Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

A relation between infinite subsets and exterior center in groups

Asadollah Faramarzi Salles[1]

1. School of Mathematics and Computer Sciences, Damghan University, Damghan, Iran.

E-mail: faramarzi@du.ac.ir

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received:
8 March 2020
Revised form:
10 October 2020
Accepted:
23 November 2020
Published online:
14 May 2022

Keywords:

Problem of Paul Erdös,
Infinite groups;
$FC^{\wedge}-$ group;
Central- by- finite;
Exterior abelian;
Exterior center of group.

ABSTRACT

Introduction

Let G be a group. For $x, y \in G$, we denote $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$ and ${}^{y}x = yxy^{-1}$. Also let $G \otimes G$ be the group generated by the symbols $x \otimes y$ with the following properties

$$x \otimes yz = (x \otimes y)^{y}(x \otimes z) = (x \otimes y)({}^{y}x \otimes {}^{y}z),$$

$$(xz \otimes y) = {}^{x}(z \otimes y)(x \otimes y) = ({}^{x}z \otimes {}^{x}y)(x \otimes y),$$

where, x, y, and z are elements of G. Now let $\nabla(G)$ denotes the subgroup of $G \otimes G$ which is generated by $\{(g \otimes g) | g \in G\}$, and $G \wedge G$, exterior square, represents the quotient group $G \otimes G / \nabla(G) = \langle x \otimes y \nabla(G) | \, x, y \in G \rangle$, if we denote $x \otimes y \nabla(G)$ by $x \wedge y$ then $G \wedge G = \langle x \wedge y | x, y \in G \rangle$. As usual, $C_G^{\wedge}(x) = \{g \in G | x \wedge g = 1_{\wedge}\}$ is the exterior centralizer of x in G and $Z^{\wedge}(G) = \{g \in G | \, x \wedge g = 1_{\wedge}, \forall\, x \in G\}$ is the exterior center of G. As $FC(G)$ consists of all elements of G that their centralizers have finite index in G, $FC^{\wedge}(G)$ is the set of all elements of G that the index of their exterior centralizers in G are finite. $FC^{\wedge}(G)$ is a normal subgroup of G. The group G is an FC-group (similarly, $FC^{\wedge}$-group) whether $G = FC(G)$ (similarly, $FC^{\wedge}(G) = G$).

In 1972 Paul Erdös posed a question: If every infinite subset of group G has two different elements which mutually commute, is there then a finite bound on the cardinality of each such set of elements? B.H. Neumann proved in [8] that the class of these groups are coincides with the class of center-by-finite groups. Since that, problems with similar object have been studied by many

people (see [1-8]). What is remarkable in all of them is that the answers are under conditions like finitely generated, for example Lennox and Wiegold [6] for finitely generated soluble group G proved that every infinite subset of G has two different elements which generate a nilpotent subgroup if and only if G is finite-by-nilpotent. In this paper we will answer the question of Erd$\ddot{o}$s with this aspect that every infinite subset of G has two different elements x and y such that $x \wedge y = 1_{\wedge}$.

Material and methods

The outline of our argument follows Neumann's paper. First we introduce $PE^{\wedge}$-group and $FIZ^{\wedge}$-group and then we prove that the class of $FC^{\wedge}$-groups includes the both classes $PE^{\wedge}$-groups and $FIZ^{\wedge}$-groups.

Results and discussion

Group G is called $PE^{\wedge}$-group if every infinite subset X of G has tow elements x and y such that $x \wedge y = 1_{\wedge}$. Also if the exterior center of a group has finite index then it is called $FIZ^{\wedge}$-group. We prove that every $FIZ^{\wedge}$-group is an $FC^{\wedge}$-group, and every $PE^{\wedge}$-group is an $FC^{\wedge}$-group, and if G is an $FC^{\wedge}$-group which is not $FIZ^{\wedge}$-group then it is not $PE^{\wedge}$-group.

Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

The answer of the question of Erd$\ddot{o}$s is positive with this aspect that every infinite subset of G has two different elements x and y such that $x \wedge y = 1_{\wedge}$, that is: G is a $PE^{\wedge}$-group if and only if G is an $FIZ^{\wedge}$-group.

How to cite: Faramarzi Salles, A.; (2022). A relation between infinite subsets and exterior center in groups. *Mathematical Researches*, 8 (1), 215-223

 Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

ارتباطی بین زیرمجموعه‌های نامتناهی و مرکز خارجی در گروه‌ها

اسداله فرامرزی ثالث[۱]

۱. نویسندهٔ مسئول، دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه دامغان، دامغان، ایران. پست الکترونیکی: faramarzi@du.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۲/۱۸
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۷/۱۹
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۹/۰۳
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۲۴

واژه‌های کلیدی:
مسأله پل اردوش،
گروه‌های نامتناهی،
$FC^{\wedge}$−گروه،
مرکز-بواسطه- متناهی،
آبلی خارجی،
مرکز خارجی گروه.

چکیده

فرض کنید G یک گروه باشد. نویمن در پاسخ به سوالی که پل اردوش مطرح کرده بود نشان داد که هر زیرمجموعه نامتناهی از G دارای دو عضو متمایز هست که با هم جابه‌جا می‌شوند اگر و فقط اگر گروه G، مرکز− به واسطه− متناهی باشد. در این مقاله، ما نیز سوال اردوش را از جهتی دیگر مورد مطالعه قرار داده و نشان می‌دهیم که هر زیرمجموعه نامتناهی X از گروه G دارای دو عضو x و y است که $x \wedge y = 1$ اگر و فقط اگر شاخص $Z^{\wedge}(G)$ در G متناهی باشد.

استناد: فرامرزی ثالث، اسداله؛ (۱۴۰۱). ارتباطی بین زیرمجموعه‌های نامتناهی و مرکز خارجی در گروه‌ها. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۱)، ۲۲۳-۲۱۵.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

فرض کنید G یک گروه باشد. برای اعضای x و y از G قرار دهید $^{y}x = yxy^{-1}$ و $[x,y] = \mathrm{xyx^{-1}y^{-1}}$. حال $G\otimes G$ را گروهی تولید شده توسط نمادهای $x\otimes y$ با روابط زیر در نظر بگیرید

$$x\otimes yz = (x\otimes y)^{y}(x\otimes z) = (x\otimes y)(^{y}x\otimes ^{y}z),$$

$$(xz\otimes y) = ^{x}(z\otimes y)(x\otimes y) = (^{x}z\otimes ^{x}y)(x\otimes y)$$

که x، y و z اعضای G هستند. زیرگروه تولید شده توسط $\{(g\otimes g)|g\in G\}$ را با نماد $\nabla(G)$ نشان داده و مربع خارجی $G\wedge G$ را گروه خارج قسمتی

$$\mathrm{G}\otimes\mathrm{G}/\nabla(G) = \langle x\otimes y\nabla(G)|\ x,y\in G\rangle$$

تعریف می‌کنیم، که با نشان دادن $x\otimes y\nabla(G)$ با $x\wedge y$ خواهیم داشت $G\wedge G = \langle x\wedge y|x,y\in G\rangle$.

برای عضو x از گروه G، مجموعۀ $C_G(x) = \{g\in G|[x,g]=1\}$ را مرکزساز x در G، و به طور مشابه مجموعۀ $C_G^{\wedge}(x) = \{g\in G|x\wedge g = 1_{\wedge}\}$ را مرکزساز خارجی x در G می‌نامیم. همچنین مرکز خارجی گروه G را به صورت $Z^{\wedge}(G) = \{g\in G|\ x\wedge g = 1_{\wedge}, \forall\ x\in G\}$ تعریف می‌کنیم. $FC(G)$ نشان دهنده تمام عناصری از G است که شاخص مرکزساز آنها در G متناهی است (یا به طور معادل تعداد مزدوج‌های آنها متناهی است) که زیرگروه مشخصه‌ای از G است، به طور مشابه $FC^{\wedge}(G)$ را مجموعه تمام عناصری از G تعریف می‌کنیم که شاخص مرکزساز خارجی[1] آنها در G متناهی است. $FC^{\wedge}(G)$ یک زیرگروه نرمال از G است. گروه G را یک $FC-$گروه (به طور مشابه یک $FC^{\wedge}-$گروه) گوییم هرگاه $G = FC(G)$ (به طور مشابه $G = FC^{\wedge}(G)$) به منظور مطالعۀ بیشتر در این زمینه مرجع [۷] توصیه می‌شود.

در سال ۱۹۷۲ پل اردُش سوالی را به مضمون زیر مطرح کرد:

اگر در هر زیرمجموعه نامتناهی از یک گروه دو عضو وجود داشته باشد که با هم جابه‌جا شوند آیا کرانی برای زیرمجموعه‌های متناهی آن گروه که هیچ دو عضوی از آنها با هم جابه‌جا نمی‌شوند وجود دارد؟

در پاسخ به سوال فوق نویمن [۸] نشان داد که:

هر زیرمجموعۀ نامتناهی گروه G، شامل دو عضو است که با هم جابه‌جا می‌شوند اگر و فقط اگر گروه مرکز−به واسطه−متناهی باشد (یا به عبارتی دیگر $|G/Z(G)|$ متناهی باشد). بعد از این مقاله، مسائلی با ساختار مشابه، مورد تحقیق و بررسی مقالات زیادی قرار گرفت که می‌توان برای مثال به مراجع [۱] تا [۹] اشاره کرد. آن‌چه در همه این مقالات توجه خواننده را جلب می‌کند آن است که در تمام آنها پاسخ به سوال مطرح شده تحت شرایطی نظیر با تولید متناهی بودن صادق است، برای مثال:

[1] Exterior center

لینوکس و وایگلد [۶] برای گروه حل‌پذیر با تولید متناهی G نشان دادند که در هر زیرمجموعهٔ نامتناهی از G دو عضو وجود دارد که زیرگروهی پوچ‌توان تولید می‌کنند اگر و فقط اگر گروه G متناهی-به واسطه-پوچ‌توان باشد. همچنین دلیزیا- نیکترا [۳] و فرامرزی ثالث- پزنده [۵] گروه‌های به طور موضعی مدرج با تولید متناهی را مورد تحقیق خود قرار داده و نشان دادند که برای این گروه‌ها موارد زیر معادل هستند:

- هر زیرمجموعهٔ نامتناهی دو عضو x و y دارد که $\langle x, y\rangle$ زیرگروهی پوچ‌توان از ردهٔ حداکثر ۲ است؛
- هر زیرمجموعهٔ نامتناهی دو عضو x و y دارد که $\langle x, y\rangle$ زیرگروهی ۲- انگل است؛
- هر زیرمجموعهٔ نامتناهی سه عضو $x \neq y$ و z دارد که $[x,y,z] = [y,z,x] = [z,x,y] = 1$؛
- $G/Z_2(G)$ متناهی است که در آن $Z_2(G)$ دومین مرکز گروه G است یعنی $\frac{Z_2(G)}{\mathrm{Z(G)}} = Z(\frac{G}{Z(G)})$.

ما در این مقاله شرط جابه‌جایی دو عضو x و y یعنی $[x,y] = 1$ را با شرط $x \wedge y = 1_\wedge$ جایگزین نموده و مشابه نویمن نشان می‌دهیم که:

قضیهٔ اصلی. فرض کنید G یک گروه باشد. در هر زیرمجموعهٔ نامتناهی X از G دو عنصر x و y وجود دارند که $x \wedge y = 1_\wedge$ اگر و فقط اگر شاخص $Z^\wedge(G)$ در G متناهی باشد.

در واقع در این مقاله بدون هیچ یک از شرایطی که محققین برای مسائل مشابه در نظر گرفته بودند، از منظری دیگر پاسخ مثبتی به سوال اردوش داده شده است.

۲. نتایج

در این بخش ابتدا برخی نتایج مقدماتی را به اثبات می‌رسانیم که حصول قضیه اصلی را برای ما آسان می‌کنند. برای تسهیل در نوشتن و فهمیدن علاوه بر نمادگذاری‌های معمول و رایج قبل، از نمادهای زیر نیز بهره می‌گیریم.

اگر هر زیرمجموعه نامتناهی X ازگروه G دو عنصر x و y داشته باشد که $x \wedge y = 1_\wedge$ (به طور مشابه $[x,y] = 1$)، گروه G را یک $PE^\wedge-$گروه (به طور مشابه $PE-$ گروه) می‌نامیم.

لم۱ [۹، لم ۲.۱]. $C_G^\wedge(x)$ زیرگروهی از G است. بعلاوه $C_G^\wedge(x)$ در $C_G(x)$ نرمال است.

لم ۲. فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت

الف) $FC^\wedge(G) \leq FC(G)$

ب) هر $PE^\wedge-$گروه یک $PE-$ گروه است.

اثبات: قسمت (الف) به آسانی از لم ۱ نتیجه می‌شود، و هم‌ریختی گروهی $\mathcal{K}: G \wedge G \to G$ با ضابطه $x \wedge y \to [x,y]$ قسمت (ب) را نتیجه می‌دهد. ■

یک گروه را یک FIZ–گروه می‌گوییم هرگاه شاخص مرکز در آن گروه متناهی باشد و به طور مشابه اگر شاخص مرکز خارجی در یک گروه متناهی باشد، آن گروه را یک $FIZ^\wedge$–گروه می‌نامیم.

لم ۳. فرض کنید G یک $FIZ^\wedge$–گروه باشد در این صورت G یک $FC^\wedge$–گروه است.

اثبات: چون برای هر عضو g از گروه G،

$$Z^\wedge(G) \leq C_G^\wedge(g) \leq G$$

پس $|G : C_G^\wedge(g)|$ متناهی است. ■

لم ۴. اگر G یک $PE^\wedge$– گروه باشد، G یک $FC^\wedge$–گروه است.

اثبات: بنا به [۸، لم۱] و لم ۲. فرض می‌کنیم که G یک FC–گروه بوده و $FC^\wedge$–گروه نباشد، در این صورت عضو g از G وجود دارد به طوری که $C_G(g)/C_G^\wedge(g)$ یک گروه آبلی نامتناهی است. حال T را یک قاطع از $C_G^\wedge(g)$ در $C_G(g)$ درنظر بگیرید، در این صورت بنا به قضیه رمزی یک زیرمجموعه نامتناهی U از T وجود دارد که برای هر دو عضو u و v از آن $u\wedge v = 1$ یا یک زیرمجموعه نامتناهی V از T وجود دارد که برای هر دو عضو u و v از آن $u\wedge v \neq 1$. بنا به $PE^\wedge$–گروه بودن G، حالت اول رخ می‌دهد. حال با استفاده دوباره از قضیه رمزی دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول: زیرمجموعه‌ی نامتناهی X از U وجود دارد که برای هر دو عضو x و y از X، $g\wedge x = g\wedge y$. در این حالت

$$g\wedge x^{-1}y = (g\wedge x^{-1})^{x^{-1}}(g\wedge y) = (g\wedge x^{-1})^{x^{-1}}(g\wedge x) = (g\wedge x^{-1}x) = 1$$

پس داریم $xC_G^\wedge(g) = yC_G^\wedge(g)$ که یک تناقض است.

حالت دوم: زیرمجموعه‌ی نامتناهی Y از U وجود دارد که برای هر دو عضو x و y از Y، $g\wedge x \neq g\wedge y$، در این صورت برای هر دو عضو gx و gy از زیرمجموعه نامتناهی gY با استفاده از [۷، گزاره ۱.۲.۱۷] داریم

$$gx\wedge gy = (gx\wedge g)^g(gx\wedge y)$$

$$= {}^g(x\wedge g)(g\wedge g)^{g^2}(x\wedge y)^g(g\wedge y)$$

$$= (x\wedge g)(g\wedge y) \neq 1$$

که با فرض $PE^\wedge$–گروه بودن G در تناقض است. ■

لم ۵. اگر $G = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ یک $FC^\wedge$–گروه باشد، G یک $FIZ^\wedge$-گروه است.

اثبات: با توجه به $Z^\wedge(G) = \bigcap_{i=1}^{n} C_G^\wedge(x_i)$ و استفاده از قضیهٔ پوانکاره اثبات تمام است. ■

گروه G را آبلی خارجی[۲] گوییم هرگاه برای هر دو عضو u و v از آن $u \wedge v = 1$، یا به عبارتی دیگر $G = Z^{\wedge}(G)$. برای زیرمجموعه X از G مرکز ساز خارجی آن را به صورت $C_G^{\wedge}(X) = \bigcap_{x \in X} C_G^{\wedge}(x)$ تعریف می‌کنیم.

لم ۶. فرض کنید G یک $FC^{\wedge}-$گروه باشد. در این صورت G یک $FIZ^{\wedge}$-گروه است اگر و فقط اگر گروه G دارای زیرگروه آبلی خارجی A با شاخص متناهی باشد.

اثبات: قسمت فقط اگر با قرار دادن $A = Z^{\wedge}(G)$ تمام است، پس فرض می‌کنیم A یک زیر گروه آبلی خارجی با شاخص متناهی از G باشد. در این صورت $G = \langle A \cup R \rangle$ که R یک زیرمجموعه‌ی متناهی از G است. بنا به قضیه پوانکاره شاخص $C_G^{\wedge}(R)$ در G متناهی است و از طرفی $A \leq C_G^{\wedge}(A)$ نتیجه می‌دهد که شاخص $C_G^{\wedge}(A)$ در G نیز متناهی است. بنابراین شاخص $Z^{\wedge}(G) = C_G^{\wedge}(A) \cap C_G^{\wedge}(R)$ متناهی است و اثبات تمام است. ■

نتیجهٔ ۱. فرض کنید G یک $FC^{\wedge}-$گروه باشد که $FIZ^{\wedge}-$گروه نیست. در این صورت اگر A زیرگروهی با شاخص متناهی از G باشد آنگاه A زیرگروه آبلی خارجی نیست.

لم ۷. فرض کنید G یک $FC^{\wedge}-$گروه باشد که $FIZ^{\wedge}-$گروه نیست همچنین فرض کنید G شامل دو دنبالهٔ متناهی از n عنصر، $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ و $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ با خواص زیر باشد.

۱) اگر $i \neq j$، آن‌گاه $a_i \wedge a_j \neq 1$.

۲) اگر $i \neq j$، آن‌گاه $a_i \wedge b_j = 1$.

۳) برای هر i، $a_i \wedge b_i \neq 1$.

۴) برای هر i, j، $b_i \wedge b_j = 1$.

در این صورت G شامل دو عنصر دیگر b_{n+1} و a_{n+1} است که شرایط ۱) تا ۴) برای دنباله‌های با طول $n+1$، $(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1})$ و $(b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1})$ نیز صادق هستند.

اثبات: با استفاده از قضیهٔ پوانکاره زیرگروه، $A = C_G{}^{\wedge}(\{a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n\})$ دارای شاخص متناهی در G است، در این صورت بنا به نتیجه قبل، A زیرگروه آبلی خارجی از G نیست. بنابراین، عناصر a و b در A موجودند که $a \wedge b \neq 1$. حال قرار می‌دهیم: $a_{n+1} = ab_1b_2 \dots b_n$ و $b_{n+1} = b$. به سادگی می‌توان دید که برای $1 \leq i \leq n$، $a_{n+1} \wedge b_i = a_i \wedge b_{n+1} = b_i \wedge b_{n+1} = 1$ و $a_{n+1} \wedge b_{n+1} = a_{n+1} \wedge a_i \neq 1$. ■

نتیجه۲. اگر G یک $FC^{\wedge}-$گروه باشد که $FIZ^{\wedge}-$گروه نیست آن‌گاه G یک $PE^{\wedge}-$گروه نیست.

اثبات: چون $G \neq Z^{\wedge}(G)$، اعضای a_1 و b_1 از G موجودند که $a_1 \wedge b_1 \neq 1$. حال بنا به لم قبل مجموعهٔ نامتناهی $X = \{a_i | i \in \mathbb{N}\}$ از G وجود دارد که برای هر دو عضو a و b از آن داریم $a \wedge b \neq 1$. ■

---

[2] Exterior abelian

قضیهٔ اصلی: گروه G یک $PE^{\wedge}-$گروه است اگر و فقط اگر یک $FIZ^{\wedge}-$ گروه باشد.

اثبات: اگر G یک $PE^{\wedge}-$گروه باشد آن‌گاه بنا به لم ۴، G یک $FC^{\wedge}-$گروه است. حال به کمک نتیجه ۲، G یک $FIZ^{\wedge}-$ گروه است.

به عکس اگر $|G : Z^{\wedge}(G)| = n < \infty$ آن‌گاه هر زیرمجموعه با بیش از $n+1$ عضو X از G شامل دو عضو x, y است که در یک هم دسته از $Z^{\wedge}(G)$ قرار دارند. قرار دهید $x = at, y = as$ که s و t اعضای $Z^{\wedge}(G)$ هستند. در این صورت داریم:

$$x\wedge y = at\wedge as = {}^{a}(t\wedge as)(a\wedge as) = (a\wedge a)^{a}(a\wedge s) = 1.$$

بنا بر این G یک $PE^{\wedge}-$گروه است. ■

References

1. Abdollahi A., “Finitely generated soluble groups with an Engel condition on infinite subsets”, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 103 (2000) 47-49.

2. Abdollahi A., Taeri B., “A condition on finitely generated soluble groups”, Comm. Algebra, 27 (1999) 5633-5638.

3. Delizia C., Nicotera C., “Groups with conditions on infinite subsets”, Ischia Group Theory 2006: Proceedings of a Conference in Honor of Akbar Rhmetulla, 4655, World Scientific Publishing, Singapore (2007).

4. Faramarzi Salles A., “Finitely generated soluble groups with a condition on infinite subsets”, Bull. Aust. Math. Soc., 87 (2013) 152-157.

5. Faramarzi Salles A., Pazandeh Shanbehbazari F., “Locally graded groups with a condition on infinite subsets”, Inter. J. Group theory, Vol. **7** No. 4 (2018) 1-7.

6. Lennox J.C., Wiegold J., “Extensions of a problem of Paul Erdös on groups”, J. Austral. Math. Soc. Ser. A, 31 (1981) 459-463.

7. McDermott A., “The nonabelian tensor product of groups: computations and structural results”, PhD thesis, National Univ. of Ireland, Galway, February (1998).

8. Neumann B. H., “*A problem of Paul Erdös on groups*”, J. Austral. Math. Soc., Ser. A 21 (1976) 467-472.

9. Niroomand P., Russo F., “A note on the exterior centralizer”, Arch. Math. 93 (2009) 505– 512.