Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Existence of multiple solutions for Sturm-Liouville boundary value problems

Hadi Haghshenas[1]✉, Ghasem Alizadeh Afrouzi[2]

1. Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Mazandaran, Babolsar, Iran.

✉E-mail: haghshenas60@gmail.com

2. Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Mazandaran, Babolsar, Iran.

E-mail: afrouzi@umz.ac.ir

Article Info **ABSTRACT**

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
7 April 2020
Received in revised form:
19 October 2020
Accepted:
20 October 2020
Published online:
31 December 2022

Keywords:
Sturm-Liouville boundary value problems,
Variational methods,
Critical point theory,
infinitely many solutions.

Introduction

In this article, we consider the following fourth-order boundary value problem

$$\begin{cases}(p(t)u''(t))'' - \big(q(t)u'(t)\big)' + r(t)u(t) = \lambda f\big(t,u(t)\big), & (t \in [0,1]),\\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0, & (P)\end{cases}$$

Where $\lambda \in\,]0,+\infty[$, $p, q, r \in L^{\infty}([0,1])$ and $f: [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continuous. Fourth-order ordinary differential equations act as models for the bending or deforming of elastic beams, and, therefore, they have important applications in mechanical engineering, control systems, economics and computer sciences. Boundary value problems for fourth-order ordinary differential equations have been of great concern in recent years. Many researchers have investigated into beam equations under various boundary conditions and through different approaches, we refer the reader to [1, 2, 4, 5] for an overview on this subject. For example, in [2] the authors based on variational methods and critical point theory discussed the existence of at least three solutions for the problem (P).

Material and methods

In this research, based on variational methods and critical point theory, we guarantee the existence of infinitely many classical solutions for a two-point boundary value problem with fourth-order Sturm-Liouville equation; Some recent results are improved and by presenting one example, we ensure the applicability of our results.

Conclusion

In this work, we give some new criteria to guarantee the infinitely many solutions for the problem (p), and, therefore, the three solutions results obtained in [2] are improved. The proof of the main result is based on the critical point theory applied in [8].

How to cite: Haghshenas, H., Alizadeh Afrouzi, G. (2022). Existence of multiple solutions for Sturm-Liouville boundary value problems. *Mathematical Researches*, 8 (4), 63-73.

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

وجود جواب‌های چندگانه مسائل مقدار مرزی اشتورم-لیوویل

هادی حق‌شناس ✉[1] ، **قاسم علیزاده افروزی** [2]

۱. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی محض، دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، ساری، ایران. رایانامه: haghshenas60@gmail.com
۲. گروه ریاضی محض، دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، ساری، ایران. رایانامه: afrouzi@umz.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۱/۱۹
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۷/۲۸
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۷/۲۹
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۱۰/۱۰

چکیده

در این مقاله، بر اساس روش‌های تغییراتی و نظریه نقطه بحرانی، وجود بی‌نهایت جواب کلاسیک را برای یک مسأله مقدار مرزی دو نقطه‌ای با معادله اشتورم-لیوویل مرتبهٔ چهارم تضمین می‌کنیم؛ یافته‌های مقالات اخیر را بهبود بخشیده و مثالی جهت تأیید نتایج اصلی به دست آمده ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی:
مسائل مقدار مرزی
اشتورم-لیوویل،
روش‌های تغییراتی،
نظریهٔ نقطهٔ بحرانی،
بی‌نهایت جواب.

استناد: حق‌شناس، هادی؛ علیزاده افروزی، قاسم؛ (۱۴۰۱). وجود جواب‌های چندگانه مسائل مقدار مرزی اشتورم-لیوویل. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۴)، ۷۳-۶۳.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

مقدمه

در این مقاله، در جستجوی شرایطی هستیم که وجود بی‌نهایت جواب کلاسیک مسأله مقدار مرزی زیر را تضمین نمایند:

$$\begin{cases}(p(t)u''(t))''-\big(q(t)u'(t)\big)'+r(t)u(t)=\lambda f\big(t,u(t)\big), & (t\in[0,1]),\\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0, & (P)\end{cases}$$

که در آن $\lambda\in]0,+\infty[$ ، $p,q,r\in L^{\infty}([0,1])$ و $f:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته است.

مسائل مقدار مرزی با معادلات دیفرانسیل معمولی نقشی اساسی در مسائل نظری و کاربردی ایفا می‌کنند. اثبات وجود و چندگانگی جواب‌های مسائل دیفرانسیل غیرخطی بسیار مهم بوده و نتایج به دست آمده در مدل‌بندی ریاضی مسائل مهم فیزیک، شیمی، مهندسی مکانیک، اقتصاد و علوم کامپیوتر به کار می‌روند. به ویژه، مسائل مقدار مرزی مرتبهٔ چهارم در توصیف مسائل آشفته پرتو کشسان کاربرد فراوان داشته و از این‌رو، این مسائل به گونه‌ای وسیع در سال‌های اخیر توسط نویسندگان مورد کنکاش قرار گرفته‌اند (به عنوان مثال، می‌توانید به مقالات [۱]، [۲]، [۴]، [۵] و منابع اشاره شده در آنها مراجعه بفرمایید).

اشاره می‌شود که حالت سه-جواب مسأله (P) در مقاله [۲] مورد بحث قرار گرفته است؛ جهت اثبات نتیجه اصلی این مقاله، از تکنیک ارائه شدهٔ مقاله [۸] الهام گرفته‌ایم که در آن، حالت بی‌نهایت جواب مسأله ضربه‌ای مرتبه دوم

$$\begin{cases}-\big(p(t)u'(t)\big)'+q(t)u'(t)+r(t)u(t)=f\big(t,u(t)\big), & t\neq t_k, \ \ a.e.\ t\in[0,1]\\ -\Delta\big(p(t_k)u'(t_k)\big)=I_k\big(u(t_k)\big), & k=1,2,\cdots,p-1,\\ u'(0^+)=u'(1^-)=0, & (P1)\end{cases}$$

مورد بررسی قرار گرفت و نتیجهٔ اصلی زیر توسط نویسندگان مقاله [۸] به دست آمد.

قضیهٔ ۱: فرض کنید شرایط زیر برقرار باشند:

(M1) $I_k(u)$ ها و $f(t,u)$ توابعی فرد در u باشند؛

(M2) اعداد ثابت $\beta>2$ و $M>0$ موجود باشند به طوری که برای هر $t\in[0,1]$ و $u\in\mathbb{R}$ با $|u|\geq M$ داشته باشیم:

$$0<\beta F(t,u)\leq uf(t,u),\qquad\qquad 0<\beta\int_0^u I_k(s)ds\leq uI_k(u);$$

(M3) $\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(t,u)}{u}=0$ به طور یکنواخت برای $t\in[0,1]$ و همچنین $\lim\limits_{u\to 0}\frac{I_k(u)}{u}=0$.

در این صورت، مسألهٔ (P1) دارای بی‌نهایت جواب کلاسیک در فضای سوبولف $W^{1,2}([0,1])$ می‌باشد.

پیش‌نیازها

ابزار اصلی ما برای یافتن نتیجهٔ اصلی، قضیهٔ نقطهٔ بحرانی زیر می‌باشد.

قضیهٔ ۲ (**[۷، قضیه ۹.۱۲]**): فضای باناخ حقیقی$(X, \|.\|)$را در نظر بگیرید؛ فرض کنید$\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ تابعکی زوج با شرط پلیس- اسمیل و $\varphi(0) = 0$ باشد. همچنین $X = V \oplus E$ که V با بعد متناهی بوده و شرایط زیر برقرار باشند:

(H1) اعداد مثبت ρ و α موجود باشند که برای هر $u \in E$ با $\|u\| = \rho$ داشته باشیم $\varphi(u) \geq \alpha$؛

$(H2)$ برای هر زیرفضای با بعد متناهی $W \subset X$، عدد مثبت $R = R(W)$ موجود باشد که برای هر $u \in W$ با $\|u\| \geq R$ داشته باشیم $\varphi(u) \leq 0$.

در این‌صورت φ دارای دنباله‌ای بی‌کران از نقاط بحرانی است.

از قضیهٔ ۲ در مقالاتی همچون [۸] و [۱۰]، به گونه موفقیت‌آمیزی، برای اثبات وجود بی‌نهایت جواب مسائل مقدار مرزی استفاده شده است.

فرض کنید:

(۱)

$$\min\left\{\frac{q^-}{\pi^2}, \frac{r^-}{\pi^4}, \frac{q^-}{\pi^2} + \frac{r^-}{\pi^4}\right\} > -p^-,$$

که در آن:

$$r^- = \operatorname{essinf}_{t\in[0,1]} r(t), q^- = \operatorname{essinf}_{t\in[0,1]} q(t), p^- = \operatorname{essinf}_{t\in[0,1]} p(t) > 0$$

قرار دهید:

$$\sigma = \min\left\{\frac{q^-}{\pi^2}, \frac{r^-}{\pi^4}, \frac{q^-}{\pi^2} + \frac{r^-}{\pi^4}, 0\right\},$$

$$\delta = \sqrt{p^- + \sigma}.$$

فرض کنید $X = W^{2,2}([0,1]) \cap W_0^{1,2}([0,1])$ فضای سوبولف مجهز به نرم معمولی $\|u\| = \|u''\|_{L^2([0,1])}$ باشد.

نامساوی‌های پوانکاره زیر را، برای هر $u \in X$، به خاطر آورید (مقالهٔ [۶، لم ۲.۳] را ببینید):

(۲)

$$\|u'\|^2_{L^2([0,1])} \leq \frac{1}{\pi^2} \|u''\|^2_{L^2([0,1])},$$

$$\|u\|^2_{L^2([0,1])} \leq \frac{1}{\pi^4} \|u''\|^2_{L^2([0,1])}. \quad (۳)$$

از (۱)، (۲) و (۳) فهمیده می‌شود که نرم معمولی روی X با نرم زیر معادل است:

$$\|u\|_X = (\int_0^1 (p(t)|u''(t)|^2 + q(t)|u'(t)|^2 + r(t)|u(t)|^2)dt)^{\frac{1}{2}},$$

و به خصوص، برای هر $u \in X$، داریم:

(۴)

$$\|u\| \leq \frac{1}{\delta}\|u\|_X.$$

در مورد نرم $\|u\|_\infty = \max(max_{t\in[0,1]}|u(t)|, max_{t\in[0,1]}|u'(t)|)$ روی فضای $C^1([0,1])$ رابطهٔ زیر را داریم که از آن برای اثبات نتیجهٔ اصلی مقاله، استفاده خواهیم کرد.

گزارهٔ ۳. فرض کنیم $C = \frac{1}{2\pi\delta}$. در این‌صورت:

(۵)

$$\|u\|_\infty \leq C\|u\|_X, \quad (u \in X).$$

اثبات: به کمک روابط (۲)، (۴) و نامساوی معروف $\|u\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|u'\|_{L^2([0,1])}$، حکم (۵) را خواهیم داشت. □

مطابق با معمول، $u \in X$ یک جواب ضعیف مسأله (P) است هرگاه برای هر $v \in X$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$\int_0^1 (p(t)u''(t)v''(t) + q(t)u'(t)v'(t) + r(t)u(t)v(t))dt = \lambda\int_0^1 f(t,u(t))v(t)dt.$$

تذکر: طبق پیوستگی f، می‌توان ثابت کرد که هر جواب ضعیف مسأله (P)، جوابی کلاسیک برای آن خواهد بود (مقاله *[2]* را مشاهده کنید).

اکنون، تابعک $\varphi: X \to \mathbb{R}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

(۶)

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\|u\|_X^2 - \lambda\int_0^1 F(t,u(t))dt, \quad (u \in X),$$

که در آن، تابع $F: [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(t,\vartheta) = \int_0^\vartheta f(t,x)dx, \qquad ((t,\vartheta) \in [0,1] \times \mathbb{R}).$$

مشاهده می‌شود که φ خوش‌تعریف و مشتق‌پذیر گاتو بوده و هر نقطهٔ بحرانی φ یک جواب ضعیف (و لذا، جوابی کلاسیک) برای مسأله (P) است.

نتایج اصلی

در این بخش، نتیجهٔ اصلی این مقاله را ارائه خواهیم کرد. قبل از آن، یادآوری می‌کنیم که تابعک $\varphi: X \to \mathbb{R}$ دارای شرط پلیس- اسمیل (P-S) است هرگاه هر دنباله مانند $\{u_n\}$ در X که $\{\varphi(u_n)\}$ کراندار بوده و $lim_{n\to\infty}\varphi'(u_n) = 0$، زیردنباله‌ای همگرا در X داشته باشد.

قضیهٔ ۴: فرض کنیم شرایط زیر برقرار باشند:

(J1) $f(t,u)$ تابعی فرد در u باشد؛

(J2) عدد ثابت $\beta > 2$ ای موجود باشد که

$$0 < \beta F(t,u) \le uf(t,u), \qquad \big((t,u) \in [0,1] \times (\mathbb{R}\backslash\{0\})\big).$$

در این‌صورت مسأله (P)، برای هر $\lambda > 0$، دارای بی‌نهایت جواب کلاسیک است.

اثبات: مطابق آن‌چه بیان شد، می‌خواهیم از قضیهٔ ۲ برای اثبات این قضیه استفاده کنیم. برای این منظور، فضای سوبولف $X = W^{2,2}([0,1]) \cap W_0^{1,2}([0,1])$ مجهز به نرم $\|.\|_X$ و تابعک φ با تعریف (۶) را روی X در نظر بگیرید. در اینصورت طبق (J1) و پیوستگی f، φ تابعی زوج و به طور پیوسته مشتق‌پذیر بوده و همچنین $\varphi(0) = 0$. در گام نخست، نشان می‌دهیم φ در شرط (P-S) صدق می‌کند. فرض کنیم $\{u_n\}$ دنباله‌ای در X باشد که $\{\varphi(u_n)\}$ کراندار بوده و $lim_{n\to\infty}\varphi'(u_n) = 0$. ابتدا نشان می‌دهیم $\{u_n\}$ دنباله‌ای کراندار در X می‌باشد:

$$\left(\frac{\beta}{2} - 1\right)\|u_n\|_X^2 = \beta\varphi(u_n) - \varphi'(u_n)(u_n) + \lambda\beta\int_0^1 F\big(t,u_n(t)\big)dt$$

$$-\lambda\int_0^1 f\big(t,u_n(t)\big)u_n(t)dt$$

$$\le \beta\varphi(u_n) - \varphi'(u_n)(u_n),$$

بنابراین، از آنجا که $\beta > 2$، دنباله $\{u_n\}$ در X کراندار می‌باشد. از آنجا که X فضایی بازتابی است، $\{u_n\}$ دارای زیردنباله‌ای (که به جهت ساده‌نویسی آن را نیز می‌توانیم با $\{u_n\}$ نمایش دهیم) همگرای ضعیف در X می‌باشد؛ لذا $u \in X$ ای وجود دارد که $u_n \rightharpoonup u$. اکنون نشان می‌دهیم که $\{u_n\}$ در X به طور قوی به u همگراست. داریم:

(۷)

$$(\varphi'(u_n) - \varphi'(u))(u_n - u) = \|u_n - u\|_X^2$$

$$-\lambda\int_0^1 \big[f\big(t,u_n(t)\big) - f\big(t,u(t)\big)\big]\big(u_n(t) - u(t)\big)dt.$$

از آنجا که $\{u_n\}$ در X به طور ضعیف به u همگراست، لذا $\{u_n\}$ در $C([0,1])$ به طور یکنواخت به u همگراست. بنابراین، زمانی که $n \to \infty$، داریم:

(۸)

$$\int_0^1 [f(t,u_n(t)) - f(t,u(t))](u_n(t) - u(t))dt \to 0,$$

$$(\varphi'(u_n) - \varphi'(u))(u_n - u) \to 0. \qquad (۹)$$

با توجه به (۷)، (۸) و (۹)، $lim_{n\to\infty}\|u_n - u\|_X = 0$ و در نتیجه φ در شرط (P-S) صدق می‌کند.

اما، با استفاده از فرض (J2)، در مقاله [۹] ثابت شده است که برای هر $t \in [0,1]$ داریم:

$$F(t,x) \le F\left(t,\frac{x}{|x|}\right)|x|^{\beta}, \qquad (0 < |x| \le 1),$$

$$F(t,x) \ge F\left(t,\frac{x}{|x|}\right)|x|^{\beta}, \qquad (|x| \ge 1).$$

بنابراین، برای هر $t \in [0,1]$ خواهیم داشت:

(۱۰)

$$F(t,x) \le M|x|^{\beta}, \qquad (0 < |x| \le 1),$$

$$F(t,x) \ge m|x|^{\beta}, \qquad (|x| \ge 1), \qquad (۱۱)$$

که در آن:

$$M = max_{t\in[0,1],|x|=1}F(t,x), \qquad m = min_{t\in[0,1],|x|=1}F(t,x).$$

مطابق با (J2)، $M > 0$ و $m > 0$. از آنجا که $F(t,x) - m|x|^{\beta}$ روی $[0,1] \times [-1,1]$ پیوسته است، عدد ثابت C_2 وجود دارد که:

(۱۲)

$$F(t,x) \ge m|x|^{\beta} - C_2, \qquad ((t,x) \in [0,1] \times [-1,1]),$$

بنابراین، طبق (۱۱) و (۱۲) خواهیم داشت:

(۱۳)

$$F(t,x) \ge m|x|^{\beta} - C_2, \qquad ((t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}).$$

اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که φ در شرط (H1) صدق می‌کند. برای هر $u \in X$، طبق گزارهٔ ۳، $\|u\|_X \leq \frac{1}{C}$ ایجاب می‌کند که $\|u\|_\infty \leq 1$؛ لذا با استفاده از (۱۰) خواهیم داشت:

(۱۴)
$$\int_0^1 F\big(t,u(t)\big)dt \leq M\int_0^1 |u(t)|^\beta dt \leq MC^\beta \|u\|_X^\beta, \qquad \left(\|u\|_X \leq \frac{1}{C}\right),$$

و با ترکیب (۶) و (۱۴) داریم:

$$\varphi(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_X^2 - \lambda MC^\beta\|u\|_X^\beta, \qquad \left(\|u\|_X \leq \frac{1}{C}\right),$$

که عبارت اخیر ایجاب می‌کند می‌توانیم $\rho > 0$ به قدر کافی کوچک و $\alpha > 0$ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که هرگاه $\|u\|_X = \rho$ آنگاه $\varphi(u) \geq \alpha$. در گام آخر، ثابت می‌کنیم که φ حائز شرط (H2) نیز می‌باشد. فرض کنیم $W \subset X$ زیرفضایی با بعد متناهی باشد. برای هر $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ و $u \in W\backslash\{0\}$، به کمک (۱۳)، داریم:

(۱۵)
$$\varphi(ru) = \frac{1}{2}\|ru\|_X^2 - \lambda\int_0^1 F\big(t,ru(t)\big)dt$$
$$\leq \frac{r^2}{2}\|u\|_X^2 - \lambda m|r|^\beta\int_0^1 |u(t)|^\beta dt + \lambda C_2.$$

با انتخاب $w \in W$ که $\|w\|_X = 1$، از آنجا که $\beta > 2$، رابطهٔ (۱۵) ایجاب می‌کند که $r_0 > 0$ ای وجود دارد که برای هر $r \geq r_0$ داریم $\|rw\|_X > r_0$ و $\varphi(rw) \leq 0$. از آن‌جا که W زیرفضایی با بعد متناهی است، $R(W) > 0$ ای وجود دارد که برای هر $u \in W$ با $\|u\|_X \geq R(W)$ داریم $\varphi(u) \leq 0$. بنابراین، طبق قضیهٔ ۲، تابعک φ دارای دنباله‌ای بی‌کران از نقاط بحرانی در X است که هر کدام از آنها یک جواب کلاسیک برای مسأله (P) می‌باشد. □

در حالتی که تابع پیوسته f وابسته به منغیر t نباشد، نتیجه ساده زیر را به واسطه قضیهٔ ۴ خواهیم داشت.

قضیهٔ ۵. فرض کنیم شرایط زیر برقرار باشند:

(K1) $f(u)$ تابعی فرد در u باشد؛

(K2) عدد ثابت $\beta > 2$ ای موجود باشد که

$$0 < \beta F(u) \leq uf(u), \qquad (u \in \mathbb{R}\backslash\{0\}).$$

در این‌صورت، برای هر $\lambda > 0$، مسأله مقدار مرزی

$$\begin{cases}(p(t)u''(t))'' - \big(q(t)u'(t)\big)' + r(t)u(t) = \lambda f\big(u(t)\big), & (t \in [0,1]),\\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0, & (P2)\end{cases}$$

دارای بی‌نهایت جواب کلاسیک در فضای سوبولف $W^{2,2}([0,1]) \cap W_0^{1,2}([0,1])$ است.

به عنوان کاربردی از قضیهٔ ۵، مثال زیر را ارائه می‌دهیم.

مثال ۶: مسأله مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} (e^t u''(t))'' + \left(e^t u'(t)\right)' + e^t u(t) = \lambda f\left(u(t)\right), & (t \in [0,1]), \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0, & (P3) \end{cases}$$

که در آن $f(u) = u^3 + u^7$. مقایسه دو مسأله (P2) و (P3) نشان می‌دهد که $p(t) = r(t) = e^t$ و $q(t) = -e^t$؛ از این رو شرط (۱) برقرار است. همچنین برای هر $u \in \mathbb{R}$ داریم $F(u) = \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{8}u^8$. از آنجا که f تابعی فرد بوده و

$$0 < 4F(u) \leq uf(u), \qquad (u \in \mathbb{R}\backslash\{0\}),$$

لذا، طبق قضیهٔ ۵، مسأله (P3) دارای بی‌نهایت جواب کلاسیک در فضای $W^{2,2}([0,1]) \cap W_0^{1,2}([0,1])$ است.

دقت کنید که سمت چپ معادله وابسته به مسأله (P3)، فرصت مطالعه روی مسائل مرتبه چهارم با فرمی کامل را برایمان فراهم می‌سازد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، حالت بی‌نهایت جواب مسأله (P)، بر اساس تکنیک تغییراتی ارائه شده در [۸]، مورد بررسی قرار گرفته است و به این ترتیب، نتایج سه جواب مسأله (P) که در [۲] به دست آمده‌اند، بهبود داده شد.

References

1. Afrouzi G.A., Heidarkhani S., O'Regan D., "Existence of three solutions for a doubly eigenvalue fourth-order boundary value problem", Taiwan. J. Math. 15 (2011) 201-210.

2. Bonanno G., Bella B.D., "A fourth-order boundary value problem for a Sturm-Liouville type equation", Appl. Math. Comput. 217 (2010) 3640-3655.

3. Bonanno G., Bella B.D., "Infinitely many solutions for a fourth-order elastic beam equations", Nonlinear Differ. Equ. Appl. 18 (2011) 357-368.

4. Heidarkhani S., Ferrara M., Khademloo S., "Nontrivial solutions for one-dimensional fourth-order Kirchhoff-type equations", Mediterr. J. Math. 13 (2016) 217-236.

5. Heidarkhani S., Salari A., "Existence of three solutions for impulsive perturbed elastic beam fourth-order equations of Kirchhoff-type", Stud. Sci. Math. Hungarica, 54 (2017) 119-140.

6. Peletier L.A., Troy W.C., Van der Vorst R.C.A.M., "Stationary solutions of a fourth-order nonlinear diffusion equation", Differ. Equ. 31 (1995) 301-314.

7. Rabinowitz P.H., "Minimax Methods in Critical Point Theory withApplications to Differential Equations", CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Vol. 65. American Mathematical Society, Providence (1986).

8. Sun J., Chen H., "Variational method to the impulsive equation with Neumann boundary conditions", Bound. Value Probl.2009 (2009) 17 pages.

9. Sun J., Chen H.,Nieto J.J., Otero-Novoa M., "Multiplicity of solutions for perturbed second-order Hamiltonian systems with impulsive effects", Nonlinear Anal. TMA 72 (2010) 4575-4586.

10. Zhang D., Dai B., "Infinitely many solutions for a class of nonlinear impulsive differential equations with periodic boundary conditions", Comput.Math. Appl. 61 (2011) 3153-3160.