Mathematical Researches
Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Some Properties of the Nil-Graphs of Ideals of Commutative Rings

Reza Nikandish[1]

1. Department of Mathematics, Jundi-Shapur University of Technology, Dezful, Iran. E-mail: r.nikandish@ipm.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
24 March 2020
Received in revised form:
8 December 2020
Accepted:
22 December 2020
Published online:
31 December 2022

Keywords:
Nil-graph,
Complete graph,
Bipartite graph,
Genus,
Independence number.

ABSTRACT

Let R be a commutative ring with identity and $\mathrm{N}il(R)$ be the set of nilpotent elements of R. The nil-graph of ideals of R is defined as the graph $\mathbb{AG}_N(R)$ whose vertex set is $\{I\colon (0) \neq I \lhd R$ and there exists a non-trivial ideal J such that $IJ \subseteq \mathrm{N}il(R)\}$ and two distinct vertices I and J are adjacent if and only if $IJ \subseteq \mathrm{N}il(R)$. Here, we study conditions under which $\mathbb{AG}_N(R)$ is complete or bipartite. Also, the independence number of $\mathbb{AG}_N(R)$ is determined, where R is a reduced ring. Finally, we classify Artinian rings whose nil-graphs of ideals have genus at most one.

Introduction

When one assigns a graph with an algebraic structure, numerous interesting algebraic problems arise from the translation of some graph-theoretic parameters such as clique number, chromatic number, diameter, radius and so on. There are many papers in this topic, see for example [5], [8] and [12]. Throughout this paper, all rings are assumed to be non-domain commutative rings with identity. By $\mathbb{I}(R)$ ($\mathbb{I}(R)^*$) and $\mathrm{N}il(R)$, we denote the set of all proper (non-trivial) ideals of R and the nil-radical of R, respectively. The set of all maximal and minimal prime ideals of R are denoted by $\mathrm{M}ax(R)$ and $\mathrm{M}in(R)$, respectively. The ring R is said to be *reduced*, if it has no non-zero nilpotent element.

Let G be a graph. The degree of a vertex x of G is denoted by $d(x)$. The graph G is said to be r-*regular*, if the degree of each vertex is r. The *complete graph* with n vertices, denoted by K_n, is a graph in which any two distinct vertices are adjacent. A *bipartite graph* is a graph whose vertices can be divided into two disjoint parts U and V such that every edge joins a vertex in U to one in V. It is well-known that a bipartite graph is a graph that does not contain any odd cycle. A *complete bipartite graph* is a bipartite graph in which every vertex of one part is joined to every vertex of the other part. If the size of one of the parts is 1, then it is said to be a *star graph*. A *tree* is a connected graph without cycles. Let S_k denote the sphere with k handles, where k is a non-negative integer, that is, S_k is an oriented surface of genus k. The *genus* of a graph G, denoted by $\gamma(G)$, is the minimal integer n such that the graph can be embedded in S_n. A genus 0 graph is called a *planar graph*. It is well-known that

$$\forall n \geq 3;\ \ \gamma(K_n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil,$$

$$\forall n \geq 3\ ,\forall m \geq 2;\ \gamma(K_{m,n}) = \left\lceil \frac{(m-2)(n-2)}{4} \right\rceil.$$

For a graph G, the *independence number* of G is denoted by $\alpha(G)$. For more details about the used terminology of graphs, see [13].

We denote the annihilator of an ideal I by $Ann(I)$. Also, the ideal I of R is called an *annihilating-ideal* if $Ann(I) \neq (0)$. The notation $\mathbb{A}(R)$ is used for the set of all annihilating-ideals of R. By the *annihilating-ideal graph* of R, $\mathbb{AG}(R)$, we mean the graph with vertex set $\mathbb{A}(R)^* = \mathbb{A}(R)\backslash\{0\}$ and two distinct vertices I and J are adjacent if and only if $IJ = 0$. Some properties of this graph have been studied in [1, 2, 3, 5, 6]. In [12], the authors have introduced another kind of graph, called the nil-graph of ideals. The nil-graph of ideals of R is defined as the graph $\mathbb{AG}_N(R)$ whose vertex set is $\{I\colon\ (0) \neq I \lhd R$ and there exists a non-trivial ideal J such that $IJ \subseteq \mathrm{N}il(R)\}$ and two distinct vertices I and J are adjacent if and only if $IJ \subseteq \mathrm{N}il(R)$. Obviously, our definition is slightly different from the one defined by Behboodi and Rakeei in [5] and it is easy to see that the usual annihilating-ideal graph $\mathbb{AG}(R)$ is a subgraph of $\mathbb{AG}_N(R)$. In [12], some basic properties of nil-graph of ideals have been studied. In this article, we continue the study of the nil-graph of ideals. In Section 2, the necessary and sufficient conditions, under which the nil-graph of a ring is complete or bipartite, are found. Section 3 is devoted to the studying of independent sets in nil-graph ideals. In Section 4, we classify all Artinian rings whose nil-graphs of ideals have genus at most one.

When Is the Nil-Graph of Ideals Complete or Bipartite?

Theorem 1. *Let R be a Noetherian ring. Then $\mathbb{AG}_N(R)$ is a complete graph if and only if either R is Artinian local or $R \cong F_1 \times F_2$, where F_1 and F_2 are fields.*

The next result shows that nil-graphs, whose every vertices have finite degrees, are finite graphs.

Theorem 2. *If every vertex of $\mathbb{AG}_N(R)$ has a finite degree, then R has finitely many ideals.*

The next result gives another condition under which $\mathbb{AG}_N(R)$ is complete.

Theorem 3. *If $\mathbb{AG}_N(R)$ is an r-regular graph, then $\mathbb{AG}_N(R)$ is a complete graph.*

Theorem 4. *Let R be a ring such that $\mathbb{AG}_N(R)$ is bipartite. Then $\mathbb{AG}_N(R)$ is complete bipartite. Moreover, if R is non-reduced, then $\mathbb{AG}_N(R)$ is star and $Nil(R)$ is the unique minimal prime ideal of R.*

The Independence Number of Nil-Graphs of Ideals

Proposition 5. *If $R \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$ is a ring, then $\alpha(G_{\mathcal{T}}(R)) = 2^{n-1}$.*

Using [4, Theorem 8.7], we have the following immediate corollary.

Corollary 6. *Let R be an Artinian with n maximal ideals. Then $\alpha(\mathbb{AG}_N(R)) \geq 2^{n-1}$; moreover, the equality holds if and only if R is reduced.*

Proposition 7. *If $|Min(R)| \geq n$, then $\alpha(\mathbb{AG}_N(R)) \geq 2^{n-1}$.*

From the previous proposition, we have the following immediate corollary which shows that the finiteness of $\alpha(\mathbb{AG}_N(R))$ implies the finiteness of number of the minimal prime ideals of R.

Corollary 8. *If R contains infinitely many minimal prime ideals, then the independence number of $\mathbb{AG}_N(R)$ is infinite.*

Theorem 9. *For every Noetherian reduced ring R, $\alpha(\mathbb{AG}_N(R)) = 2^{|Min(R)|-1}$.*

As an application of the nil-graph of ideals in the ring theory we have the following corollary which shows that number of minimal prime ideals of a Noetherian reduced ring coincides number of maximal ideals of the total ring of R.

Corollary 10. *Let R be a Noetherian reduced ring. Then*

$$|\mathrm{M}in(R)| = |\mathrm{M}ax(T(R))| = \log_2(\alpha(\mathbb{AG}_N(R))).$$

The Genus of Nil-Graphs of Ideals

Theorem 11. *Let g and $q > 0$ be non-negative integers. Then there are finitely many Artinian rings R such that $\gamma(\mathbb{AG}_N(R)) = g$ and $|\frac{R}{\mathfrak{m}}| \leq q$, for every maximal ideal $\mathfrak{m}$ of R.*

Before proving the next lemma, we need the following notation. Let G be a graph and V' be the set of vertices of G whose degrees equal one. We use $\tilde{G}$ for the subgraph $G\backslash V'$ and call it the *reduction* of G.

Lemma 12. $\gamma(G) = \gamma(\tilde{G})$, *where $\tilde{G}$ is the reduction of G.*

In the following, all Artinian rings, whose nil-graphs of ideals have genus at most one, are classified.

Theorem 13. *Let R be an Artinian ring. If $\gamma(\mathbb{AG}_N(R)) < 2$, then $|Max(R)| \leq 4$ and moreover, the following statements hold.*

1. If $|Max(R)| = 4$, then $\gamma(\mathbb{AG}_N(R)) < 2$ if and only if R is isomorphic to a direct product of four fields.

2. If $|Max(R)| = 3$, then $\gamma(\mathbb{AG}_N(R)) < 2$ if and only if $R \cong F_1 \times F_2 \times R_3$, where F_1,F_2 are fields and R_3 is an Artinian local ring with at most two non-trivial ideals.

3. If $|Max(R)| = 2$, then $\gamma(\mathbb{AG}_N(R)) < 2$ if and only if either $R \cong F_1 \times R_2$, where F_1 is a field and R_2 is an Artinian local ring with at most three non-trivial ideals or $R \cong R_1 \times R_2$, where every R_i $(i = 1,2)$ is an Artinian local ring with at most one non-trivial ideal.

4. If R is local, then $\gamma(\mathbb{AG}_N(R)) < 2$ if and only if R has at most 7 non-trivial ideals.

Conclusion

The field of graph theory and ring theory both benefit from the study of algebraic concepts using graph theoretic concepts. Usually, when one assigns a graph to an algebraic structure, some problems in ring theory might be more easily solved. There exist numerous interesting algebraic problems arising from the translation of some graph-theoretic parameters and properties such as diameter, girth, independence number, planarity, and so on.

How to cite: Nikandish, R. (2022). Some Properties of the Nil-Graphs of Ideals of Commutative Rings. *Mathematical Researches*, 8 (4), 238-255.

Publisher: Kharazmi University

Mathematical Researches
Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554
Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/
Kharazmi University

نتایجی پیرامون گراف‌های پوچ وابسته به ایده‌آل‌های یک حلقه جابه‌جایی

رضا نیک‌اندیش[۱] ✉

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی جندی شاپور، دزفول، ایران. رایانامه: r.nikandish@ipm.ir

اطلاعات مقاله	چکیده

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۱/۰۵
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۹/۱۸
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۰۲
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۱۰/۱۰

واژه‌های کلیدی:
گراف پوچ،
گراف کامل،
گراف دوبخشی،
گونا،
عدد استقلال.

فرض کنیم R یک حلقهٔ جابه‌جایی یکدار و $\mathrm{N}il(R)$ مجموعه اعضای پوچ‌توان حلقه R باشد. گراف پوچ وابسته به ایده‌آل‌های R که با نماد $\mathbb{AG}_N(R)$ نشان داده می‌شود گرافی با مجموعه رئوس

$$\{I:\ (0)\neq I\lhd R\,,\exists(0)\neq J\lhd R\ \text{s.t}\ IJ\subseteq \mathrm{N}il(R)\}$$

است و دو راس متمایز I و J مجاور هستند اگر و تنها اگر $IJ\subseteq \mathrm{N}il(R)$. در این مقاله شرایطی را بررسی می‌کنیم که تحت آن‌ها گراف $\mathbb{AG}_N(R)$ کامل یا دوبخشی است. همچنین زمانی که R یک حلقه کاهشی باشد، عدد استقلال $\mathbb{AG}_N(R)$ را به‌دست می‌آوریم. درنهایت حلقه‌های آرتینی که گراف‌های پوچ ایده‌آل‌های آنها دارای گونای حداکثر یک می‌باشد را دسته‌بندی می‌کنیم.

استناد: نیک‌اندیش، رضا؛ (۱۴۰۱). نتایجی پیرامون گراف‌های پوچ وابسته به ایده‌آل‌های یک حلقه جابه‌جایی. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۴)، ۱۸-۲۳۸.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه

هنگامی که به یک ساختار جبری یک گراف نسبت دهیم، مسائل جبری جذابی از تبدیل برخی پارامترهای نظریه گراف مانند عدد خوشه‌ای، عدد رنگی، قطر، شعاع و ... به وجود می‌آیند. مقالات زیادی در این زمینه وجود دارد، برای نمونه [۵]، [۸] و [۱۲] را ببینید.

در سراسر این مقاله، تمام حلقه‌ها جابه‌جایی و یکدار می‌باشند که دامنه صحیح نیستند. با نمادهای $\mathbb{I}(R)$ ($\mathbb{I}(R)^*$) و $\mathrm{N}il(R)$، به ترتیب مجموعه تمام ایده‌آل‌های سره (نابدیهی) R و رادیکال پوچ R را مشخص می‌کنیم. مجموعه تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال و اول مینیمال R را به ترتیب با $\mathrm{Max}(R)$ و $\mathrm{Min}(R)$ نمایش می‌دهیم. حلقه R *کاهشی* نامیده می‌شود، اگر فاقد عضو پوچ‌توان ناصفر باشد.

فرض کنیم G یک گراف باشد. درجه راس x از گراف G را با نماد $d(x)$ نمایش می‌دهیم. برای عدد صحیح و نامنفی r گراف G، r-*منظم* نامیده می‌شود، اگر درجه هر راس آن r باشد. *گراف کامل* با n راس، که با K_n نمایش داده می‌شود، گرافی است که هر دو راس متمایز آن با هم مجاور هستند. یک *گراف دوبخشی* گرافی است که مجموعه رئوسش را می‌توان به دو مجموعهٔ U و V افراز کرد به طوری که هر یال یک انتها در U و یک انتها در V دارد. به خوبی می‌دانیم که یک گراف دوبخشی گرافی است که شامل هیچ دور فردی نیست. *گراف دوبخشی کامل* یک گراف دوبخشی است که در آن هر راس از یک بخش با تمام رئوس بخش دیگر مجاور است. اگر اندازه یکی از بخش‌ها برابر ۱ باشد، آن‌گاه آن را *گراف ستاره* می‌نامند. یک درخت گرافی همبند و بدون دور است.

فرض کنیم k یک عدد صحیح ناصفر و S_k یک کره با k دسته باشد، یعنی S_k یک رویه جهت دار از گونای k باشد. *گونای* گراف G که با نماد $\gamma(G)$ نشان داده می‌شود کوچکترین عدد صحیح n است که گراف را بتوان در S_n نشاند. یک گراف از گونای صفر *گراف مسطح* نامیده می‌شود. مشهور است که

$$\forall n \geq 3;\ \ \gamma(K_n) = \lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \rceil,$$

$$\forall n \geq 3\ ,\ \forall m \geq 2;\ \gamma(K_{m,n}) = \lceil \frac{(m-2)(n-2)}{4} \rceil.$$

برای یک گراف مانند G، عدد *استقلال* G را با نماد $\alpha(G)$ نمایش می‌دهیم. برای جزئیات بیشتر درباره‌ی اصطلاحات استفاده شده از نظریه گراف، [۱۳] را ببینید.

پوچساز یک ایده‌آل مانند I را با $\mathrm{Ann}(I)$ نمایش می‌دهیم. همچنین ایده‌آل I از R را یک *ایده‌آل پوچ‌کن نامیم اگر* $Ann(I) \neq (0)$. نماد $\mathbb{A}(R)$ را برای نشان دادن مجموعه تمام ایده‌آل‌های پوچ‌کن R استفاده می‌کنیم. منظور از گراف ایده‌آل پوچ‌کن R، $\mathbb{AG}(R)$، گرافی با مجموعه رئوس $\mathbb{A}(R)^* = \mathbb{A}(R)\setminus\{0\}$ است و دو راس متمایز I و J مجاور هستند اگر و تنها اگر $IJ = 0$. بعضی از خواص این گراف در [۱-۳]، [۵] و [۶] بررسی شده است. در [۱۲]، نویسندگان نوع دیگری از گراف وابسته به حلقه‌ها تحت عنوان گراف پوچ وابسته به ایده‌آل‌ها را معرفی کردند. گراف پوچ وابسته به ایده‌آل‌های R، با نماد $\mathbb{AG}_N(R)$ نشان داده می‌شود. مجموعه رئوس این گراف عبارت است از

$$\left\{I \,:\, IJ \subseteq \mathrm{N}il(R) \quad \text{که به طوری باشد داشته وجود نابدیهی ایده‌آل } J \text{ و } (0) \neq I \lhd R\right\}$$

و دو راس متمایز I و J مجاور هستند اگر و تنها اگر $IJ \subseteq \mathrm{N}il(R)$. واضح است که این تعریف اندکی با تعریف ارائه شده توسط بهبودی و راکعی در [۵] متفاوت است و به آسانی می‌توان دید که گراف ایده‌آل‌پوچ کن معمولی $\mathbb{AG}(R)$ یک زیرگراف از $\mathbb{AG}_N(R)$ می‌باشد. در [۱۲]، بعضی از خواص اساسی گراف پوچ وابسته به ایده‌آل‌ها بررسی شده است. در این مقاله، به مطالعه‌ی گراف پوچ وابسته به ایده‌آل‌ها ادامه می‌دهیم. در بخش ۲، شرایط لازم و کافی که تحت آن‌ها گراف پوچ یک حلقه، کامل یا دوبخشی است را یافته‌ایم. بخش ۳ را به بررسی مجموعه‌های مستقل در گراف پوچ ایده‌آل‌ها اختصاص داده‌ایم. در بخش ۴، تمام حلقه‌های آرتینی که گراف پوچ وابسته به ایده‌آل‌های آن‌ها دارای گونای حداکثر یک می‌باشد را دسته‌بندی کرده‌ایم.

۲. چه زمانی گراف پوچ وابسته به ایده‌آل‌ها کامل یا دوبخشی است؟

در این بخش، شرایطی را بررسی می‌کنیم که تحت آن‌ها گراف پوچ وابسته به ایده‌آل‌های یک حلقه جابه‌جایی، کامل یا دوبخشی است. برای نمونه، نشان می‌دهیم که اگر R یک حلقه نوتری باشد، آن‌گاه $\mathbb{AG}_N(R)$ یک گراف کامل است اگر و تنها اگر R موضعی آرتینی باشد یا $R \cong F_1 \times F_2$، که F_1 و F_2 میدان هستند. همچنین ثابت شده که اگر گراف $\mathbb{AG}_N(R)$ دوبخشی باشد، آن‌گاه $\mathbb{AG}_N(R)$ دوبخشی کامل است. به علاوه اگر R یک حلقه غیرکاهشی باشد، آن‌گاه $\mathbb{AG}_N(R)$ یک گراف ستاره و $\mathrm{N}il(R)$ ایده‌آل اول مینیمال منحصر به فرد R است.

این مقاله را با قضیه زیر شروع می‌کنیم که می‌توان آن را نتیجه‌ای از [۱۲، قضیه ۵] دانست (در اینجا به طور مستقل اثبات کرده‌ایم). این نکته نیز واضح است که اگر R یک حلقه کاهشی باشد، آن‌گاه $\mathbb{AG}_N(R) \cong \mathbb{AG}(R)$.

قضیهٔ ۱. *فرض کنیم R یک حلقه نوتری باشد. در این صورت $\mathbb{AG}_N(R)$ یک گراف کامل است اگر و تنها اگر R موضعی*

آرتینی باشد یا $R \cong F_1 \times F_2$، که F_1 و F_2 میدان هستند.

اثبات: ابتدا فرض کنیم $\mathbb{AG}_N(R)$ کامل باشد. اگر R کاهشی باشد، آن‌گاه طبق [۵، قضیه ۲,۷] داریم $R \cong F_1 \times F_2$. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم $\mathrm{N}il(R) \neq (0)$. اثبات را در دو حالت زیر ادامه می‌دهیم:

حالت اول: R یک حلقه موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ باشد. چون R غیرکاهشی است، طبق لم ناکایاما (گزاره ۲,۶ از [۴] را ببینید)، $\mathfrak{m}$ و $\mathfrak{m}^2$ دو راس متمایز از گراف $\mathbb{AG}_N(R)$ هستند. بنابراین $\mathfrak{m}^3 \subseteq \mathrm{N}il(R)$ و R یک حلقه موضعی آرتینی است.

حالت دوم: R دارای حداقل دو ایده‌آل ماکسیمال باشد. ابتدا نشان می‌دهیم R دقیقا دو ایده‌آل ماکسیمال دارد. به خلاف فرض کنیم $\mathfrak{m}$، $\mathfrak{n}$ و $\mathfrak{p}$ سه ایده‌آل ماکسیمال متمایز از R باشند. چون $\mathbb{AG}_N(R)$ کامل است، نتیجه می‌گیریم $\mathfrak{mn} \subseteq \mathfrak{p}$ $\mathrm{N}il(R) \subseteq$ و این یک تناقض است. بنابراین R دقیقا دو ایده‌آل ماکسیمال مانند $\mathfrak{m}$ و $\mathfrak{p}$ دارد. حال ادعا می‌کنیم $\mathfrak{m}$ و $\mathfrak{p}$ ایده‌آل‌های اول مینیمال هستند. چون $\mathfrak{m}$ و $\mathfrak{p}$ مجاور هستند، یکی از آن‌ها، مثلا $\mathfrak{p}$، ایده‌آل اول مینیمالی از R است. به خلاف، فرض کنیم $\mathfrak{m}$ به طور سره شامل ایده‌آل اول مینیمال $\mathfrak{q}$ از R باشد. حال چون $\mathfrak{mp} \subseteq \mathfrak{q}$، یک تناقض به دست آورده‌ایم و ادعا ثابت شده است. بنابراین R آرتینی است. در نتیجه طبق [۴، قضیه ۷,۸] داریم $R \cong R_1 \times R_2$، که R_1 و R_2 حلقه‌های موضعی آرتینی هستند. اکنون نشان می‌دهیم R_1, R_2 هر دو میدان هستند. به خلاف و بدون کاستن از کلیت فرض کنیم R_1 شامل یک ایده‌آل نابدیهی مانند I باشد. چون R یک حلقه آرتینی است، لذا $I \times R_2$ یک راس گراف است. در این صورت رئوس $I \times R_2$ و $R_2 \times (0)$ مجاور نیستند و این یک تناقض است، بنابراین $R \cong F_1 \times F_2$ که F_1 و F_2 میدان هستند.

برعکس، اگر $R \cong F_1 \times F_2$ که F_1 و F_2 میدان هستند، آن‌گاه واضح است که $\mathbb{AG}_N(R) \cong K_2$. حال فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی آرتینی باشد. چون $\mathfrak{m}$ پوچ‌توان است، نتیجه می‌گیریم $\mathbb{AG}_N(R)$ کامل است. ■

مثال زیر نشان می‌دهد قضیه ۱ برای حلقه‌های غیر نوتری برقرار نیست.

مثال ۲. فرض کنیم $R = \frac{K[x_i: i\geq 1]}{(x_i^2: i\geq 1)}$، که K یک میدان است. در این صورت R آرتینی نیست و $\mathbb{AG}_N(R)$ یک گراف کامل است.

تذکر ۳. فرض کنیم R یک حلقه باشد. هر ایده‌آل نابدیهی مشمول در $\mathrm{N}il(R)$ مجاور با هر راس دیگر از $\mathbb{AG}_N(R)$ است.

در حالت خاص، اگر R یک حلقه موضعی آرتینی باشد، آن‌گاه $\mathbb{AG}_N(R)$ یک گراف کامل است.

قضیه بعد نشان می‌دهد گراف‌های پوچی که هر راس آن‌ها درجه متناهی دارد، گراف متناهی هستند.

قضیهٔ ۴. *اگر هر راس از گراف $\mathbb{AG}_N(R)$ دارای درجه متناهی باشد، آن‌گاه تعداد ایده‌آل‌های R متناهی است.*

اثبات: ابتدا فرض کنیم R غیرکاهشی باشد. چون $d(\mathrm{N}il(R)) < \infty$، حکم از تذکر ۳ نتیجه می‌شود. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم R یک حلقه کاهشی است. $0 \neq x \in Z(R)$ را انتخاب می‌کنیم. چون $d(Rx) < \infty$ و Rx با هر ایده‌آل مشمول در $Ann(x)$ مجاور است، نتیجه می‌گیریم که $Ann(x)$ یک R-مدول آرتینی است. به طور مشابه می‌توان نشان داد Rx نیز یک R-مدول آرتینی است. اکنون R-یکریختی

$$Rx \cong \frac{R}{Ann(x)}$$

نتیجه می‌دهد R یک حلقهٔ آرتینی است. چون R کاهشی است، بنا به [۴، قضیه ۸،۷]، R به صورت حاصل ضرب مستقیم تعداد متناهی میدان می‌باشد و بنابراین اثبات تمام است. ■

قضیه بعد شرط دیگری را که تحت آن $\mathbb{AG}_N(R)$ کامل است ارائه می‌کند.

قضیهٔ ۵. *اگر $\mathbb{AG}_N(R)$ یک گراف r-منظم باشد، آن‌گاه $\mathbb{AG}_N(R)$ یک گراف کامل است.*

اثبات: اگر $\mathrm{N}il(R) \neq (0)$، آن‌گاه طبق تذکر ۳، چیزی برای اثبات وجود ندارد. بنابراین فرض کنیم R یک حلقه کاهشی باشد. چون $\mathbb{AG}_N(R)$ یک گراف r-منظم است، قضیه ۴ و [۴، قضیه ۸،۷]، نتیجه می‌دهند $R \cong F_1 \times \cdots \times F_n$ که $n \geq 2$ و هر F_i یک میدان است. کار سختی نیست که نشان دهیم هر ایده‌آل $I = I_1 \times \cdots \times I_n$ از R دارای درجه $2^{n_I} - 1$ است، که $n_I = |\{i \ : \ 1 \leq i \leq n \ , \ I_i = (0)\}|$ (توجه داریم که چون R یک حلقه آرتینی است، لذا I یک راس گراف است). فرض کنیم $I = F_1 \times (0) \times \cdots \times (0)$ و $J = F_1 \times \cdots \times F_{n-1} \times (0)$، در این صورت داریم $d(I) = 2^{n-1} - 1$ و $d(J) = 1$. اکنون r-منظم بودن گراف $\mathbb{AG}_N(R)$ نتیجه می‌دهد $2^{n-1} - 1 = 1$ و لذا $n = 2$. بنابراین $R \cong F_1 \times F_2$ و اثبات کامل است. ■

در ادامه این بخش، گراف‌های پوچ دوبخشی وابسته به ایده‌آل‌های یک حلقه جابه‌جایی را بررسی می‌کنیم.

قضیهٔ ۶. *فرض کنیم R یک حلقه باشد که $\mathbb{AG}_N(R)$ دوبخشی است. در این صورت $\mathbb{AG}_N(R)$ دوبخشی کامل است. به علاوه، اگر R غیرکاهشی باشد، آن‌گاه $\mathbb{AG}_N(R)$ گراف ستاره است و $Nil(R)$ ایده‌آل اول مینیمال یکتای R است.*

اثبات: اگر R کاهشی باشد، آن‌گاه طبق [۶، نتیجه ۲,۵]، $\mathbb{AG}_N(R)$ گراف دوبخشی کامل است. حال فرض کنیم R غیرکاهشی باشد. بنابراین طبق تذکر ۳، $\mathbb{AG}_N(R)$ گراف ستاره است. لذا مجددا طبق تذکر ۳، یا $\mathrm{N}il(R)$ یک ایده‌آل مینیمال است یا R دقیقا دو ایده‌آل دارد. در حالت دوم R یک حلقه موضعی آرتینی است و بنابراین $\mathrm{N}il(R)$ ایده‌آل اول مینیمال منحصر به فرد R است. پس برای $x \in R$، می‌توانیم فرض کنیم $\mathrm{N}il(R) = (x)$، ایده‌آل مینیمال R است. برای اتمام اثبات، نشان می‌دهیم R دقیقا یک ایده‌آل اول مینیمال دارد. به خلاف فرض کنیم $\mathfrak{p}_1$ و $\mathfrak{p}_2$ دو ایده‌آل اول مینیمال متمایز از R باشند. $z \in \mathfrak{p}_1 \backslash \mathfrak{p}_2$ را انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم $S_1 = R\backslash\mathfrak{p}_1$ و $S_2 = \{1,z,z^2,\dots\}$. اگر $0 \notin S_1S_2$، آن‌گاه طبق [۱۱، قضیه ۳,۴۴]، ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R وجود دارد به طوری که $\mathfrak{p} \cap S_1S_2 = \varnothing$ و لذا $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$ که این یک تناقض است. پس $0 \in S_1S_2$. در نتیجه عدد صحیح و مثبت k و $y \in R\backslash\mathfrak{p}_1$ وجود دارد به طوری که $yz^k = 0$. ایده‌آل‌های (x)، (y) و (z^k) را در نظر می‌گیریم. واضح است که (x)، (y) و (z^k) سه راس متمایز در گراف $\mathbb{AG}_N(R)$ به شکل یک مثلث هستند که این یک تناقض است. ■

نتیجه زیر فوراً از قضیه ۶ و تذکر ۳ به‌دست می‌آید:

نتیجهٔ ۷. *اگر $\mathbb{AG}_N(R)$ یک درخت باشد، آن‌گاه $\mathbb{AG}_N(R)$ یک گراف ستاره است.*

این بخش را با نتیجه‌ی زیر به پایان می‌بریم:

نتیجهٔ ۸. *فرض کنیم R یک حلقه آرتینی باشد. در این صورت $\mathbb{AG}_N(R)$ دوبخشی است اگر و تنها اگر $\mathbb{AG}_N(R) \cong K_n$، که $n \in \{1,2\}$.*

اثبات: فرض کنیم R یک حلقه آرتینی و $\mathbb{AG}_N(R)$ یک گراف دوبخشی باشد. در این صورت طبق قضیه ۶، $\mathbb{AG}_N(R)$ دوبخشی کامل است. اگر R موضعی باشد، آن‌گاه تذکر ۳ نتیجه می‌دهد $\mathbb{AG}_N(R)$ کامل است. چون $\mathbb{AG}_N(R)$ دوبخشی کامل است، نتیجه می‌گیریم $\mathbb{AG}_N(R) \cong K_n$، که $n \in \{1,2\}$. حال فرض کنیم R موضعی نباشد، طبق [۴، قضیه ۸,۷]، عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $R \cong R_1 \times \cdots \times R_n$، که هر R_i یک حلقه موضعی آرتینی است. چون $\mathbb{AG}_N(R)$ دور فرد ندارد، نتیجه می‌گیریم $n = 2$. حال برای کامل شدن اثبات، نشان می‌دهیم R_1 و R_2 میدان هستند. بدون کاستن از کلیت و به خلاف فرض کنیم R_1 شامل یک ایده‌آل نابدیهی مانند I باشد. کار سختی نیست که نشان دهیم $R_1 \times (0)$،

$I \times (0)$ و $R_2 \times (0)$ در گراف $\mathbb{AG}_N(R)$ تشکیل یک مثلث می‌دهند که یک تناقض است. اثبات برعکس بدیهی است. ■

۳. عدد استقلال گراف‌های پوچ وابسته به ایده‌آل‌ها

در این بخش با استفاده از خانواده‌های اشتراکی ماکسیمال، یک کران پایین برای عدد استقلال گراف‌های پوچ وابسته به ایده‌آل‌ها به‌دست می‌آوریم. فرض کنیم $R \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$.

$$\mathcal{T}(R) = \{(0) \neq I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \lhd R \mid \forall\, 1 \leq k \leq n:\ I_k \in \{(0), R_k\}\};$$

و زیرگراف القایی $\mathbb{AG}_N(R)$ روی $\mathcal{T}(R)$ را با نماد $G_{\mathcal{T}}(R)$ نمایش می‌دهیم.

گزارهٔ ۹. *اگر* $R \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$ *یک حلقه باشد، آن‌گاه* $\alpha\big(G_{\mathcal{T}}(R)\big) = 2^{n-1}$.

اثبات: برای هر ایده‌آل $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$، قرار می‌دهیم:

$$\Delta_I = \{k \mid 1 \leq k \leq n \text{ و } I_k = R_k\};$$

در این صورت دو راس متمایز I و J در $G_{\mathcal{T}}(R)$ مجاور نیستند اگر و تنها اگر $\Delta_I \cap \Delta_J \neq \varnothing$. بنابراین تناظری یک به یک بین مجموعه‌های مستقل $G_{\mathcal{T}}(R)$ و خانواده‌های زیرمجموعه‌های اشتراکی دو به دو مجزا از مجموعه $[n] = \{1,2,\dots,n\}$ وجود دارد. پس، طبق [۱۰، لم ۲,۱]، اثبات کامل است. ■

با استفاده از [۴، قضیه ۸,۷]، بلافاصله نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجهٔ ۱۰. *اگر R یک حلقه آرتینی با n ایده‌آل ماکسیمال باشد، آن‌گاه* $\alpha(\mathbb{AG}_N(R)) \geq 2^{n-1}$؛ به علاوه، هم‌ارزی برقرار است اگر و تنها اگر R کاهشی باشد.

لم ۱۱ [۹، گزارهٔ ۱,۵]. *فرض کنیم R یک حلقه و $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$ یک مجموعه متناهی از ایده‌آل‌های اول مینیمال متمایز R باشد. اگر $S = R \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$، آن‌گاه* $R_S \cong R_{\mathfrak{p}_1} \times \cdots \times R_{\mathfrak{p}_n}$.

گزارهٔ ۱۲. *اگر $|Min(R)| \geq n$، آن‌گاه* $\alpha(\mathbb{AG}_N(R)) \geq 2^{n-1}$.

اثبات: فرض کنیم $\{\mathfrak{p}_1, \dots ,\mathfrak{p}_n\}$ یک زیرمجموعه از $Min(R)$ و $S = R \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$. طبق لم ۱۱، یکریختی حلقه‌ای $R_S \cong R_{\mathfrak{p}_1} \times \cdots \times R_{\mathfrak{p}_n}$ وجود دارد. از طرف دیگر، اگر I_S و J_S دو راس نامجاور از $\mathbb{AG}_N(R_S)$ باشند، آن‌گاه کار سختی نیست که نشان دهیم I و J نیز دو راس نامجاور از $\mathbb{AG}_N(R_S)$ هستند. بنابراین $\alpha(\mathbb{AG}_N(R)) \geq \alpha(\mathbb{AG}_N(R_S))$ و لذا از گزاره ۹ نتیجه می‌گیریم $\alpha(\mathbb{AG}_N(R)) \geq 2^{n-1}$. ■

از گزاره قبل، فوراً نتیجه زیر حاصل می‌شود که نشان می‌دهد متناهی بودن $\alpha(\mathbb{AG}_N(R))$ نتیجه می‌دهد تعداد ایده‌آل‌های اول مینیمال R نیز متناهی است.

نتیجهٔ ۱۳. *اگر R دارای تعداد نامتناهی ایده‌آل اول مینیمال باشد، آن‌گاه عدد استقلال $\mathbb{AG}_N(R)$ نامتناهی است.*

قضیهٔ ۱۴. *برای هر حلقه کاهشی نوتری R داریم* $\alpha(\mathbb{AG}_N(R)) = 2^{|Min(R)|-1}$.

اثبات: فرض کنیم $\mathrm{M}in(R) = \{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2, \dots ,\mathfrak{p}_n\}$ و $S = R \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \mathfrak{p}_k$. در این صورت از لم ۱۱ نتیجه می‌گیریم $R_S \cong R_{\mathfrak{p}_1} \times \cdots \times R_{\mathfrak{p}_n}$. از سوی دیگر بنا بر [۹، گزاره ۱،۱]، هر $R_{\mathfrak{p}_i}$ یک میدان است. بنابراین طبق نتیجه ۱۰ داریم $\alpha\left(\mathbb{AG}_N(R)\right) \geq \alpha\left(\mathbb{AG}_N(R_S)\right) = 2^{n-1}$. برای اتمام اثبات کافی است نشان دهیم $\alpha(\mathbb{AG}_N(R)) \leq \alpha(\mathbb{AG}_N(R_S))$. به این منظور، فرض کنیم $I(x_1,x_2, \dots ,x_r)$ و $J = (y_1,y_2, \dots ,y_s)$ دو راس نامجاور از گراف $\mathbb{AG}_N(R)$ باشند. با استفاده از [۷، گزاره ۲،۴]، نتیجه می‌گیریم S فاقد مقسوم علیه صفر است و بنابراین I_S و J_S دو ایده‌آل نابدیهی از R_S هستند. نشان می‌دهیم I_S و J_S دو راس نامجاور از $\mathbb{AG}_N(R_S)$ هستند. به خلاف فرض کنیم $I_S J_S \subseteq \mathrm{N}il(R)_S = (0)$. در این صورت برای هر $1 \leq i \leq r$ و $1 \leq j \leq s$، $s_{ij} \in S$ وجود دارد به طوری که $s_{ij} x_i y_j = 0$. قرار می‌دهیم $t = \prod_{i,j} s_{ij}$، در این صورت داریم $tIJ = (0)$. چون t مقسوم علیه صفر نیست، نتیجه می‌گیریم $IJ = (0)$، که این یک تناقض است. بنابراین همان‌طور که خواسته شده بود، داریم $\alpha(\mathbb{AG}_N(R)) \leq \alpha(\mathbb{AG}_N(R_S))$. ■

سرانجام به عنوان یک کاربرد از گراف پوچ وابسته به ایده‌آل‌ها در نظریه حلقه‌ها، نتیجه زیر را بیان می‌کنیم که نشان می‌دهد تعداد ایده‌آل‌های اول مینیمال یک حلقه کاهشی نوتری برابر با تعداد ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه کسرهای R است.

نتیجهٔ ۱۵. *فرض کنیم R یک حلقه کاهشی نوتری باشد. در این صورت:*

$$|\mathrm{M}in(R)| = \left|\mathrm{M}ax\left(T(R)\right)\right| = \log_2\left(\alpha\left(\mathbb{AG}_N(R)\right)\right).$$

اثبات: قرار می‌دهیم $Min(R) = \{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2, \dots ,\mathfrak{p}_n\}$ و $S = R \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{M}in(R)} \mathfrak{p}$. با استفاده از لم ۱۱ داریم $T(R) \cong$

$R_{\mathfrak{p}_1} \times \cdots \times R_{\mathfrak{p}_n}$. چون هر $R_{\mathfrak{p}_i}$ یک میدان است، بنا بر نتیجه ۱۰ و قضیه ۱۴ داریم:

$$2^{|\mathrm{M}in(R)|-1} = 2^{|\mathrm{M}ax(T(R))|-1} = \alpha\big(\mathbb{AG}_N(R)\big).$$

در نتیجه اثبات تمام است. ■

۴. گونای گراف پوچ وابسته به ایده‌آل‌ها

در [۳، نتیجه ۲,۱۱]، ثابت شده که برای اعداد صحیح $q > 0$ و $g \geq 0$، تعداد متناهی حلقه آرتینی وجود دارد که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

(۱) $\gamma\big(\mathbb{AG}(R)\big) = g$،

(۲) برای هر ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ از R، $|\frac{R}{\mathfrak{m}}| \leq q$.

این بخش را با نتیجه‌ای مشابه برای گراف پوچ وابسته به ایده‌آل‌ها آغاز می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۶. *فرض کنیم* g و $q > 0$ دو عدد صحیح نامنفی باشند. در این صورت تعدادی متناهی حلقه آرتینی R وجود دارد به طوری که $\gamma(\mathbb{AG}_N(R)) = g$ و برای هر ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ از R، $|\frac{R}{\mathfrak{m}}| \leq q$.

اثبات: فرض کنیم R یک حلقه آرتینی باشد. در این صورت [۴، قضیه ۸,۷] نتیجه می‌دهد $R \cong R_1 \times \cdots \times R_n$، که n یک عدد صحیح مثبت و هر R_i یک حلقه موضعی آرتینی است. ادعا می‌کنیم برای هر i، $|R_i| \leq q^{\mathbb{I}(R_i)}$. چون $\gamma(\mathbb{AG}_N(R)) < \infty$، نتیجه می‌گیریم برای هر i، $\gamma(\mathbb{AG}_N(R_i)) < \infty$. بنابراین طبق تذکر ۳ و فرمول گونای گراف‌های کامل، هر R_i، دارای تعداد متناهی ایده‌آل است. بنابراین طبق فرض و [۳، لم ۲,۹]، داریم:

$$|R_i| \leq |\frac{R_i}{\mathfrak{m}_i}|^{\mathbb{I}(R_i)} \leq q^{\mathbb{I}(R_i)}.$$

پس ادعا ثابت شد. برای اتمام اثبات، کافی است نشان دهیم $|R|$ با یک عدد ثابت که فقط وابسته به g و q است، کران‌دار می‌شود. بدون کاستن از کلیت، برای هر $i \geq 2$ فرض کنیم $|R_i| \leq |R_1|$. طبق فرمول گونای گراف کامل داریم:

$$\frac{\mathbb{I}(R_1)-5}{12} \leq \gamma(\mathbb{AG}_N(R_1)) \leq g.$$

بنابراین $|\mathbb{I}(R_1)| \leq 12g+5$ و لذا داریم:

$$|R| \leq |R_1|^n \leq (q^{\mathbb{I}(R_1)})^n \leq q^{n(12g+5)}.$$

در نتیجه اثبات تمام است. ■

فرض کنیم $\{R_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ یک خانواده نامتناهی از حلقه‌های آرتینی باشد، که هر R_i ضرب مستقیم ۴ میدان است. در این صورت واضح است که برای هر i داریم $\gamma(\mathbb{AG}_N(R_i))=1$. بنابراین برای هر ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ از R، شرط $|\frac{R}{\mathfrak{m}}| \leq$ q در قضیه قبل ضروری است.

فرض کنیم R یک حلقه نوتری باشد. در این صورت ممکن است این سوال پیش بیاید که آیا از $\gamma(\mathbb{AG}_N(R))<\infty$، می‌توان نتیجه گرفت که R یک حلقه آرتینی است؟ پاسخ این سوال منفی است. برای مشاهده دلیل این پاسخ، فرض کنیم $R\cong S\times D$، که S حلقه‌ای با حداکثر یک ایده‌آل نابدیهی است و D یک دامنه صحیح نوتری است که میدان نیست. در این صورت به سادگی می‌توان بررسی کرد که $\mathbb{AG}_N(R)$ یک گراف مسطح است و R یک حلقه نوتری می‌باشد که آرتینی نیست.

قبل از اثبات لم بعد به یک نمادگذاری نیاز داریم. فرض کنیم G یک گراف و V' مجموعه‌ی رئوسی از G باشد که درجه آن‌ها برابر با ۱ است. برای زیرگراف $G\backslash V'$ از نماد $\tilde{G}$ استفاده می‌کنیم و آن را *تقلیل* G می‌نامیم.

لم ۱۷. *$\gamma(G)=\gamma(\tilde{G})$، که $\tilde{G}$ تقلیل گراف G می‌باشد.*

تذکر ۱۸. می دانیم که اگر G یک گراف همبند از گونای g، با n راس، m یال و f وجه باشد، آن‌گاه

$$n-m+f=2-2g.$$

در ادامه، همه‌ی حلقه‌های آرتینی که گراف پوچ آن‌ها دارای گونای حداکثر یک می‌باشد، رده‌بندی شده‌اند.

قضیهٔ ۱۹. *فرض کنیم R یک حلقه آرتینی باشد. اگر $\gamma(\mathbb{AG}_N(R))<2$، آن‌گاه $|Max(R)|\leq 4$ و به علاوه گزاره‌های زیر نیز برقرار هستند:*

(۱) اگر $|Max(R)| = 4$، آن‌گاه $\gamma\big(\mathbb{AG}_N(R)\big) < 2$ اگر و تنها اگر R یکریخت با حاصل ضربی از ۴ میدان باشد.

(۲) اگر $|Max(R)| = 3$، آن‌گاه $\gamma\big(\mathbb{AG}_N(R)\big) < 2$ اگر و تنها اگر $R \cong F_1 \times F_2 \times R_3$، که F_1 و F_2 میدان هستند و R_3 یک حلقه موضعی آرتینی با حداکثر دو ایده‌آل غیر بدیهی است.

(۳) اگر $|Max(R)| = 2$، آن‌گاه $\gamma\big(\mathbb{AG}_N(R)\big) < 2$ اگر و تنها اگر $R \cong F_1 \times R_2$، که F_1 یک میدان و R_2 یک حلقه موضعی آرتینی با حداکثر سه ایده‌آل غیر بدیهی است یا $R \cong R_1 \times R_2$، که هر R_i ($i = 1,2$)، یک حلقه موضعی آرتینی با حداکثر یک ایده‌آل نابدیهی است.

(۴) اگر R موضعی باشد، آن‌گاه $\gamma(\mathbb{AG}_N(R)) < 2$ اگر و تنها اگر R حداکثر دارای ۷ ایده‌آل نابدیهی باشد.

اثبات: فرض کنیم $\gamma(\mathbb{AG}_N(R)) < 2$. ابتدا نشان می‌دهیم $|\mathrm{M}ax(R)| \leq 4$. به خلاف فرض می‌کنیم $|\mathrm{M}ax(R)| \geq 5$. در این صورت طبق [۴، قضیه ۸,۷] داریم $R \cong R_1 \times \cdots \times R_5$، که هر R_i یک حلقه آرتینی است. فرض کنیم

$$I_1 = R_1 \times (0) \times (0) \times (0) \times (0);\quad I_2 = (0) \times R_2 \times (0) \times (0) \times (0);$$

$$I_3 = R_1 \times R_2 \times (0) \times (0) \times (0);\quad J_1 = (0) \times (0) \times R_3 \times (0) \times (0);$$

$$J_2 = (0) \times (0) \times (0) \times R_4 \times (0);\quad J_3 = (0) \times (0) \times (0) \times (0) \times R_5;$$

$$J_4 = (0) \times (0) \times R_3 \times R_4 \times (0);\quad J_5 = (0) \times (0) \times (0) \times R_4 \times R_5;$$

$$J_6 = (0) \times (0) \times R_3 \times (0) \times R_5;\quad J_7 = (0) \times (0) \times R_3 \times R_4 \times R_5.$$

در این صورت برای هر $1 \leq i \leq 3$ و $1 \leq j \leq 7$، I_i و J_j با هم مجاور هستند و لذا $K_{3,7}$ یک زیرگراف از $\mathbb{AG}_N(R)$ است. بنابراین طبق فرمول گونای گراف دوبخشی کامل داریم $\gamma(\mathbb{AG}_N(R)) \geq \gamma(K_{3,7}) \geq 2$ که یک تناقض است.

(۱) فرض کنیم $|\mathrm{M}ax(R)| = 4$ و $\gamma(\mathbb{AG}_N(R)) < 2$. طبق [۴، قضیه ۸,۷] داریم $R \cong R_1 \times \cdots \times R_5$، که هر R_i یک حلقه موضعی آرتینی است. نشان می‌دهیم هر R_i یک میدان است. فرض کنیم این چنین نباشد و بدون کاستن از کلیت، R_4 شامل یک ایده‌آل نابدیهی مانند $\mathfrak{a}$ باشد. قرار می‌دهیم

$$I_1 = R_1 \times (0) \times (0) \times (0);\ I_2 = (0) \times R_2 \times (0) \times (0);\ I_3 = R_1 \times R_2 \times (0) \times (0);$$

$$I_4 = R_1 \times R_2 \times (0) \times \mathfrak{a};\ J_1 = (0) \times (0) \times R_3 \times (0);\ J_2 = (0) \times (0) \times (0) \times R_4;$$

$$J_3 = (0) \times (0) \times (0) \times \mathfrak{a};\ J_4 = (0) \times (0) \times R_3 \times R_4;\ J_5 = (0) \times (0) \times R_3 \times \mathfrak{a}.$$

واضح است که هر I_i، $1 \leq i \leq 4$، مجاور با J_j، $1 \leq j \leq 5$، است و لذا $K_{4,5}$ یک زیرگراف از $\mathbb{AG}_N(R)$ می‌باشد. بنابراین طبق فرمول گونای گراف دوبخشی کامل داریم $\gamma(\mathbb{AG}_N(R)) \geq \gamma(K_{4,5}) \geq 2$ که یک تناقض است. برعکس، فرض کنیم $R \cong F_1 \times F_2 \times F_3 \times F_4$، که هر F_i یک میدان است. نشان می‌دهیم $\gamma(\mathbb{AG}_N(R)) = 1$. طبق لم ۱۷ کافی است ثابت کنیم $\gamma(\widetilde{\mathbb{AG}_N(R)}) = 1$. می‌دانیم $\widetilde{\mathbb{AG}_N(R)}$ دارای ۴ راس از درجه ۶ و ۶ راس از درجه ۳ می‌باشد. پس $\widetilde{\mathbb{AG}_N(R)}$ دارای $n = 10$ راس و $m = 21$ یال است. همچنین بررسی این‌که $\widetilde{\mathbb{AG}_N(R)}$ دارای $f = 11$ وجه می‌باشد، کار سختی نیست. اکنون تذکر ۱۸ نتیجه می‌دهد $\gamma(\widetilde{\mathbb{AG}_N(R)}) = 1$.

(۲) فرض کنیم $\gamma(\mathbb{AG}_N(R)) < 2$ و $R \cong R_1 \times R_2 \times R_3$، که هر R_i یک حلقه موضعی آرتینی است. نشان می‌دهیم حداقل دوتا از سه حلقه‌ی R_1، R_2 و R_3 میدان هستند. فرض کنیم این چنین نباشد و بدون کاستن از کلیت، $\mathfrak{b}$ و $\mathfrak{c}$ به ترتیب ایده‌آل‌هایی نابدیهی از R_2 و R_3 باشند. قرار می‌دهیم

$$I_1 = R_1 \times (0) \times (0);\ I_2 = (0) \times R_2 \times (0);\ I_3 = R_1 \times R_2 \times (0);\ I_4 = R_1 \times \mathfrak{b} \times (0);$$

$$J_1 = (0) \times \mathfrak{b} \times (0);\ J_2 = (0) \times (0) \times \mathfrak{c};\ J_3 = (0) \times \mathfrak{b} \times \mathfrak{c};$$

$$J_4 = (0) \times (0) \times R_3;\ J_5 = (0) \times \mathfrak{b} \times R_3.$$

واضح است که هر I_i، $1 \leq i \leq 4$، مجاور با J_j، $1 \leq j \leq 5$، است و لذا $K_{4,5}$ یک زیرگراف از $\mathbb{AG}_N(R)$ می‌باشد. بنابراین طبق فرمول گونای گراف دوبخشی کامل داریم $\gamma(\mathbb{AG}_N(R)) \geq \gamma(K_{4,5}) \geq 2$ که یک تناقض است. بنابراین بدون کاستن از کلیت، می‌توانیم فرض کنیم $R \cong F_1 \times F_2 \times R_3$، که F_1 و F_2 میدان هستند و R_3 یک حلقه موضعی آرتینی است. اکنون ثابت می‌کنیم R_3 حداکثر دو ایده‌آل نابدیهی دارد. به خلاف فرض کنیم $\mathfrak{a}$، $\mathfrak{b}$ و $\mathfrak{c}$ سه ایده‌آل نابدیهی متمایز از R_3 باشند. فرض کنیم

$$I_1 = (0) \times (0) \times R_3;\ I_2 = (0) \times (0) \times \mathfrak{a};\ I_3 = (0) \times (0) \times \mathfrak{b};\ I_4 = (0) \times (0) \times \mathfrak{c};$$

$$J_1 = F_1 \times (0) \times (0);\ J_2 = (0) \times F_2 \times (0);\ J_3 = F_1 \times F_2 \times (0);$$

$$J_4 = F_1 \times F_2 \times \mathfrak{a};\ J_5 = F_1 \times F_2 \times \mathfrak{b};\ J_6 = F_1 \times F_2 \times \mathfrak{c}.$$

واضح است که هر I_i، $1 \leq i \leq 4$، مجاور با J_j، $1 \leq j \leq 6$، است و لذا $K_{4,6}$ یک زیرگراف از $\mathbb{AG}_N(R)$ می‌باشد. بنابراین طبق فرمول گونای گراف دوبخشی کامل داریم $\gamma(\mathbb{AG}_N(R)) \geq \gamma(K_{4,6}) \geq 2$ که یک تناقض است. برعکس، فرض کنیم $R \cong F_1 \times F_2 \times R_3$، که F_1 و F_2 میدان هستند و R_3 حلقه‌ای با دو ایده‌آل نابدیهی $\mathfrak{c}$ و $\mathfrak{c}'$ است. قرار می‌دهیم

$$I_1 = (0) \times (0) \times R_3;\ I_2 = (0) \times (0) \times \mathfrak{c};\ I_3 = (0) \times (0) \times \mathfrak{c}';$$

$$J_1 = F_1 \times (0) \times (0);\ J_2 = (0) \times F_2 \times (0);\ J_3 = F_1 \times F_2 \times (0).$$

در این صورت برای هر $1 \leq i,j \leq 3$ داریم $I_iJ_j = (0)$. بنابراین $\gamma(\mathbb{AG}_N(R)) \geq \gamma(K_{3,3}) \geq 1$. ضمناً در این حالت، $\mathbb{AG}_N(R)$ یک زیرگراف از $\mathbb{AG}_N(F_1 \times F_2 \times F_3 \times F_4)$ (که در آن هر F_i یک میدان می‌باشد) است. بنابراین طبق قسمت (۱)، $\gamma(\mathbb{AG}_N(R)) = 1$. اگر R_3 حداکثر یک ایده‌آل نابدیهی داشته باشد، آن‌گاه بررسی این‌که $\mathbb{AG}_N(R)$ یک گراف مسطح است کار سختی نیست. این اثبات را تمام می‌کند.

(۳) فرض کنیم $\gamma(\mathbb{AG}_N(R)) < 2$ و $R \cong R_1 \times R_2$، که R_1 و R_2 دو حلقه آرتینی هستند. حکم را در دو حالت زیر نشان می‌دهیم:

حالت اول: $R \cong F_1 \times R_2$، که F_1 یک میدان و R_2 یک حلقه موضعی آرتینی است. در این حالت نشان می‌دهیم R_2 حداکثر سه ایده‌آل نابدیهی دارد. به خلاف فرض کنیم، R_2 حداقل دارای چهار ایده‌آل نابدیهی باشد. در این صورت برای هر ایده‌آل $I_2 \neq R_2$ و J_2 از R_2، رئوس $F_1 \times I_2$ و $J_2 \times (0)$ مجاور هستند و لذا $K_{4,5}$ یک زیرگراف از $\mathbb{AG}_N(R)$ می‌باشد. بنابراین طبق فرمول گونای گراف دوبخشی کامل داریم $\gamma(\mathbb{AG}_N(R)) \geq \gamma(K_{4,5}) \geq 2$ که یک تناقض است.

حالت دوم: هیچ کدام از R_1 و R_2 میدان نباشند. ثابت می‌کنیم هر R_i حداقل دارای یک ایده‌آل نابدیهی می‌باشد. به خلاف و بدون کاستن از کلیت مساله فر ض کنیم R_2 دارای حداقل دو ایده‌آل نابدیهی متمایز باشد. در این صورت هر ایده‌آل به شکل $R_1 \times J$ با هر ایده‌آل به شکل $I \times K$ مجاور است، که I و J به ترتیب ایده‌آل‌های سره‌ای از R_1 و R_2 هستند و K یک ایده‌آل دلخواه از R_2 است. بنابراین $\gamma\left(\mathbb{AG}_N(R)\right) \geq \gamma\left(K_{3,7}\right) \geq 2$، که این یک تناقض است. برعکس، اگر $R \cong F_1 \times R_2$، که F_1 یک میدان و R_2 یک حلقه موضعی آرتینی است با $n \leq 3$ ایده‌آل نابدیهی است. در این صورت به آسانی می‌توان نشان داد

$$\gamma\big(\mathbb{AG}_N(R)\big) = \begin{cases} 1; & n = 2,3 \\ 0; & n = 1. \end{cases}$$

اکنون فرض کنیم $R \cong R_1 \times R_2$، که R_1 و R_2 حلقه‌های موضعی آرتینی با یک ایده‌آل نابدیهی هستند. در این صورت کار سختی نیست که نشان دهیم $\gamma(\mathbb{AG}_N(R)) = 1$. این مطلب، اثبات این قسمت را تمام می‌کند.

(۴) این قسمت از فرمول گونای گراف کامل و تذکر ۳ نتیجه می‌شود. ■

از اثبات قضیه‌ی قبل، فوراً نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجهٔ ۲۰. *فرض کنیم R یک حلقهٔ آرتینی باشد. در این صورت $\mathbb{AG}_N(R)$ گرافی مسطح است اگر و تنها اگر $|Max(R)| \leq 3$ و R در یکی از شرایط زیر صدق می‌کند:*

(۱) R یکریخت با ضرب مستقیم سه میدان است.

(۲) $R \cong F_1 \times R_2$، که F_1 یک میدان و R_2 یک حلقه موضعی آرتینی با حداکثر یک ایده‌آل نابدیهی است.

(۳) R یک حلقه موضعی با حداکثر چهار ایده‌آل نابدیهی است.

این مقاله را با مثال زیر به اتمام می‌رسانیم.

مثال ۲۱. (۱) فرض کنیم $R \cong \frac{\mathbb{Z}_6[x]}{(x^m)}$، که $m \geq 2$. قرار می‌دهیم $I_1 = (3)$، $I_2 = (3x)$، $I_3 = (3x+3)$، $J_1 = (2)$، $J_2 = (4)$، $J_3 = (2x)$، $J_4 = (4x)$، $J_5 = (2x+2)$، $J_6 = (4x+2)$ و $J_7 = (2x+4)$. در این صورت می‌توان بررسی کرد که این ایده‌آل‌ها، رئوس متمایزی از $\mathbb{AG}_N(R)$ هستند. همچنین هر I_i ($1 \leq i \leq 3$)، مجاور با هر J_k ($1 \leq k \leq 7$) است. پس $K_{3,7}$ یک زیرگراف از $\mathbb{AG}_N(R)$ است و بنابراین فرمول گونای گراف کامل نتیجه می‌دهد $\gamma(\mathbb{AG}_N(R)) \geq 2$.

(۲) فرض کنیم $R \cong \frac{\mathbb{Z}_4[x]}{(x^3)}$. قرار می‌دهیم $I_1 = (2x)$، $I_2 = (2x^2)$، $I_3 = (2x+2x^2)$، $J_1 = (2)$، $J_2 = (2+x^2)$، $J_3 = (2+2x^2)$، $J_4 = (2-x^2)$، $J_5 = (2+2x)$، $J_6 = (2+2x+x^2)$ و $J_7 = (2+2x+2x^2)$. مشابه با (۱)، می‌توان نشان داد هر I_i با هر J_k مجاور است و لذا $\gamma(\mathbb{AG}_N(R)) \geq 2$.

References

1. Aalipour G., Akbari S., Nikandish R., Nikmehr M. J., Shaveisi F., "On the coloring of the annihilating-ideal graph of a commutative ring", Discrete. Math., 312 (2012) 2620–2626.

2. Aalipour G., Akbari S., Behboodi M., Nikandish R., Nikmehr M. J., Shaveisi F., "The classification of the annihilating-ideal graph of a commutative ring", Algebra Colloq., 21 (2) (2014) 249–256.

3. Aliniaeifard F., Behboodi M., "Rings whose annihilating-ideal graphs have positive genus", J. Algebra Appl., 41 (2013) 3629–3634.

4. Atiyah M. F., Macdonald I. G., "Introduction to commutative algebra", Addison-Wesley Publishing Company, (1969).

5. Behboodi M., Rakeei Z., "The annihilating ideal graph of commutative rings I", J. Algebra Appl., 10 (2011) 727–739.

6. Behboodi M., Rakeei Z., "The annihilating ideal graph of commutative rings II", J. Algebra Appl., 10 (2011) 741–753.

7. Huckaba J. A., "Commutative rings with zero divisors", Marcel Dekker Inc., New York (1988).

8. Kiani S., Maimani H. R., Nikandish R., "Some results on the domination number of a zero-divisor graph", Canad. Math. Bull., 57 (3) (2014) 573-578.

9. Matlis E., "The minimal prime spectrum of a reduced ring", Illinois J. Math., 27 (3) (1983) 353-391.

10. Meyerowitz A., "Maximali intersecting families", Europ. J. Combinatorics, 16 (1995) 491–501.

11. Sharp R. Y., "Steps in commutative algebra", Cambridge University Press, (1990).

12. Shaveisi F., Nikandish R., "The nil-graph of ideals of a commutative ring", Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 39 (2016) 3–11.

13. West D. B., "Introduction to graph theory", 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, (2001).