n\,, M).$$

همچنین مدول کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته

$$\mathrm{H}_I^i(M,N) = \varinjlim_{n\geq 1} \mathrm{Ext}_R^i(M/I^nM\,, N).$$

برای R- مدول‌های M و N توسط هرزوگ [۱۷] معرفی شده است. به وضوح این مفهوم تعمیمی از مفهوم مدول کوهمولوژی موضعی معمولی است.

مدول $\mathrm{H}_I^i(M)$ دارای دو جنبهٔ جبری و هندسی است. به خصوص چندین کاربرد برای این مدول‌ها در هندسهٔ جبری وجود دارد. برخی از این کاربردها را می‌توانید در [۱۰] ملاحظه کنید. یکی از نتایج شناخته شده آن است که در حالت کلی مدول کوهمولوژی موضعی $\mathrm{H}_I^i(M)$، متناهی مولد نیست، حتی اگر M، متناهی مولد باشد. اما برای هر $i \geq 0$ و هر مدول متناهی مولد M روی حلقه موضعی نوتری دلخواه $(R, \mathfrak{m})$، R- مدول $\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(M)$ آرتینی است، لذا R- مدول $\mathrm{Hom}_R\left(R/\mathfrak{m}\,, \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i\,(M)\right)$ متناهی مولد است. این مشاهده منجر به حدسی از گروتندیک در [۱۵] شد. مطابق این حدس برای هر ایده‌آل I از حلقهٔ نوتری R و هر R- مدول متناهی مولد M، مدول $\mathrm{Hom}_R\left(R/I\,, \mathrm{H}_I^i\,(M)\right)$ متناهی مولد است. اما این حدس در حالت کلی صحیح نیست و اولین مثال نقض برای حدس گروتندیک توسط هارتشورن یافت شد. (برای جزئیات و اثبات، [۱۶] مشاهده شود). در واقع می‌دانیم برای هر حلقهٔ نوتری از بعد $d \geq 3$، ایده‌آل I از R و R- مدول متناهی مولد M وجود دارد به طوری که مدول $\mathrm{Hom}_R\left(R/I\,, \mathrm{H}_I^i\,(M)\right)$ متناهی مولد نیست ([۶، قضیهٔ ۹،۳] را ملاحظه نمایید). هارتشورن R- مدولی چون M را I- هم‌متناهی نامید هرگاه $\mathrm{Supp}(M) \subseteq V(I)$ و برای هر j، $\mathrm{Ext}_R^j(R/I\,, M)$ متناهی مولد باشد و پرسش زیر را مطرح کرد:

به ازای کدام حلقهٔ نوتری R و کدام ایده‌آل‌های I از R، R- مدول‌های $\mathrm{H}_I^i\,(M)$ به ازای هر i و هر R- مدول متناهی مولد M، I- هم‌متناهی هستند؟

در [۲۷] یاسمی این پرسش را مطرح کرد که آیا این مطلب برای کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته نیز برقرار است؟ هارتشورن در [۱۶] نشان داد برای حالتی که $\dim(M/IM) = 2$، جواب در حالت کلی منفی است. اما از منظر وجود جواب مثبت برای این سؤال، در حالت $\dim(M/IM) \leq 1$، مقاله‌های جالبی وجود دارد (به عنوان مثال، [۱۱]، [۱۶، نتیجه ۷،۷]، [۲۰، قضیهٔ ۱،۴]، [۱۲]، [۱۳، قضیهٔ ۱]، [۲۵، قضیهٔ ۱،۱] و [۷] را ملاحظه نمایید).

در [۸] بهمن‌پور و همکاران برای هر $n \epsilon \mathbb{N}_0$، نماد جدید n- امین بعد متناهی $f_I^n(M)$ را به صورت زیر تعریف کردند:

$$f_I^n(M) := \inf\{f_{IR_{\mathfrak{p}}}\left(M_{\mathfrak{p}}\right) \;:\; \mathfrak{p} \,\epsilon\, \mathrm{Supp}(M/IM) \text{ و } \dim(R/\mathfrak{p}) \geq n\},$$

که در آن برای هر ایده‌آل J از R و هر R- مدول متناهی مولد N، بعد متناهی بودن $f_J(N)$، N نسبت به ایده‌آل J به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_J(N) := \inf \{i \in \mathbb{N}_0 \ : \ \text{متناهی مولد نیست}\ \mathrm{H}_J^i(N)\}.$$

(توجه شود $f_I^0(M) = f_I(M)$.) همچنین آنها ثابت کردند اگر M یک R- مدول متناهی مولد باشد، آنگاه برای هر $i < f_I^2(M)$، $\mathrm{H}_I^i(M)$، I- هم‌متناهی است و در حالتی که R حلقه موضعی و کامل است، برای هر $i < f_I^3(M)$، R- مدول $\mathrm{H}_I^i(M)$، I- هم‌متناهی ضعیف[1] است. یادآوری می‌کنیم R-مدول M، I- هم‌متناهی ضعیف نامیده می‌شود هرگاه $\mathrm{Supp}(M) \subseteq V(I)$ و برای هر j، $\mathrm{Ext}_R^j(R/I, M)$ لاسکرین ضعیف[2] باشد. همچنین یادآوری می‌کنیم R- مدول M، لاسکرین ضعیف نامیده می‌شود هرگاه هر تصویر همریخت M دارای تعداد متناهی ایده‌آل اول وابسته باشد. در [۴] بهمن‌پور ثابت کرد روی حلقه نوتری، R- مدول M لاسکرین ضعیف است اگر و تنها اگر به ازای دست کم یک زیرمدول متناهی مولد N از M، $\mathrm{Supp}(M/N)$ متناهی باشد؛ به ویژه آن که $\dim(M/N) \leq 1$. علاوه بر این در [۳]، اسدالهی و نقی‌پور برای هر $n \in \mathbb{N}_0$، نماد R- مدول‌های با بعد $< n$ را معرفی کردند. بنا به تعریف آنها، R- مدول M در بعد $< n$ نامیده می‌شود اگر و تنها اگر زیرمدول متناهی مولد N از M موجود باشد بطوریکه $\dim(M/N) < n$. (توجه شود که بعد R- مدول صفر را برابر ۱- تعریف می‌کنیم. بنابراین هر R- مدول متناهی مولد از بعد < 0 است. به ویژه هر R- مدول T که $\mathrm{Supp}(T) \subseteq \mathrm{V}(I)$، I-هم‌متناهی است اگر و تنها اگر برای اعداد صحیح $j \geq 0$، R- مدول‌های $\mathrm{Ext}_R^j(R/I, M)$ از بعد < 0 باشند.) علاوه بر این، آنها نشان دادند اگر R حلقه موضعی و کامل باشد، آن‌گاه برای هر R- مدول متناهی مولد M، توصیف دیگری از $f_I^n(M)$ به صورت زیر وجود دارد:

$$f_I^n(M) := \inf \{0 \leq i \in \mathbb{Z} \ : \ \text{نیست}\ < \mathrm{n}\ \text{در بعد}\ \mathrm{H}_I^i(M)\}.$$

حال فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ حلقه موضعی و کامل باشد. طبق [۸، قضیهٔ ۲,۳]، برای تمام اعداد صحیح i که $0 \leq i < f_I^2(M)$، $\mathrm{H}_I^i(M)$، I- هم‌متناهی است. بنابراین برای تمام اعداد صحیح $0 \leq i < f_I^2(M)$ و هر $j \geq 0$، $\mathrm{Ext}_R^j\left(R/I, \mathrm{H}_I^i(M)\right)$ متناهی مولد است و لذا از بعد < 0 هستند. در [۱۸] هونگ این نتایج را برای مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته، به صورت زیر تعمیم داده است:

$$f_I^n(M,N) := \inf \left\{0 \leq i \in \mathbb{Z} \ : \ \text{نیست}\ < \mathrm{n}\ \text{در بعد}\ \mathrm{H}_I^i(M,N)\right\},$$

که در آن N، یک R- مدول متناهی مولد است و اگر $I_M = \mathrm{Ann}_R(M/IM)$، آن‌گاه $f_I^n(M,N)$ به صورت زیر نیز قابل توصیف است:

$$f_I^n(M,N) := \inf \left\{f_{IR_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, N_\mathfrak{p}) \ : \ \mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(N/I_M N)\ \text{و}\ \dim(R/\mathfrak{p}) \geq n\right\},$$

[1] Weakly cofinite
[2] Weakly Laskerian

که در آن برای هر ایده‌آل J از R و R- مدول‌های متناهی مولد M و N، بعد متناهی بودن $f_J(M,N)$، M و N نسبت به ایده‌آل J به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_J(M,N) := \inf\{i \in \mathbb{N}_0 \ : \ \text{متناهی مولد نیست } \mathrm{H}_J^i(M,N)\}.$$

(توجه شود که $f_I^0(M,N) = f_I(M,N)$.)

همچنین در [۱]، اباذری و نویسندهٔ مقاله فعلی نشان دادند اگر $(R,\mathfrak{m})$ حلقهٔ موضعی و کامل باشد، آن‌گاه برای هر $i < f_I^n(M)$ و هر $j \geq 0$، R- مدول‌های $\mathrm{Ext}_R^j\left(R/I, \mathrm{H}_I^i(M)\right)$ در بعد $n-2 >$ هستند.

حال طبیعی است که بپرسیم:

پرسش ۱٫۱. اگر $(R,\mathfrak{m})$ حلقه موضعی وکامل باشد، آن‌گاه برای هر $i < f_I^n(M,N)$ و هر $j \geq 0$، آیا R- مدول‌های $\mathrm{Ext}_R^j\left(R/I, \mathrm{H}_I^i(M,N)\right)$ در بعد $n-2 >$ هستند؟

هدف اصلی این مقاله ارائهٔ پاسخ مثبت برای این پرسش در حالت کلی است. علاوه بر این کاربردهایی از این نتیجه در ارتباط با متناهی بودن مجموعه‌های خاص از ایده‌آل‌های اول وابسته مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته ارائه می‌دهیم. در این مقاله برای هر R- مدول L، $\mathrm{Ass}_R(L)$ مجموعه ایده‌آل‌های اول وابستهٔ L را نشان می‌دهد. همچنین برای هر ایده‌آل $\mathfrak{a}$ از R، $\{\mathfrak{p} \in Spec\, R : \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\}$ را با $V(\mathfrak{a})$ نشان می‌دهیم. برای آشنایی بیشتر با مفاهیم و اصطلاحاتی که در این مقاله استفاده شده است، خواننده می‌تواند به مراجع [۱۰] و [۲۴] مراجعه کند.

۲. نتایج اصلی

قبل از بیان نتایج، فرض کنید R حلقه‌ای نوتری، I ایده‌آلی از R و $n \in \mathbb{N}_0$ باشد. در این مقاله نماد $\mathcal{C}_{<n}(R)$ رستهٔ[1] همه R- مدول‌های با بعد $n >$ را نشان می‌دهد و نماد $\mathcal{C}_{<n}(I,R)$ رستهٔ همه R- مدول‌های T را نشان می‌دهد که برای هر $j \geq 0$، $\mathrm{Ext}_R^j(R/I, T)$ متعلق به $\mathcal{C}_{<n}(R)$ است. یادآوری می‌کنیم یک زیررسته مانند $\mathcal{S}$ از رستهٔ R- مدول‌ها و R - همریختی‌ها، زیررستهٔ سِر[2] نامیده می‌شود، هرگاه در هر رشتهٔ دقیق کوتاه از R- مدول‌ها و R- همریختی‌ها R- مدول وسطی متعلق به $\mathcal{S}$ باشد اگر و تنها اگر دو R- مدول کناری متعلق به $\mathcal{S}$ باشند. سه لم زیر که تعمیم‌های مناسبی از نتایج معروف پیرامون زیررسته‌های سِر از رستهٔ R- مدول‌ها هستند، در این مقاله مورد نیاز است.

لم ۱٫۲. فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و $n \in \mathbb{N}_0$ باشد. در این صورت $\mathcal{C}_{<n}(R)$ نسبت به زیرمدول، خارج قسمت و توسیع بسته است، یعنی یک زیررستهٔ سر از رستهٔ R-مدول‌ها است. به ویژه برای هر ایده‌آل I از R، $\mathcal{C}_{<n}(R)$ یک زیررسته از $\mathcal{C}_{<n}(I,R)$ است.

برهان. [۱، لم ۱٫۲] را ملاحظه کنید. ■

[1] Category
[2] Serre subcategory

لم ۲٫۲. فرض کنید R حلقه‌ای نوتری، I ایده‌آلی از R و $\mathcal{S}$ یک زیررستهٔ سر از رستهٔ R- مدول‌ها باشد. در این صورت برای هر R- مدول T و هر عدد صحیح $t \in \mathbb{N}_0$، شرایط زیر با هم معادلند:

الف) برای هر عدد صحیح $0 \leq i \leq t$، $\mathrm{Ext}_R^i(R/I\,, T) \in \mathcal{S}$.

ب) برای هر R- مدول متناهی مولد N با ویژگی $\mathrm{Supp}\,(N) \subseteq V(I)$ و هر عدد صحیح $0 \leq i \leq t$، $\mathrm{Ext}_R^i(N, T) \in \mathcal{S}$.

برهان. برای اثبات حکم از برهان [۲۲، لم ۱] استفاده کنید. ■

قضیهٔ ۳٫۲. فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه‌ی نوتری R و M یک R – مدول متناهی مولد باشد. فرض کنیم N یک R-مدول دلخواه، $\mathcal{S}$ یک زیررستهٔ سر و t یک عدد صحیح نامنفی باشد به طوری که:

الف) برای هر $i \leq t$، $\mathrm{Ext}_R^{t-i}\big(\mathrm{Tor}_i^R(R/I, M), N\big) \in \mathcal{S}$ و

ب) برای هر $i < t$، $\mathrm{Ext}_R^{t+1-i}(R/I\,, \mathrm{H}_I^i(M, N)) \in \mathcal{S}$.

در این صورت $\mathrm{Hom}_R\big(R/I\,, \mathrm{H}_I^t(M, N)\big) \in \mathcal{S}$.

برهان. [۲۶، نتیجه ۱۱٫۲] را ملاحظه نمایید. ■

قضیهٔ ۴٫۲. فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه‌ی نوتری R و M یک R- مدول متناهی مولد باشد. فرض کنید N یک R- مدول دلخواه، $\mathcal{S}$ یک زیررستهٔ سر و t یک عدد صحیح نامنفی باشد به طوری که:

الف) برای هر $i \leq t+1$، $\mathrm{Ext}_R^{t+1-i}\big(\mathrm{Tor}_i^R(R/I, M), N\big) \in \mathcal{S}$ و

ب) برای هر $i < t$، $\mathrm{Ext}_R^{t+2-i}(R/I\,, \mathrm{H}_I^i(M, N)) \in \mathcal{S}$.

در این صورت $\mathrm{Ext}_R^1\big(R/I, \mathrm{H}_I^t\,(M, N)\big) \in \mathcal{S}$.

برهان. [۲۶، نتیجهٔ ۱۳٫۲] را ملاحظه نمایید. ■

لم مهم زیر نقشی کلیدی در اثبات نتیجهٔ اصلی ما ایفا می‌کند.

لم ۵٫۲. فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و I ایده‌آلی از R باشد. فرض کنید M و N، R- مدول‌هائی متناهی مولد باشند به طوری که برای هر $i < t$ و برای هر $\mathfrak{p} \in \bigcup_{i<t} \mathrm{Supp}\mathrm{H}_I^i(M, N)$ با ویژگی $\dim R/\mathfrak{p} > 1$، $(\mathrm{H}_I^i(M, N))_{\mathfrak{p}}$ یک $R_{\mathfrak{p}}$-مدول متناهی مولد است که در آن t یک عدد صحیح نامنفی است. در این صورت $\mathrm{Hom}_R\big(R/I\,, \mathrm{H}_I^t(M, N)\big)$ یک R- مدول متناهی مولد است و برای هر $i < t$، $\mathrm{H}_I^i(M, N)$ یک R- مدول I- هم‌متناهی است.

برهان. [۱۹، قضیهٔ ۷٫۲] را ملاحظه نمایید. ■

قضیهٔ زیر برای اثبات نتیجهٔ اصلی این مقاله ضروری است.

قضیهٔ ۶٫۲. فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی و نوتری کامل، I ایده‌آلی از R، و $t \geq 0$ و $n \geq 2$ اعدادی صحیح باشند. فرض کنید M و N، R- مدول‌هائی متناهی مولد باشند به طوری که برای هر $0 \leq i \leq t$، $\mathrm{H}_I^i(M,N) \in \mathcal{C}_{<n}(R)$. در این صورت شرایط زیر برقرارند:

الف) برای هر $0 \leq i \leq t$، $\mathrm{H}_I^i(M,N) \in \mathcal{C}_{<n-2}(I,R)$.

ب) R- مدول‌های $\mathrm{Hom}_R\left(R/I\,,\mathrm{H}_I^{t+1}(M,N)\right)$ و $\mathrm{Ext}_R^1\left(R/I,\mathrm{H}_\mathrm{I}^{t+1}(M,N)\right)$ متعلق به $\mathcal{C}_{<n-2}(R)$ هستند.

برهان. الف) اگر $n=2$ باشد، آن‌گاه حکم از [۲، قضیهٔ۴٫۳] نتیجه می‌شود. اما برای $n \geq 3$، طبق فرض برای هر $0 \leq i \leq t$، $\mathrm{H}_I^i(M,N) \in \mathcal{C}_{<n}(R)$، بنابراین از لم ۱٫۲ نتیجه می‌شود: $\mathrm{H}_I^i(M,N) \in \mathcal{C}_{<n}(I,R)$. در نتیجه طبق تعریف برای هر عدد صحیح $0 \leq i \leq t$ و هر $j \in \mathbb{N}_0$، زیرمدول متناهی مولدی چون $N_{i,j} \subseteq \mathrm{Ext}_R^j\left(R/I,\mathrm{H}_\mathrm{I}^i\,(M,N)\right)$ وجود دارد بطوریکه $\dim\left(\mathrm{Ext}_R^j\left(R/I,\mathrm{H}_\mathrm{I}^i\,(M,N)\right)/\,N_{i,j}\right) < n$. ابتدا نشان می‌دهیم برای هر $0 \leq i \leq t$، $\mathrm{H}_\mathrm{I}^i\,(M,N) \epsilon \mathcal{C}_{<n-1}(I,R)$. از تعریف

$$\mathrm{H}_I^i(M,N) = \varinjlim_{n\geq 1} \mathrm{Ext}_R^i(M/I^nM\,,N),$$

نتیجه می‌شود:

$$\mathrm{Ext}_R^j\left(R/I,\mathrm{H}_I^i(M,N)\right) = \varinjlim_{n\geq 1} \mathrm{Ext}_R^j\left(R/I,\mathrm{Ext}_R^i(M/I^nM\,,N)\right),$$

بنابراین R- مدول $\mathrm{Ext}_R^j\left(R/I,\mathrm{H}_I^i(M,N)\right)$ مجموعهٔ مولد شمارا دارد. به ویژه زنجیر

$$L_1 \subseteq L_2 \subseteq \cdots$$

از زیرمدول‌های متناهی مولد R- مدول $\mathrm{Ext}_R^j\left(R/I,\mathrm{H}_I^i(M,N)\right)$ وجود دارد به طوری که

$$\mathrm{Ext}_R^j\left(R/I,\mathrm{H}_I^i(M,N)\right) = \cup_{n=1}^{\infty} L_n.$$

بنابراین برای هر $0 \leq i \leq t$ و هر $j \in \mathbb{N}_0$، داریم:

$$\mathrm{Ext}_R^j\left(R/I,\mathrm{H}_\mathrm{I}^i\,(M,N)\right)/N_{i,j} = \cup_{n=1}^{\infty}(L_n + N_{i,j})/N_{i,j}.$$

بنابراین مجموعهٔ

$$\mathrm{Ass}_R\,\mathrm{Ext}_R^j\left(R/I,\mathrm{H}_\mathrm{I}^i\,(M,N)\right)/N_{i,j} = \cup_{n=1}^{\infty}\mathrm{Ass}_R(L_n + N_{i,j})/N_{i,j}$$

شمارا است. در نتیجه مجموعهٔ

$$\mathcal{A} := \cup_{i=0}^{t} \cup_{j\geq 0} \operatorname{Ext}_R^j \left(R/I, \mathrm{H}_{\mathrm{I}}^i (M,N)\right)/N_{i,j}$$

شمارا است. حال فرض کنیم

$$B := \left\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} \left(\oplus_{i=1}^{t} \oplus_{j=0}^{\infty} \operatorname{Ext}_R^j \left(R/I, \mathrm{H}_{\mathrm{I}}^i (M,N)\right)/N_{i,j}\right) :\ \dim(R/\mathfrak{p}) = n-1\right\}.$$

در این صورت واضح است که $B \subseteq \operatorname{Supp}(\oplus_{i=1}^{t} \mathrm{H}_I^i(M,N))$. علاوه بر این به آسانی ثابت می‌شود، هر عضو از مجموعهٔ

$$B_{i,j} := B \cap \operatorname{Supp}(\operatorname{Ext}_R^j \left(R/I, \mathrm{H}_I^i (M,N)\right)/N_{i,j}\ )$$

یک عضو مینیمال از مجموعهٔ $\operatorname{Supp}(\operatorname{Ext}_R^j \left(R/I, \mathrm{H}_I^i (M,N)\right)/N_{i,j}\ )$ است بنابراین ایده‌آل اول وابستهٔ

$$\operatorname{Ext}_R^j \left(R/I, \mathrm{H}_I^i (M,N)\right)/N_{i,j},$$

است. در نتیجه برای هر $0 \leq i \leq t$ و هر $j\epsilon\mathbb{N}_0$،

$$B_{i,j} \subseteq \operatorname{Ass}_R(\operatorname{Ext}_R^j \left(R/I, \mathrm{H}_I^i (M,N)\right)/N_{i,j}).$$

ادعا می‌کنیم برای هر $0 \leq i \leq t$ و هر $j\epsilon\mathbb{N}_0$، $B_{i,j}$ یک مجموعه متناهی است. زیرا اگر $B_{i,j}$ نامتناهی باشد، آنگاه زیرمجموعه‌ی نامتناهی شمارا $\{\mathfrak{q}_k\}_{k=1}^{\infty}$ از $B_{i,j}$ وجود دارد. فرض کنیم S زیرمجموعه بسته ضربی $R \setminus \cup_{k=1}^{\infty}\mathfrak{q}_k$ باشد. در این صورت به آسانی از [۲۳، لم ۲,۳] و لم ۵,۲ نتیجه می‌شود، $S^{-1}(\operatorname{Ext}_R^j \left(R/I, \mathrm{H}_I^i (M,N)\right)/N_{i,j})$ یک $S^{-1}R$- مدول متناهی مولد است. لذا $\operatorname{Ass}_{S^{-1}R} S^{-1}(\operatorname{Ext}_R^j \left(R/I, \mathrm{H}_I^i (M,N)\right)/N_{i,j})$ یک مجموعه‌ی متناهی است. اما برای هر $k = 1, 2, \ldots$، $S^{-1}q_k \in \operatorname{Ass}_{S^{-1}R} S^{-1}(\operatorname{Ext}_R^j \left(R/I, \mathrm{H}_I^i (M,N)\right)/N_{i,j})$ که به وضوح یک تناقض است.

حال اگر عدد صحیح i موجود باشد به طوری که $0 \leq i \leq t$ و $\mathrm{H}_I^i (M,N) \notin \mathcal{C}_{<n-1}(I,R)$، آن‌گاه عدد صحیح $j\epsilon\mathbb{N}_0$ موجود است بطوریکه $\operatorname{Ext}_R^j \left(R/I, \mathrm{H}_I^i (M,N)\right)/N_{i,j} \notin \mathcal{C}_{<n-1}(I,R)$.

فرض کنیم $B_{i,j} = \{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k\}$ و S نشانگر مجموعهٔ بسته ضربی $R \setminus \cup_{n=1}^{k}\mathfrak{q}_n$ باشد. در این صورت مشابه استدلال به کار رفته در بالا نتیجه می‌شود $S^{-1}(\operatorname{Ext}_R^j \left(R/I, \mathrm{H}_I^i (M,N)\right)/N_{i,j})$ یک $S^{-1}R$- مدول متناهی مولد از بعد صفر است. در نتیجه زیرمدول متناهی مولدی چون $U_{i,j}\ /\ N_{i,j}$ از R- مدول

$$\operatorname{Ext}_R^j \left(R/I, \mathrm{H}_I^i (M,N)\right)/N_{i,j}$$

موجود است به طوری که

$$S^{-1}\left(\operatorname{Ext}_R^j \left(R/I, \mathrm{H}_I^i (M,N)\right)/N_{i,j}\right) = S^{-1}(U_{i,j}\ /\ N_{i,j}).$$

اما در این حالت به آسانی دیده می‌شود $U_{i,j}\ /\ N_{i,j}$ یک زیرمدول متناهی مولد از

$$\mathrm{Ext}_R^j\left(R/I, \mathrm{H}_I^i(M,N)\right)/N_{i,j}$$

است به طوری که

$$\mathrm{Supp}\left(\mathrm{Ext}_R^j\left(R/I, \mathrm{H}_I^i(M,N)\right)/U_{i,j}\right) \cap B = \emptyset$$

بنابراین $\mathrm{Ext}_R^j\left(R/I, \mathrm{H}_I^i(M,N)\right)/N_{i,j} \in \mathcal{C}_{<n-1}(R)$ که یک تناقض است.

حال برای هر $0 \leq i \leq t$، به منظور اثبات $\mathrm{H}_I^i(M,N) \in \mathcal{C}_{<n-2}(I,R)$ بنا به تعریف کافی است نشان دهیم زیرمدول متناهی مولد $U_{i,j} \subseteq \mathrm{Ext}_R^j\left(R/I, \mathrm{H}_I^i(M,N)\right)$ موجود است به طوری که

$$\dim\left(\mathrm{Ext}_R^j\left(R/I, \mathrm{H}_\mathrm{I}^i(M,N)\right) / U_{i,j}\right) < n-2.$$

برای کامل کردن برهان کافی است اثبات فوق را برای هر $0 \leq i \leq t$ و هر $j\epsilon\mathbb{N}_0$، تکرار کنیم. (توجه شود که فقط برای این حالت می‌توانیم دوباره از لم ۵٫۲ استفاده کنیم).

ب) حکم مستقیماً از قسمت الف و با استفاده از لم ۱٫۲ و قضایای ۳٫۲ و ۴٫۲ نتیجه می‌شود. ■

قضیهٔ زیر، اولین نتیجهٔ اصلی این مقاله است.

قضیهٔ ۷٫۲. فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی نوتری و کامل، I ایده‌آلی از R، و $t \geq 0$ و $n \geq 2$ اعدادی صحیح باشند. فرض کنیم M و N، R- مدول‌هائی متناهی مولد هستند به طوری که برای هر عدد صحیح $0 \leq i \leq t$، $\mathrm{H}_\mathfrak{a}^i(M,N) \in \mathcal{C}_{<n}(R)$. در این صورت برای هر R- مدول متناهی مولد X با ویژگی $\mathrm{Supp}(X) \subseteq V(I)$، هر عضو از مجموعهٔ

$$\mathfrak{J} = \{\mathrm{Ext}_R^j\left(X, \mathrm{H}_I^i(M,N)\right) \,:\, j \geq 0 \text{ و } 0 \leq i \leq t\}$$

$$\cup \{\mathrm{Hom}_R\left(X, \mathrm{H}_I^{t+1}(M,N)\right), \qquad \mathrm{Ext}_R^1\left(X, \mathrm{H}_I^{t+1}(M,N)\right)\}$$

متعلق به $\mathcal{C}_{<n-2}(R)$ است.

برهان. حکم از قضیهٔ ۶٫۲ با استفاده از لم ۲٫۲ نتیجه می‌شود. ■

موارد زیر، نتایج مستقیمی از قضیهٔ ۷٫۲ هستند.

نتیجهٔ ۸٫۲. فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی نوتری و کامل، I ایده‌آلی از R و $n \geq 2$ یک عدد صحیح باشد. فرض کنید M و N، R- مدول‌های متناهی مولدند به طوری که $\dim(N/IN) = n$. در این صورت برای هر R- مدول متناهی مولد X با ویژگی $\mathrm{Supp}(X) \subseteq V(I)$، هر عضو از مجموعهٔ

$$\mathfrak{J} = \{\mathrm{Ext}_R^j\left(X, \mathrm{H}_I^i(M,N)\right) \,:\, j \geq 0 \text{ و } i \geq 0\}$$

متعلق به $\mathcal{C}_{<n-1}(R)$ است.

برهان. اگر $\dim(N/IN) = n$، آن‌گاه برای هر عدد صحیح $i \geq 0$، $\mathrm{H}_I^i(M,N) \in \mathcal{C}_{<n+1}(R)$. بنابراین حکم از قضیهٔ ۷،۲ نتیجه می‌شود. ■

نتیجهٔ ۹،۲. فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی نوتری و کامل، و I ایده‌آلی از R باشد. فرض کنید M و N، R-مدول‌هایی متناهی مولدند و $n \geq 2$ یک عدد صحیح است. در این صورت برای هر $i < f_I^n(M,N)$ و هر $j \geq 0$، داریم: $\mathrm{H}_I^i(M,N) \in \mathcal{C}_{<n-2}(I,R)$.

برهان. حکم از [۱۸، قضیهٔ ۴،۲] و قضیهٔ ۷،۲ نتیجه می‌شود. ■

برای اثبات آخرین نتیجه، لم زیر مود نیاز است.

نتیجهٔ ۱۰،۲. فرض کنید R حلقه‌ای نوتری، $n \in \mathbb{N}_0$ و $M \epsilon \mathcal{C}_{<n}(R)$. در این صورت مجموعهٔ

$$\mathrm{Ass}_R(M)_{\geq n} := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M) : \dim(R/\mathfrak{p}) \geq n\}$$

متناهی است.

برهان. [۱، لم ۹،۲] را ملاحظه نمایید. ■

نتیجهٔ زیر تعمیم [۳، قضیهٔ ۸،۲] و [۱، قضیهٔ ۱۰،۲] است.

قضیهٔ ۱۱،۲. فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی نوتری و کامل، I ایده‌آلی از R، و $t \geq 0$ و $n \geq 2$ اعدادی صحیح باشند. فرض کنید M و N، R- مدول‌های متناهی مولد باشند به طوری که برای هر $0 \leq i \leq t$، $\mathrm{H}_I^i(M,N) \in \mathcal{C}_{<n}(R)$. در این صورت برای هر R- مدول متناهی مولد X با ویژگی $\mathrm{Supp}(X) \subseteq V(I)$، شرایط زیر برقرارند.

الف) برای هر عضو L از مجموعهٔ

$$\mathfrak{J} = \{\mathrm{Ext}_R^j\left(X, \mathrm{H}_I^i(M,N)\right) : j \geq 0 \text{ و } 0 \leq i \leq t\}$$
$$\cup \{\mathrm{Hom}_R\left(X, \mathrm{H}_I^{t+1}(M,N)\right), \mathrm{Ext}_R^1\left(X, \mathrm{H}_I^{t+1}(M,N)\right)\}$$

مجموعهٔ

$$\mathrm{Ass}_R(L)_{\geq n-2} := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(L) : \dim(R/\mathfrak{p}) \geq n-2\}$$

متناهی است.

ب) برای هر $0 \le i \le t+1$، مجموعهٔ

$$\mathrm{Ass}_R(\mathrm{H}_I^i\,(M,N))_{\ge n-2} = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R\left(\mathrm{H}_I^i\,(M,N)\right)\ :\ \dim(R/\mathfrak{p}) \ge n-2\}$$

متناهی است.

ج) مجموعهٔ

$$\mathrm{Ass}_R(\oplus_{i=0}^{f_I^n(M,N)}\mathrm{H}_I^i\,(M,N))_{\ge n-2} = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(\oplus_{i=0}^{f_I^n(M,N)}\mathrm{H}_I^i\,(M,N))\ :\ \dim(R/\mathfrak{p}) \ge n-2\}$$

متناهی است.

برهان. الف) از قضیهٔ ۷,۲ و لم ۱۰,۲ نتیجه می‌شود.

ب) از قسمت الف و از اینکه $\mathrm{Ass}_R\left(\mathrm{H}_I^i\,(M,N)\right) = \mathrm{Ass}_R(\mathrm{Hom}_R\left(R/I\,,\mathrm{H}_I^i(M,N)\right))$ نتیجه می‌شود.

ج) از قسمت ب و از ۹,۲ نتیجه می‌شود. ■

نتیجه ۱۲,۲. فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی نوتری و کامل، I ایده‌آلی از R و $n \ge 2$ یک عدد صحیح باشد. فرض کنید M و N، R- مدول‌هایی متناهی مولد باشند به طوری که $\dim(N/IN) = n$. در این صورت برای هر R- مدول متناهی مولد X با ویژگی $\mathrm{Supp}(X) \subseteq V(I)$ و هر عضو L از مجموعهٔ

$$\mathfrak{J} = \{\mathrm{Ext}_R^j\left(X, \mathrm{H}_I^i\,(M,N)\right)\ :\ j \ge 0 \text{ و } i \ge 0\}$$

مجموعهٔ

$$\mathrm{Ass}_R(L)_{\ge n-1} := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(L)\ :\ \dim(R/\mathfrak{p}) \ge n-1\}$$

متناهی است.

برهان. حکم از ۸,۲ و ۱۰,۲ نتیجه می‌شود. ■

تشکر و قدردانی

از داوران محترم که نظرات ارزشمندشان موجب بهبود مقاله گردید، نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

References

1. Abazari N., Bahmanpour K., “Extension functors of local cohomology modules and Serre category of modules”, Taiwan. J. Math., 19 (2015), 211-220.
2. Aghapournahr M., Behrouzian M., “Cofiniteness properties of generalized local cohomology modules”, To appear in Bull. Belgian Math. Soc.
3. Asadollahi D., Naghipour R., “Faltings’ local-global principle for the finiteness of local cohomology modules”, Commun. Algebra, 43 (2015), 953-958.
4. Bahmanpour K., “On the category of weakly laskerian cofinite modules”, Math. Scand., 115 (2014), 62-68.
5. Bahmanpour K., Naghipour R., “On the cofiniteness of local cohomlogy modules”, Proc. Amer. Math. Soc., 136 (2008), 2359-2363.
6. Bahmanpour K., Naghipour R., “Associated primes of local cohomology modules and Matlis duality”, J. Algebra, 320 (2008), 2632-2641.
7. Bahmanpour K., Naghipour R., “Cofiniteness of local cohomology modules for ideals of small dimension”, J. Algebra, 321 (2009), 1997-2011.
8. Bahmanpour K., Naghipour R., Sedghi M., “Minimaxness and cofiniteness properties of local cohomology modules”, Commun. Algebra, 41 (2013), 2799-2814.
9. Brodmann M. P., Lashgari F. A., “A finiteness result for associated primes of local cohomology modules”, Proc. Amer. Math. Soc., 128 (2000), 2851-2853.
10. Brodmann M. P., Sharp R. Y., “Local Cohomology: An Algebraic Introduction with Geometric Applications”, Cambridge University Press, Cambridge (1998).
11. Chiriacescu G., “Cofiniteness of local cohomology modules over regular local rings”, Bull. London Math. Soc., 32 (2000), 1-7.
12. Delfino D., “On the cofiniteness of local cohomology moduls”, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 115 (1994), 79-84.
13. Delfino D., Marley T., “Cofinite modules and local cohomology”, J. Pure and Appl. Algebra, 121 (1997), 45-52.
14. Grothendieck A., “Notes by R. Hartshorne, Lecture Notes in Math”, 862 (Springer, New York, 1966).
15. Grothendieck A., “Cohomologie Locale des Faisceaux Coherents et Theoremes de Lefschetz Locaux et Globaux (SGA 2)”, North-Holland Pub. Co., Amsterdam (1968).

16. Hartshorne R., “Affine duality and cofiniteness”, Invent. Math., 9 (1970), 145-164.

17. Herzog J., “Komplexe, Auflosungen und Dualitat in der Lokalen Algebra”, Habilitationsschrift, Universitat Regensburg, Regensburg (1970).

18. Hoang N. V., “On Faltings’ local-global principle of generalized local cohomology modules”, Kodai Math. J., 40 (2017), 58-62.

19. Hoang N. V., Ngoan N. T., “On the cofiniteness of small-level generalized local cohomology modules”, Bull. Iranian Math. Soc., 46 (2020), 725-736.

20. Huneke C., Koh J., “Cofiniteness and vanishing of local cohomology modules”, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 110 (1991), 421-429.

21. Hung Quy, P., “On the finiteness of associated primes of local cohomology modules”, Proc. Amer. Math. Soc., in press.

22. Kawasaki K. I., “On the finiteness of Bass numbers of local cohomology modules”, Proc. Amer. Math. Soc., 124 (1996), 3275-3279.

23. Marley T., Vassilev J. C., “Cofiniteness and associated primes of local cohomology modules”, J. Algebra, 256 (2002), 180-193.

24. Matsumura H., “Commutative ring theory”, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1986.

25. Yoshida K. I., “Cofiniteness of local cohomology modules for ideals of dimension one”, Nagoya Math. J., 147 (1997), 179-191.

26. Vahidi A., Hassani F., Hoseinzade E., “Extension functors of generalized local cohomology modules”, arXiv:1810.10217v1 [math.AC] 24 Oct 2018.

27. Yassemi S., “Cofinite modules”, Commun. Algebra, 6 (2001), 2333-2340.