بررسی تبدیلات حافظ دایرهٔ ژئودزیکی در فضای فینسلری

سمانه سادات صابرعلی*، بهمن رضایی
دانشگاه ارومیه، دانشکدهٔ علوم، گروه ریاضی

دریافت: ۹۹/۰۲/۰۳ پذیرش: ۹۹/۰۴/۱۸

چکیده

مترهای راندرز یک رده مهم از مترهای فینسلری هستند که توسط یک متر ریمانی α و 1− فرمی β به صورت $F:=\alpha+\beta$ تعریف می شود. در این مقاله ویژگی‌های تبدیلات حافظ دایرهٔ ژئودزیکی در فضای راندرزی مطالعه شده است، همچنین اثبات می‌کنیم که یک تبدیل همدیس در یک فضای اینشتینی ضعیف یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیکی است. در ادامه نشان می‌دهیم که نتیجهٔ مشابهی برای مترهای راندرز با انحنای پرچمی ایزوتروپیک ضعیف و با انحنای بروالد ایزوتروپیک ضعیف برقرار است.

واژه‌های کلیدی: تبدیل حافظ دایرهٔ ژئودزیکی، متر فینسلر، انحنای پرچمی ایزوتروپیک، انحنای بروالد میانگین

مقدمه

در یک فضای اقلیدسی یک دایرهٔ ژئودزیکی یک خط راست یا یک دایره با شعاع مثبت متناهی است و این مفهوم با استفاده از التصاق لوی چویتا به هندسهٔ ریمانی توسیع داده می‌شود. در هندسهٔ ریمان یک تبدیل حافظ دایرهٔ ژئودزیکی تبدیلی است که دایره‌های ژئودزیکی را حفظ می‌کند. وگل[1] در هندسه ریمان اثبات کرد که هر دیفئومرفیسم حافظ دایره، همدیس است. منیفلدهای نیمه ریمانی (M,g) را در نظر گرفته، یک دیفئومورفیسم همدیس $f:(M,g)\to(\bar{M},\bar{g})$ به این معنی است که $f^*\bar{g}$ یک مضرب اسکالر مثبتی از g است. اگر این مضرب اسکالر ثابت باشد آن‌گاه f متجانس است [۶]. در سال ۱۹۴۰یانو تبدیلات حافظ دایرهٔ ژئودزیکی منیفلدهای ریمانی را معرفی کرد و نظریه هندسه تبدیلات حافظ دایرهٔ ژئودزیکی در یک سری از مقالات توسط یانو توسعه داده شد [۱]. یک دایرهٔ ژئودزیکی در هندسه ریمان، مانند هندسه فینسلر، یک منحنی است که انحنای اول فرنه آن k_1 ثابت و انحنای دوم آن k_2 صفر است و به طور معادل منحنی است که انحنای آن ثابت و بدون تاب می باشد [۹]. شباهت‌های بین معنای هندسی و نتایج معروف روی تغییرات تصویری و تغییرات حافظ دایرهٔ ژئودزیکی نقش مهمی در توسعه و پیشرفت هندسه ریمانی داشته است.

فرض کنیم $V=v^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ یک میدان برداری روی منیفلد فینسلری(M,g) و $\hat{V}=v^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}+y^j\partial_j v^i\frac{\partial}{\partial y^i}$ یک ترفیع کاملرویTM باشد. V را یک میدان برداری همدیس یا تبدیل همدیس بی‌نهایت کوچک گوییم اگر در رابطهٔ $\mathcal{L}_{\hat{V}}g_{ij}=2\rho(x)g_{ij}$ صدق کند که $\rho(x)$ یک تابع حقیقی روی M است و آن را تابع مشخصهٔ V می‌نامیم. اگر $\rho(x)$ ثابت باشد یا صفر آن‌گاه V

*نویسندهٔ مسئول s.saberali@urmia.ac.ir

[1] Vogel

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.573]

را یک میدان برداری متجانس یا کیلینگ گوییم. بعد از آن محققان دیگری کارهای بیشتری در زمینهٔ تبدیلات حافظ دایرهٔ ژئودزیکی در هندسهٔ ریمان انجام دادند. ایشیهارا اثبات کرد که یک میدان برداری حافظ دایرهٔ ژئودزیکی روی منیفلدهای ریمانی، یک میدان برداری همدیس است [۷]. این نتیجه از ایشیهارا توسط جوهری ناد به منیفلدهای فینسلری تعمیم داده شد [۸]. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر باشد، یک دیفئومورفیسم موضعی منیفلدهای فینسلری را حافظ دایره گوییم اگر دایره را به دایره تصویر کند. مفهوم حافظ دایرهٔ ژئودزیکی به طور مشابه توسط آگراوال[2] و ایزومی[3] در هندسهٔ فینسلر توسعه پیدا کرده است به علاوه بیدآباد [۹] نشان داد که در تعریف تبدیل حافظ دایرهٔ ژئودزیکی نیازی به فرض همدیس بودن نمی‌باشد، به عبارت دیگر اگر یک تبدیلی دایره‌های ژئودزیکی را حفظ کند آن‌گاه آن تبدیل یک تبدیل همدیس است.

اگر دو ساختار فینسلری روی یک منیفلد، دایره‌های ژئودزیکی یکسان به صورت مجموعه‌های نقاط داشته باشند، آن‌گاه این دو ساختار فینسلری را حافظ دایرهٔ ژئودزیکی مرتبط گوییم. تغییرات حافظ دایرهٔ ژئودزیکی کلی‌تر از تغییرات تصویری است به عبارت دیگر تغییر متر است که ژئودزیک‌ها را پایا نگه می‌دارد.

در سال ۲۰۱۴ پروفسور شن[4] و دکتر بیدآباد مفهوم یک دایرهٔ ژئودزیکی در هندسه فینسلر را بیان کردند و تغییر مترهای حافظ دایره را مطالعه کردند [۹]. در یک فضای فینسلری، تغییر متری که دایره‌های ژئودزیکی را حفظ می‌کند، همدیس است. به طور دقیق‌تر اثبات شده است که اگر یک تبدیلی دایره‌های ژئودزیکی را حفظ کند، آن‌گاه همدیس است. کهنل و راداماخر[5] منیفلدهای نیمه ریمانی (M,g) را دسته‌بندی کردند. به عبارت دیگر یک تبدیل همدیس غیرثابت $\mathrm{\bar g}=\varphi^{-2}\mathrm{g}$ به طوری که تفاوت تانسورهای ریچی آن $\mathrm{Ric}_{\mathrm{\bar g}}-\mathrm{Ric}_{\mathrm{g}}$ یک مضرب ثابتی از متر g یا متر $\mathrm{\bar g}$ است. یک تبدیل $\mathrm{g}\to\mathrm{\bar g}$ را تبدیل حافظ دایرهٔ ژئودزیکی می‌نامیم اگر حافظ منحنی‌های با انحنای ژئودزیکی ثابت و تاب ژئودزیکی صفر باشد. (این منحنی‌ها به دایره‌های ژئودزیکی معروف هستند.) در این حالت ژئودزیک‌های همدیس، دایره‌های ژئودزیکی هستند. یک فضای (M,g)را اینشتینی گوییم؛

هرگاه:
$$[\mathrm{Ric}_{\mathrm{g}}]=[\mathrm{g}].$$

یک تبدیل همدیس بین فضاهای اینشتینی یک تبدیل حافظ دایرهٔ ژئودزیکی است.

تبدیل متریک‌های $\mathrm{g},\mathrm{\bar g}$ را حافظ دایرهٔ ژئودزیکی گوییم، هر گاه: $[\mathrm{g}]=[\mathrm{\bar g}]=[\mathrm{Ric}_{\mathrm{\bar g}}-\mathrm{Ric}_{\mathrm{g}}]$

یک تبدیل همدیس $\mathrm{g}\to\mathrm{\bar g}$ را یک تبدیل لیوویل گوییم، اگر: $\mathrm{Ric}_{\mathrm{\bar g}}-\mathrm{Ric}_{\mathrm{g}}=0.$

[2] Agrawal
[3] Izumi
[4] Z. Shen
[5] W.K$\ddot{u}$hnel, H.-B. Rademacher

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.573]

لم: مترهای هم‌ارز همدیس $g, \bar{g} = \frac{1}{\varphi^2} g$ در رابطهٔه زیر صدق می‌کنند:

$$\left[\mathrm{Ric}_{\bar{g}} - \mathrm{Ric}_{g}\right] = [g] = [\bar{g}]$$

اگر و تنها اگر تابع ϕ در معادلهٔ زیر صدق کند:

$$\nabla^2\varphi = \frac{\Delta\varphi}{n} g.$$

ϕ یک تابع اسکالر دلخواه است.

یک تبدیل حافظ دایرهٔ ژئودزیکی $g \to \bar{g}$ در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\mathrm{Ric}_{\bar{g}} - \mathrm{Ric}_{g} = \frac{1}{n}\left(\frac{\bar{S}}{\varphi^2} - S\right) g$$

که $S, \bar{S}$ انحناهای اسکالر $g, \bar{g}$ هستند.

لم: فرض کنید (M,F) یک منیفلد فینسلری باشد. شرط لازم و کافی برای این‌که یک تغییر همدیس $\bar{g} = e^{2\sigma} g$ حافظ دایرهٔ ژئودزیکی باشد این است که تابع σ یک جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل جزئی زیر باشد [۱۰]:

$$\nabla_j\sigma_k - \sigma_j\sigma_k = \Phi g_{jk} \qquad (۲)$$

که $\sigma_k = \frac{\partial\sigma}{\partial x^k}$، ∇_k مشتق افقی کارتان و Φ یک تابع اسکالر خاص است.

مثال: تغییرات حافظ دایرهٔ ژئودزیکی در فیزیک به صورت جمع‌بندی همدیس ریچی شناخته شده می‌باشند و معادلات میدان ماکسول-اینشتین در رابطه با میدان‌های الکترومغناطیسی غیرتهی را تخمین می‌زنند.

لم: فرض کنید F و $\bar{F}$ دو متریک فینسلر همدیس مرتبط روی منیفلد یکسان M با $\bar{F} = u^{-1}F$ باشند (فاکتور همدیس u معادل با e^{σ} است) ؛ آن‌گاه داریم [۱۱]:

(۱) F و $\bar{F}$ حافظ دایرهٔ ژئودزیکی هستند؛ اگر و تنها اگر:

$$\left(u_i := u_{x^i}, u^i := g^{ir}u_r\right)u^r C^k_{ri} = 0,, u_{i|j} = \lambda g_{ij} \qquad (۳)$$

که $\lambda = \lambda(x)$ یک تابع اسکالر روی M و | به معنای مشتق کواریانت افقی التصاق کارتان (چرن) F است.

۲) اگر F و $\bar{F}$ حافظ دایرهٔ ژئودزیکی باشند، آن‌گاه F و $\bar{F}$ حافظ انحنای پرچمی اسکالر (ایزوتروپیک) یا انحنای پرچمی ثابت در (بعدهای بزرگ‌تر یا مساوی ۳) یا یک متر اینشتینی می‌باشند.

قضیهٔ ۱: فرض کنیم $F, \bar{F}$ دو متریک راندرز همدیس مرتبط روی منیفلد یکسان باشند، اگر $F, \bar{F}$ هر دو مترهای اینشتینی ضعیف باشند، آن‌گاه تبدیل همدیس یک تبدیل حافظ دایرهٔ ژئودزیکی است.

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.573]

نتیجه: فرض کنید $\mathrm{F}, \overline{\mathrm{F}}$ دو متریک راندرز همدیس مرتبط روی منیفلد یکسان باشند، اگر $\mathrm{F}, \overline{\mathrm{F}}$ هر دو مترهای اینشتینی باشند، آن‌گاه تبدیل همدیس یک تبدیل حافظ دایرۀ ژئودزیکی است.

فرض کنید F و $\bar{F}$ دو متریک فینسلر روی منیفلد دیفرانسیل‌پذیر M باشند. F و $\bar{F}$ را هم‌ارز تصویری یا تصویری مرتبط گوییم اگر ژئودزیک‌های (M, F) و $(M, \bar{F})$ به صورت منحنی‌های جهت‌دار در جهت مشابهی یکسان باشند. از طرف دیگر اگر ضرایب ژئودزیک F و $\bar{F}$ در رابطۀ زیر صدق کنند:

$$\overline{G^i}(x, y) = G^i(x, y) + P(x, y)y^i \tag{۴}$$

آن‌گاه F و $\bar{F}$ هم‌ارز تصویری هستند. تغییر متریک‌های فینسلری که در رابطۀ (۴) صدق می‌کنند را تغییر تصویری می‌نامیم. تابع $P(x, \lambda y) = \lambda P(x, y)$ که همگن مثبت از درجۀ یک می‌باشد را فاکتور تصویری گوییم. اسپری‌های G و $\bar{G}$ که در رابطۀ (۴) صدق می‌کنند را هم‌ارز تصویری می نامیم.

مسألۀ چهارم هیلبرت در حالت منظم مطالعه و بررسی مترهای فینسلری روی یک زیر مجموعۀ باز $\mathbb{U} \subset R^n$ است که ژئودزیک‌های آن خطوط راست هستند. مترهای فینسلری با این ویژگی را متریک‌های مسطح تصویری می‌نامیم. یک متر فینسلر $\mathrm{F}(x, y)$ را روی یک زیر مجموعه باز $\mathbb{U} \subset R^n$ مسطح تصویری می‌گوییم اگر و تنها اگر ضرایب اسپری آن به صورت زیر باشند:

$$G^{\mathrm{i}}(x, y) = \mathrm{P}(x, y)y^i \tag{۵}$$

که $P(x, y)$ یک تابع همگن مثبت از درجۀ یک در y است.

انحناها مهم‌ترین مفاهیم در هندسه هستند. مفهوم انحنا اولین بار توسط ریمان معرفی شد، انحنای ریمانی را مانند انحنای برشی می‌توان به متریک های فینسلری گسترش داد. کمیت زیر برای هر صفحه مماس $P \subset T_xM$ و بردار غیر صفر $y \in P$ به صورت زیر بیان می شود:

$$K(P, y) := \frac{g_y(u, R_y(u))}{g_y(y, y)g_y(u, u) - g_y(y, u)^2}$$

که $u \in T_xM$ یک بردار دلخواهی است به طوری که $P = span\{y, u\}$.

$K(P, y)$ را انحنای پرچمی F می‌نامیم. وقتی F ریمانی باشد، $K(P, y) = K(P)$ مستقل از $y \in P$ انحنای برشی P در هندسه ریمان است. بنابراین انحنای پرچمی مشابه انحنای برشی در هندسه ریمان می‌باشد.

یک متریک فینسلر را با انحنای پرچمی ایزوتروپیک ضعیف گوییم اگر انحنای پرچمی آن یک تابع اسکالر روی T_xM به صورت زیر باشد

$$K = \frac{3\theta}{F} + \sigma$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.573]

که $\theta = t_i(x)y^i$ یک ۱- فرمی و $\sigma = \sigma(x)$ یک تابع اسکالر روی M است.

قضیه ۲: فرض کنید $F,\bar{F}$ دو متریک راندرز همدیس مرتبط روی منیفلد یکسان باشند، اگر $F,\bar{F}$ هر دو با انحنای پرچمی ایزوتروپیک ضعیف باشند، آن‌گاه تبدیل همدیس یک تبدیل حافظ دایرهٔ ژئودزیکی است.

انحنای بروالدکمیت غیرریمانی مهم دیگری است که وابسته به S انحنا است.

$$E_{ij}(x,y) = \frac{1}{2}S_{y^iy^j}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j}[\frac{\partial G^m}{\partial y^m}](x,y)$$

$E := E_{ij}dx^i \otimes dx^j$ یک تانسور روی TM_0 است که E تانسور نام دارد. E تانسور به صورت یک خانواده از فرم‌های متقارن $E_y: T_xM \times T_xM \longrightarrow R$ تعریف شده است.

$$E_y(u,v) = E_{ij}(x,y)u^iv^j,$$

که $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$ و $v = v^j \frac{\partial}{\partial x^j}|_x$ متعلق به T_xM است. آن‌گاه $E := \{E_y | y \in TM\backslash\{0\}\}$ انحنای بروالد میانگین یا E- انحنا می‌نامیم. یک متریک فینسلر را یک متریک بروالد ضعیف گوییم اگر $E = 0$.

قضیه ۳: فرض کنید $F,\bar{F}$ دو متریک راندرز همدیس مرتبط روی منیفلد یکسان باشند، اگر $F,\bar{F}$ هر دو با انحنای بروالد میانگین ضعیف باشند، آن‌گاه تبدیل همدیس یک تبدیل حافظ دایرهٔ ژئودزیکی است.

مقدمات

یک تابع $F : TM \to [0,\infty)$ را یک ساختار فینسلری می‌نامیم؛ اگر در یک دستگاه مختصات موضعی (x^i,y^i):

$$F(x,y) = F(y^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x)$$

در روابط زیر صدق کنند:

۱) F یک تابع همگن مثبت از درجهٔ یک نسبت به y باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم: $F(x,\lambda y) = \lambda F(x,y)$ و λ مثبت باشد.

۲) $F(x,y)$ تابعی C^∞ روی $TM\backslash\{0\}$ باشد.

۳) ماتریس هسیان[۶] $\frac{1}{2}[F^2{}_{y^iy^j}]$ یک ماتریس مثبت معین باشد.

یک منیفلد C^∞ فینسلری با ساختار فینسلری بالا را یک منیفلد فینسلری یا یک فضای فینسلری می‌گوییم.

[6] Hessian Matrix

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.573]

تعریف: فرض کنیم $F:R^n \to [0,\infty]$ یک نگاشت با خواص زیر باشد:

۱. F روی $R^n-\{0\}$ هموار باشد.

۲. F همگن مثبت از درجه یک باشد.

۳. ماتریس هسیان F معین مثبت باشد.

در این صورت F را یک نرم مینکوفسکی[۷] روی R^n می نامیم.

یک متریک فینسلر روی یک منیفلد،یک خانواده از نرم های مینکوفسکی روی فضاهای مماس می باشد.در واقع با توجه به تعریف فوق و تعریف ساختار فینسلری می توان گفت F یک ساختار فینسلری روی منیفلد M است هرگاه تحدید آن به هر تار TM در هر نقطه یک نرم مینکوفسکی باشد.

مثال: متریک ریمانی روی منیفلد M یک خانواده از ضرب‌های داخلی $\{g_x\}_{x\in M}$ است که $g_{ij}(x,y)=g(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})$ در مختصات موضعی هموار هستند.

مثال: روی R^n، تابع $F(x,y):=|y|+\langle x,y\rangle$ را در نظر می گیریم که در آن $|.|$ نرم استاندارد و $\langle,\rangle$ ضرب داخلی اقلیدسی روی R^n است. در این صورت F یک متریک فینسلر روی R^n است.

یک اسپری[۸] روی منیفلدفینسلری M یک میدان برداری هموار G روی $TM\backslash\{0\}$ می‌باشد که در یک دستگاه مختصات استاندارد موضعی به صورت زیر بیان می شود:

$$G=y^i\frac{\partial}{\partial x^i}-2G^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i} \tag{۶}$$

که $G^i(y)$ توابع موضعی روی TM می باشند: $G^i(\lambda y)=\lambda^2 G^i(y),\ \ \lambda>0$.

یک منیفلد با یک اسپری را فضای اسپری می نامیم. ضرایب اسپری G^i به صورت زیر تعریف می شوند:

$$G^i=\frac{1}{4}g^{il}\{[F^2]_{x^m y^l}y^m-[F^2]_{x^l}\} \tag{۷}$$

که در آن $g^{ij}:=(g_{ij})^{-1}$ [۱۲].

---
[7] Minkowski
[8] Spray

هر اسپری G به طور یکتا یک خانواده از تبدیلات $R_y := R^i_k dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}|_x : T_xM \to T_xM$ مشخص می کندکه در آن R^i_k به صورت زیر تعریف می شود:

$$R^i_k := 2\frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} + 2G^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^j} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{\partial G^j}{\partial y^k} \qquad (۸)$$

R_yانحنای ریمان[۹] اسپری G در جهت y می باشد.

اثر انحنای ریمان را انحنای ریچی[۱۰] نامیده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$Ric(x,y) = R^m_m(x,y) \qquad (۹)$$

انحنای ریچی همگن مثبت از درجۀ ۲ می باشد.

یک متریک فینسلر روی منیفلد M را یک متریکاینشتینی ضعیف می نامیم، اگر:

$$Ric = (n-1)(\frac{3\theta}{F} + \sigma)F^2 \qquad (۱۰)$$

که $\sigma = \sigma(x)$ یک تابع اسکالر و $\theta = t_i(x)y^i$ یک ۱- فرمی روی M است.

یک متریک فینسلری را اینشتینی[۱۱] می نامیم؛ اگر در رابطه بالا $\theta = 0$ باشد، به عبارت دیگر:

$$Ric = (n-1)\sigma F^2 \qquad (۱۱)$$

فرض کنید F یک متریک فینسلر روی منیفلد $n-$ بعدی M باشد، با انتخاب یک دستگاه مختصات موضعی استاندارد (x^i,y^i) فرض کنیم $dv_F = \sigma_F(x)dx^1 \dots dx^n$ فرم حجمی متریک فینسلر F باشد که:

$$\sigma_F(x) = \frac{Vol(B^n(1))}{Vol\{y^i \in R^n | F(x,y^i \frac{\partial}{\partial x^i})|_x < 1\}}$$

برای یک بردار غیر صفر $y \in T_xM$ انحراف معیار[۱۲]به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tau(x,y) := \frac{\sqrt{\det(g_{ij}(x,y))}}{\sigma_F(x)}$$

[9] Riemann curvature
[10] Ricci curvature
[11] Einstein metric
[12] distortion

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.573]

برای یک بردار $y \in T_xM$ فرض کنید منحنی $c(t)$ یک ژئودزیک با $c(0) = x$ و $\dot{c}(0) = y$ باشد، انحنای S به صورت زیر تعریف می شود:

$$S(x,y) := \frac{d}{dt}\left[\tau\left(c(t),\dot{c}(t)\right)\right]|_{t=0} \qquad (۱۲)$$

انحنای $S(x,y)$ یک تابع همگن مثبت از درجهٔ یک می باشد. بنا بر تعریف فوق انحنای $S(x,y)$ در واقع مشتق هموردا افقی τ در امتداد ژئودزیک‌ها است. به عبارت دیگر داریم:

$$S(x,y) = \tau|_l(x,y)y^l$$

"|" که مشتق هموردا افقی F می‌باشد.

در مختصات موضعی داریم:

$$S(x,y) = y^i\frac{\partial\tau}{\partial x^i} - 2\frac{\partial\tau}{\partial y^i}G^i$$

با توجه به رابطهٔ بالا به رابطهٔ زیر برای انحنای $S(x,y)$ می‌توان دست یافت:

$$S(x,y) = \frac{\partial G^m}{\partial y^m} - y^m\frac{\partial}{\partial x^m}(\ln\sigma_F(x))$$

متریک فینسلر $F(x,y)$ را با انحنای ایزوتروپیک ضعیف $S(x,y)$[۱۳] گوییم، اگر:

$$S(x,y) = (n+1)cF(x,y) + \eta \qquad (۱۳)$$

که $c = c(x)$ یک تابع اسکالر و $\eta = \eta_i(x)y^i$ یک ۱-فرمی روی M می باشد.

متریک فینسلر $F(x,y)$ را با انحنای تقریبا ایزوتروپیک $S(x,y)$[۱۴] گوییم اگر در رابطه بالا $d\eta = 0$.

متریک فینسلر $F(x,y)$ را با انحنای ایزوتروپیک $S(x,y)$ گوییم اگر در رابطه بالا $\eta = 0$ باشد.

متریک فینسلر $F(x,y)$ را با انحنای ثابت[۱۵] $S(x,y)$ گوییم اگر در رابطه بالا c ثابت و $\eta = 0$ باشد.

[13] Weak isotropic curvature
[14] Almost isotropic curvature
[15] Constant curvatur

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.573]

فرض کنید $\alpha(x,y)=\sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ یک متر ریمانی[16] روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M و $\beta=b_i(x)y^i$ یک ۱- فرمی روی M باشد. فرض کنیم:

$$\|\beta(x,y)\|_\alpha := \sqrt{a^{ij}(x)b_i(x)b_j(x)} < 1$$

که $a^{ij}(x)=(a_{ij}(x))^{-1}$. تعریف می کنیم: $F=\alpha+\beta$
Fیک متریک فینسلر می باشد، F را یک متریکراندرز[17] می نامیم.تانسور اساسی متریک راندرز به صورت زیر می باشد:

(۱۴)
$$g_{ij}(x,y)=\frac{F}{\alpha}\Big[a_{ij}+\frac{\alpha}{F}\Big(b_i+\frac{y_i}{\alpha}\Big)\Big(b_j+\frac{y_j}{\alpha}\Big)-\frac{y_i}{\alpha}\frac{y_j}{\alpha}\Big].$$

وارون g_{ij}، g^{ij} به صورت زیر می باشد:

(۱۵)
$$g^{ij}(x,y)=\frac{\alpha}{F}a^{ij}-\frac{\alpha}{F^2}\big(b^iy^j+b^jy^i\big)+\frac{b^2\alpha+\beta}{F^3}y^iy^j.$$

تاب کارتان میانگین متر راندرز

$$I_i(y)=\frac{n+1}{2(\alpha+\beta)}(b_i-\frac{y_i}{\alpha}\frac{\beta}{\alpha}) \quad (۱۶)$$

$F(x,y)$را روی یک زیر مجموعه باز $\mathbb{U}\subset R^n$ مسطح تصویری گوییم اگر و تنها اگر ضرایب اسپری آن به صورت زیر باشند:

(۱۷) $G^i(x,y)=P(x,y)y^i$ که $P(x,y)$ یک تابع همگن مثبت از درجهٔ یک در y است.

اثبات قضایا

اثبات قضیه ۱: می دانیم که اگر$F,\bar{F}$ دو متریک راندرز اینشتینی ضعیف باشند آنگاه با انحنای $S,\bar{S}$ایزوتروپیک می باشند بنابراین داریم:$S(x,y)=(n+1)k_1(x)F$ و $\bar{S}(x,y)=(n+1)k_2(x)\bar{F}$ و به عبارت دیگر، اگرF با انحنای ایزوتروپیک باشد؛ آنگاه داریم $S=(n+1)k_1(x)F$ و $k_1(x)$ تابع اسکالر می باشد. همچنین اگر $\bar{F}$ با انحنای ایزوتروپیک باشد؛ آنگاه داریم $\bar{S}=(n+1)k_2(x)\bar{F}$ و$k_2(x)$ تابع اسکالر می باشد. با توجه به تبدیل همدیس مرتبط بودن بین $F,\bar{F}$ رابطه زیر را برای تبدیل همدیس انحنای S، داریم:

(۱۸)
$$\bar{S}(x,y)=S(x,y)+F^2(x,y)\sigma^iI_i$$

[16] Riemannian metric
[17] Randers metric

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.573]

با جایگذاری$\overline{S}$, S در رابطهٔ بالا، به دست می‌آوریم:

$$(n+1)k_2(x)e^{\sigma}F = (n+1)k_1(x)F + F^2\sigma^i I_i$$

$$(n+1)(k_2(x)e^{\sigma} - k_1(x)) - F\sigma^i I_i = 0$$

با جایگذاری $F = \alpha + \beta$ و $\overline{F} = \overline{\alpha + \beta}$ و همچنین از روابط بالا به دست می‌آوریم:

$$I_i\sigma^i = 0 \qquad (۱۹)$$

$$(n+1)(k_2(x)e^{\sigma} - k_1(x))\beta - \sigma^i I_i = 0$$

که $\sigma^i = g^{ij}\sigma_j$ با جایگذاری در رابطه(۱۹)داریم:

$$I_i g^{ij}\sigma_i = 0 \qquad (۲۰)$$

با جایگذاری روابط (۱۵) و (۱۶) در رابطهٔ (۲۰) به دست می آوریم:

$$\alpha\{\beta b^j\sigma_j - b^2\sigma_0\} + \alpha^2 b^j\sigma_j - \beta\sigma_0 = 0 \qquad (۲۱)$$

با توجه به رابطهٔ (۲۱) داریم:

$$\alpha^2 b^j\sigma_i - \beta\sigma_0 = 0 \qquad (۲۲)$$

با توجه به تحویل‌ناپذیریα^2 و β در رابطهٔ (۲۲) به دست می آوریم $\sigma_i = 0$. پس σ ثابت و تبدیل همدیس یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیکی می باشد.

اثبات قضیه ۲: اگر$\overline{F}$یک متر راندرز با انحنای پرچمی ایزوتروپیک ضعیف باشد، آن‌گاه $\overline{F}$ با انحنای ایزوتروپیک $\overline{S}$ است، همچنینF با انحنای ایزوتروپیک S می‌باشد. بنابراین مشابه اثبات قضیهٔ ۱ تبدیل همدیس یک تبدیل حافظ دایرهٔ ژئودزیکی می‌باشد.

اثبات قضیه۳: اگر F یک متریک راندرز با انحنای بروالد میانگین ضعیف باشد، آن‌گاه F در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$E = (n+1)c(x)F^{-1}h \qquad (۲۳)$$

$$e_{00} = 2c(\alpha^2 - \beta^2) \qquad (۲۴)$$

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.573]

همچنین $\bar{F}$ یک متریک راندرز با انحنای بروالد میانگین ضعیف باشد، آن‌گاه $\bar{F}$ در رابطهٔ بالا صدق می‌کند. با توجه به این‌که $\bar{F}$ و F هر دو متریک راندرز همدیس مرتبط می‌باشند یعنی $\bar{F} = e^{\sigma}F$، آن‌گاه داریم:

$$e_{00} = r_{00} + 2\beta s_0 \tag{۲۵}$$

$$\bar{r}_{00} = e^{\sigma}(r_{00} - \beta\sigma_0 + \alpha^2 f) \tag{۲۶}$$

$$(\bar{e}_{00} = e^{\sigma}(e_{00} + f(\alpha^2 - \beta^2) + \beta\sigma_0(b^2 - 1) \tag{۲۷}$$

از رابطهٔ (۲۴) داریم: $\bar{e}_{00} = 2ce^{3\sigma}(\alpha^2 - \beta^2)$

با جایگذاری در رابطهٔ (۲۷) داریم:

$$(2ce^{2\sigma} - 2c - f)(\alpha^2 - \beta^2) - \beta\sigma_0(b^2 - 1) = 0$$

با توجه به تحویل‌ناپذیری $\alpha^2 - \beta^2$ و β داریم: $\sigma_0 = 0$ پس σ ثابت و تبدیل همدیس یک تبدیل حافظ دایرهٔ ژئودزیکی می باشد.

References

1. Yano, K., On circular geometry, I. Concircular transformations. Proc. Imp. Acad. Tokyo **16,** 195-200 (1940).

2. Yano, K., On circular geometry, II. Integrability conditions of $\rho_{\mu\lambda} = \phi g_{\mu\lambda}$. Proc. Imp. Acad. Tokyo **16,** 505-511 (1940).

3. Yano, K., On circular geometry, III. Theory of curves. Proc. Imp. Acad. Tokyo **16**, 442-448 (1940).

4. Yano, K., On circular geometry, IV. Theory of subspace. Proc. Imp. Acad. Tokyo **18,** 505-511 (1940).

5. Yano, K., On circular geometry, V. Einstein spaces. Proc. Imp. Acad. Tokyo **18**, 446-451 (1942).

6. Vogel, W.O.K., Transformationen in Riemannschen Räumen, (German). Arch. Math. Soc. **117,** 251-275 (1965).

7. Ishihara, S., On infinitesimal concircular transformations. K̂odai Math. Sem. Rep. **12**, 45-56 (1960).

8. P. Joharinad, P., Bidabad, B., Conformal vector field on Finsler spaces. Differential geometry and applications 31 (2013) 33-40

9. Ferrand, J., Concircular transformations of Riemannian manifolds. Ann. Acad. Sci. Fenn. M. **10**, 163-171 (1985).

10. Bidabad B., Shen Z., Circle-preserving transformations in Finsler spaces. Publ. Math. Debr. **81**, 435-445 (2012).

11. Bidabad, B., A classification of complete Finsler manifolds through the conformal theory of curves. Differential geometry and its applications **35**, 350-360 (2014).

12. Shen Z., Yang G., On concircular transformations in Finsler geometry. Results Math. **74**:162 (2019).

13. Bao D., Chern S.S., Shen Z. Riemannn-Finsler geometry, Springer-Verlag, (2000).

[DOI: 10.52547/mmr.7.3.573]