Kharazmi University

Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

Construction of the radial basis function finite difference methods and their application to problems with arbitrary domain

Mahdiar Barfeie[1], Fazlollah Soleymani[2]✉

1. Department of Mathematics and Computer Science, Sirjan University of Technology, Sirjan, Iran.

E-mail: m.barfeie@gmail.com

2. Department of Mathematics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan, Iran.

✉E-mail: fazlollah.soleymani@gmail.com; soleymani@iasbs.ac.ir

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received:
6 May 2020
Revised form:
24 November 2020
Accepted:
22 December 2020
Published online:
22 November 2022

Keywords:
Meshfree methods;
Radial basis function;
Radial basis finite difference methods.

ABSTRACT

Introduction

A wide variety of problems in mathematics and particularly in computational mathematics is formulated as second-order partial differential equations (PDEs), which mostly do not admit closed-form solutions. Due to this, constructing numerical solver for such problems is requisite as well as of special importance when the computational domain is not anymore regular. Such problems, which mainly occur in engineering modeling problems, are defined on irregular domain. Classic methods such as finite difference (FD) or spectral solvers are hard to be employed on irregular domains with arbitrary geometries. One remedy is to rely on finite element method or the meshless radial basis function (RBF) method. This is discussed in this paper.

Toward this purpose, an RBF-FD method is discussed and its weighting coefficients are constructed theoretically. Numerical reports and comparison will confirm the efficacy and competitiveness of the presented approach on domains with arbitrary geometries.

Material and methods

The meshfree RBF methods are categorized as globalized and localized meshless schemes. A localized version of such schemes is the RBF-FD estimates, which is an attractive choice in contrast to the global meshfree RBF schemes by providing better-conditioned and sparse discretization matrices. This clearly reduces the computational load of applying RBF methods for practical problems in higher dimensions. Unlike the standard procedures, the RBF-FD method can deal with scattered node layouts and irregular domains. In addition, their locality makes them more flexible with respect to local refinement techniques than the globalized RBF methods.

Results and discussion

In this paper, we obtain weights of the radial basis function finite difference formula for some differential operators. These weights are used to obtain the

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]

local truncation error in function derivative approximating. We discuss how to select the shape parameter for the RBF-FD formulas so as to gain the accuracy as well as stability. We apply these formulas for Poisson equation with irregular domains and show that the proposed method can be used as a fully meshfree method.

Conclusion

The following conclusions were drawn from this research.

- Closed-form coefficients for RBF-FD formulas to approximate derivatives of the function can be obtained under some conditions.
- It is discussed that how we can choose the shape parameters to have efficient RBF-FD formulations in solving PDE problems on irregular domains.
- Several experiments on different types of irregular geometries are discussed and compared and showed how much RBF-FD is useful for practical engineering PDE problems on irregular domains.

How to cite: Barfeie, M., Soleymani, F., (2022) Construction of the radial basis function finite difference methods and their application to problems with arbitrary domain. *Mathematical Researches*, 8 (3), 117-131

© The Author(s). Publisher: Kharazmi University

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

ساختن روش‌های تفاضلات متناهی مبتنی بر توابع پایه شعاعی و استفاده از آنها برای حل معادلات دیفرانسیل با هندسهٔ دلخواه

مهدیار برفه‌ئی[۱]، فضل الله سلیمانی[۲]✉

۱. دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان، ایران. پست الکترونیکی: m.barfeie@gmail.com

۲. نویسندهٔ مسئول، دانشکدهٔ ریاضی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه، زنجان، ایران. پست الکترونیکی: fazlollah.soleymani@gmail.com ; soleymani@iasbs.ac.ir

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۲/۱۷
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۹/۰۴
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۰۲
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۹/۰۱

واژه‌های کلیدی:
روش‌های بدون شبکه،
توابع پایه شعاعی،
فرمول‌های تفاضلات
متناهی مبتنی بر توابع
پایهٔ شعاعی.

چکیده

در این مقاله وزن فرمول‌های تفاضلات متناهی را برای عملگرهای مشتق اول، مشتق دوم و عملگر لاپلاس با استفاده از توابع پایهٔ شعاعی به دست خواهیم آورد. همچنین خطای برشی این فرمول‌ها را بر حسب فاصلهٔ نقاط و پارامتر شکل توابع شعاعی به دست می‌آوریم. نشان می‌دهیم برای هر فرمول تفاضلات متناهی مقداری از پارامتر شکل در توابع پایه شعاعی وجود دارد که به ازای آن خطا مینیمم خواهد بود. با به کار بردن این روش‌ها برای معادله پواسن با هندسه‌های نامنظم نشان خواهیم داد بر خلاف روش‌های تفاضلات متناهی استاندارد که برای گسسته‌سازی معادلات با هندسه منظم به کار می‌روند فرمول‌های تفاضلات متناهی تولید شده به وسیلهٔ توابع پایهٔ شعاعی این امکان را دارند تا به عنوان یک روش بدون شبکه برای حل مسائل با هندسهٔ نامنظم به کار روند.

استناد: برفه‌ئی، مهدیار؛ سلیمانی، فضل الله، (۱۴۰۱). ساختن روش‌های تفاضلات متناهی مبتنی بر توابع پایه شعاعی و استفاده از آنها برای حل معادلات دیفرانسیل با هندسهٔ دلخواه خطی. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۳)، ۱۳۱-۱۱۷.

© نویسندگان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]

۱ – مقدمه

معادلات دیفرانسیل به طور گسترده در مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی استفاده می‌شوند. از آن‌جایی که اکثر این معادلات جواب دقیق ندارند یافتن جواب تقریبی برای این معادلات از اهمیت زیادی برخوردار است. روش‌های متنوعی برای حل معادلات با مشتقات جزئی ارائه شده است. روش‌های تفاضلات متناهی، روش‌های اجزای محدود، روش‌های حجم محدود و روش‌های بدون شبکه از جمله این روش‌ها می‌باشند. در این بین روش‌های بدون شبکه اهمیت زیادی دارند و به طور گسترده برای حل معادلات با مشتقات جزیی مورد استفاده قرار گرفته‌اند [۱، ۱۲، ۱۵]. از مهمترین ویژگی روش‌های بدون شبکه این است که دارای دقت بالا هستند و می‌توان آنها را برای مسائل با هندسهٔ دلخواه به کار برد. اما یکی از ایرادها در روش‌های بدون شبکه این است که از تمام نقاط دامنه برای حل مسأله استفاده می‌کنند و این می‌تواند باعث به وجود آمدن ماتریس‌های پر و بد حالت شود. در حالی که در بسیاری از روش‌های مبتنی بر شبکه مانند روش تفاضلات متناهی، ماتریس‌های نواری و خوش حالت به دست می‌آید.

در سال‌های اخیر تعمیمی از روش‌های تفاضلات متناهی با استفاده از توابع پایهٔ شعاعی ساخته شده است که ضمن داشتن دقت بالاتر نسبت به روش تفاضلات متناهی استاندارد، خوش وضع هستند و با عنوان روش تفاضلات متناهی مبتنی بر توابع پایه شعاعی (RBF-FD) شناخته می‌شوند [۲، ۳]. در این مقاله فرمول‌های تفاضلات متناهی جدید را با استفاده از تابع شعاعی چند ربعی تعمیم یافته به دست خواهیم آورد. همچنین خطای برشی را برای این فرمول‌های تفاضلی به دست می‌آوریم و نشان می‌دهیم برای هر فرمول تفاضلات متناهی مقداری از پارامتر شکل در توابع پایهٔ شعاعی وجود دارد که به ازای آن خطا مینیمم خواهد بود.

با توجه به این‌که روش‌های توابع پایه شعاعی جز روش‌های بدون شبکه می‌باشند، انتظار این است که فرمول‌های تفاضلات متناهی تولید شده با استفاده از توابع پایه شعاعی را به عنوان یک روش بدون شبکه برای حل مسائل با هندسهٔ دلخواه به کار برد. در بسیاری از مطالعات انجام شده فرمول‌های تفاضلات متناهی ساخته شده با استفاده از توابع پایهٔ شعاعی برای مسائل با هندسهٔ منظم و غالبا مستطیلی شکل به کار گرفته شده است [۴، ۵]. هدف ما در این مقاله این است که با ارائه یک الگوریتم مناسب بتوانیم این روش‌ها را برای هر هندسه دلخواه به کار ببریم. با توجه به این‌که بسیاری از پدیده‌های فیزیکی بر روی نواحی غیر مستطیلی رخ می‌دهند، این موضوع حائز اهمیت است. یکی از کاربردهای متداول، حل مسائل قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت اختیارهای آمریکایی یا اروپایی در حضور چندین دارایی می باشد. در این نوع مسائل که به صورت معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مدل‌سازی می‌گردند پس از اعمال چندین تعویض متغیر از قبیل تغییر متغیرها به منظور حذف جملات مشتقات ترکیبی معادلهٔ حاصل از تعویض متغیرها بر روی یک ناحیه‌ای نامستطیلی تعریف می‌گردد که باید به صورت عددی حل شود.

در ادامه به معرفی توابع پایهٔ شعاعی خواهیم پرداخت و چگونگی استفاده از آنها را برای به دست آوردن فرمول‌های تفاضلی برای عملگرهای مختلف همانند مشتق اول، مشتق دوم و عملگر لاپلاس را بررسی خواهیم کرد.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]

۲- روش تفاضلات متناهی مبتنی بر توابع پایهٔ شعاعی (RBF-FD)

تابعی که مقادیر آن در نقطهٔ x به فاصلهٔ آن نقطه تا نقطه ثابت x_i بستگی دارد، تابع شعاعی نامیده می‌شود. انواع مختلفی از توابع شعاعی وجود دارد. در جدول ۱ برخی از توابع شعاعی پرکاربرد معرفی شده‌اند [۱، ۶].

جدول ۱: برخی از توابع پایه شعاعی پرکاربرد

نام تابع	تعریف
تابع گاوسین	$\varphi(r) = e^{-(cr)^2}$
تابع شعاعی چند ربعی	$\varphi(r) = \sqrt{c^2 + r^2}$
تابع چند ربعی تعمیم یافته	$\varphi(r) = (c^2 + r^2)^{\frac{\beta}{2}},\ \ \beta < 0$

هدف ما در این بخش به دست آوردن فرمول‌های تفاضلی با استفاده از توابع پایه شعاعی است. ضرایب وزن فرمول‌های تفاضلات متناهی با استفاده از توابع شعاعی گاوسین، تابع شعاعی چند ربعی و چند ربعی معکوس در برخی مقالات به دست آمده است [۷، ۸، ۹، ۱۰]. در این مقاله ما تابع چند ربعی تعمیم یافته را به ازای $\beta = -2$ انتخاب می‌کنیم. این تابع در حالت یک بعدی به صورت زیر است:

$$\phi_i(x) = \varphi(\|x - x_i\|) = \frac{1}{c^2 + (x - x_i)^2}, \tag{۱}$$

c در تعریف تابع شعاعی پارامتر شکل نام دارد و بر دقت مسأله اثرگذار است [۱۱].

در روش تفاضلات متناهی مشتق تابع در یک نقطه به صورت ترکیبی از مقدار توابع در نقاط مجاور تعریف می‌شود. به عنوان مثال داریم:

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = \frac{1}{2h}u(x+h) + 0u(x) + \left(\frac{-1}{2h}\right)u(x-h), \tag{۲}$$

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = \frac{1}{h^2}u(x+h) + \left(\frac{-2}{h^2}\right)u(x) + \frac{1}{h^2}u(x-h). \tag{۳}$$

اساس کار روش RBF-FD نیز بر همین مبنا است. به دنبال این هستیم تا مقدار یک عملگر را بر حسب مقادیر تابع در نقاط مجاور تقریب بزنیم. فرض کنید بخواهیم $Lu(x_k)$ را به کمک مجوعه‌ای از مقادیر تابع در نقاط $\{x_i\}_{i=1}^{Ns}$ که Ns نقطه مجاور به نقطه x_k هستند و شامل خود نقطه x_k نیز می‌باشند، تقریب بزنیم، در این صورت داریم:

$$Lu(x_k) = c_1u(x_1) + c_2u(x_2) + \cdots + c_ku(x_k) + \cdots + c_{Ns}u(x_{Ns}). \tag{۴}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]

در این‌جا Lu یک عملگر دیفرانسیلی است و می‌تواند نشان دهندهٔ $Lu = u'(x)$ ، عملگر لاپلاس یک بعدی $Lu = u''(x)$ یا عملگر لاپلاس دو بعدی $Lu = uxx + uyy$ باشد.

در معادلهٔ (۴) نیاز به پیدا کردن ضرایب $c_i, i = 1, \dots, N_s$، است. برای این منظور فرض می‌کنیم رابطه (۴) برای توابع پایه

$\phi_i(x), i = 1, 2, \dots, Ns$ برقرار باشد. در این صورت روابط زیر را داریم:

(۵)

$$L\phi_i(x_k) = c_1\phi_i(x_1) + c_2\phi_i(x_2) + \cdots + c_k\phi_i(x_k) + \cdots + c_{Ns}\phi_i(x_{Ns}), i = 1, \dots, Ns.$$

معادله (۵) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت:

(۶)

$$AC = L,$$
$$A_{i,j} = \phi_i(x_j), \;\; L_i = L\phi_i(x_k), \qquad i, j = 1, \dots, Ns.$$

با یافتن c_iها عملگر $Lu(x_k)$ به صورت ترکیبی از مقادیر تابع در Ns نقطه مجاور آن تقریب زده می‌شود. در ادامه فرمول‌های تفاضلی را جهت تقریب مشتق اول و دوم به دست می‌آوریم.

۲-۱- تقریب مشتق اول

در این بخش روش را برای تقریب مشتق اول به کار می‌بریم و $u'(x)$ را به کمک مقادیر تابع در نقاط $\{x_1 = x - h, x_2 = x, x_3 = x + \omega\, h\}$ به دست خواهیم آورد.

(۷)

$$u'(x) = \alpha_1 u(x - h) + \alpha_2 u(x) + \alpha_3 u(x + wh),$$

همانند آن‌چه گفته شد برای یافتن ضرایب α_i معادلات (۷) باید برای توابع شعاعی $\phi_i(x), i = 1,2,3$ برقرار باشد. در این صورت دستگاه معادلات زیر را داریم:

(۸)

$$\frac{2h}{(c^2 + h^2)^2} = \frac{\alpha_1}{c^2} + \frac{\alpha_2}{c^2 + h^2} + \frac{\alpha_3}{c^2 + (h + h\omega)^2}$$
$$\frac{\alpha_1}{c^2 + h^2} + \frac{\alpha_2}{c^2} + \frac{\alpha_3}{c^2 + h^2\omega^2} = 0,$$
$$\frac{2h\omega}{(c^2 + h^2\omega^2)^2} = \frac{\alpha_1}{c^2 + h^2(1 + \omega)^2} + \frac{\alpha_2}{c^2 + h^2\omega^2} + \frac{\alpha_3}{c^2}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]

برای ساخت این معادلات و به دست آوردن ضرایب از نرم افزار متمتیکا استفاده شده است. با حل این معادلات ضرایب α_i به صورت زیر به دست می‌آید:

(۹)
$$\alpha_1 = -\frac{\omega\left(5c^2 + 2h^2(1+4\omega)\right)}{5c^2h(1+\omega)}, \alpha_2 = \frac{8h(-1+\omega)}{5c^2} + \frac{-1+\omega}{h\omega},$$
$$\alpha_3 = \frac{\frac{5}{\omega} + \frac{2h^2(4+\omega)}{c^2}}{5h(1+\omega)},$$

به ازای $\omega = 1$ مجموعه ای از نقاط یکنواخت را داریم و در این حالت ضرایب به صورت زیر است:

$$\alpha_1 = -\frac{۱}{2h} - \frac{h}{c^2}, \qquad \alpha_2 = 0, \qquad \alpha_3 = \frac{1}{2h} + \frac{h}{c^2}.$$

در این‌جا پارامترهای c و ω پارامترهای حقیقی مثبت هستند که باید به طور مناسب انتخاب شوند. نحوهٔ انتخاب آنها در ادامه بیان خواهد شد.

قضیهٔ ۱: خطای برشی فرمول‌های تفاضلی (۷) همراه با ضرایب (۹) جهت تقریب مشتق اول برای تابع $u(x)$ به صورت زیر است:

$$e(x) = \left(\frac{2\omega u'(t)}{c^2} + \frac{1}{6}\omega u^{(3)}(t)\right)h^2 + \frac{(-1+\omega)\omega\left(24u''(t) + 5c^2u^{(4)}(t)\right)h^3}{120c^2} + O(h^4).$$

ضرایب α_i را در معادلهٔ (۷) قراردهید. همچنین بسط تیلور تابع $u(x-h)$ و $u(x+h)$ را حول نقطه x می‌نویسیم، داریم:

$$e(x) = \left(-\frac{\omega\left(5c^2 + 2h^2(1+4\omega)\right)}{5c^2h(1+\omega)}\right)u(x-h) + \left(\frac{8h(-1+\omega)}{5c^2} + \frac{-1+\omega}{h\omega}\right)u(x) +$$
$$\left(\frac{\frac{5}{\omega} + \frac{2h^2(4+\omega)}{c^2}}{5h(1+\omega)}\right)u(x+h) - u'(x) = \left(\frac{2\omega u'(t)}{c^2} + \frac{1}{6}\omega u^{(3)}(t)\right)h^2$$
$$+\frac{(-1+\omega)\omega(24u''(t) + 5c^2u^{(4)}(t))h^3}{120c^2} + O(h)^4.$$

نکتهٔ ۱: در فرمول های (۹) حد وزن‌های به دست آمده زمانی که پارامتر شکل به سمت بی نهایت میل می‌کند به صورت زیر است:

$$\lim_{c\to\infty} \alpha_1 = -\frac{۱}{2h}, \qquad \lim_{c\to\infty} \alpha_2 = 0, \qquad \lim_{c\to\infty} \alpha_3 = \frac{۱}{2h},$$

که همان روش تفاضلات متناهی استاندارد می‌باشد.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]

۲-۲- تقریب مشتق دوم

در این بخش ضرایب وزن $u''(x)$ را برای مجموعه نقاط $\{x_1 = x - h, x_2 = x, x_3 = x + \omega\, h\}$ به دست می‌آوریم. قرار دهید:

(۱۰)
$$u''(x) = \beta_1 u(x-h) + \beta_2 u(x) + \beta_3 u(x + wh).$$

برای یافتن ضرایب β_i، معادلات (۱۰) باید برای توابع شعاعی $\phi_i(x), i = 1,2,3$ برقرار باشد. در این صورت دستگاه معادلات زیر را داریم:

(۱۱)
$$\begin{gathered}
-\frac{2(c^2-3h^2)}{(c^2+h^2)^3} = \frac{\beta_1}{c^2} + \frac{\beta_2}{c^2+h^2} + \frac{\beta_3}{c^2+(h+h\omega)^2},\\
-\frac{2}{c^4} = \frac{\beta_1}{c^2+h^2} + \frac{\beta_2}{c^2} + \frac{\beta_3}{c^2+h^2\omega^2},\\
-\frac{2(c^2-3h^2\omega^2)}{(c^2+h^2\omega^2)^3} = \frac{\beta_1}{c^2+h^2(1+\omega)^2} + \frac{\beta_2}{c^2+h^2\omega^2} + \frac{\beta_3}{c^2}
\end{gathered}$$

با حل این معادلات ضرایب β_i به صورت زیر به دست می‌آید:

(۱۲)
$$\beta_1 = \frac{2\left(\frac{5}{h^2} + \frac{2+4(5-2\omega)\omega}{c^2}\right)}{5(1+\omega)}, \quad \beta_2 = \frac{2\left(-\frac{5}{h^2} + \frac{8-30\omega+8\omega^2}{c^2}\right)}{5\omega},$$
$$\beta_3 = \frac{2(5c^2 + 2h^2(-4+\omega(10+\omega)))}{5c^2h^2\omega(1+\omega)}.$$

به ازای $\omega = 1$ و برای مجموعه‌ای از نقاط یکنواخت داریم:

$$\beta_1 = \frac{14}{5c^2} + \frac{1}{h^2}, \quad \beta_2 = -\frac{28}{5c^2} - \frac{2}{h^2}, \quad \beta_3 = \frac{14}{5c^2} + \frac{1}{h^2}.$$

قضیهٔ ۲: خطای برشی فرمول‌های تفاضلی (۱۰) همراه با ضرایب وزن (۱۲) جهت تقریب مشتق دوم برای تابع $u(x)$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
e(x) = {} & \frac{1}{3}(-1+\omega)\left(\frac{12u'(t)}{c^2} + u^{(3)}(t)\right)h\\
& + \left(\frac{2\big(1+\omega(5+\omega)\big)u''(t)}{5c^2} + \frac{1}{12}(1+(-1+\omega)\omega)u^{(4)}(t)\right)h^2\\
& + \frac{(-1+\omega)(8(1+\omega(10+\omega))u^{(3)}(t) + c^2(1+\omega^2)u^{(5)}(t))h^3}{60c^2} + O(h)^4.
\end{aligned}$$

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]

برهان: همانند قضیه قبل ضرایب β_i را در معادله (۱۰) قراردهید. همچنین بسط تیلور تابع $u(x-h)$ و $u(x+h)$ را حول نقطه x می نویسیم، داریم:

$$e(x)=\left(\frac{2\left(\frac{5}{h^2}+\frac{2+4(5-2\omega)\omega}{c^2}\right)}{5(1+\omega)}\right)u(x-h)+\left(\frac{2\left(-\frac{5}{h^2}+\frac{8-30\omega+8\omega^2}{c^2}\right)}{5\omega}\right)u(x)+\left(\frac{2(5c^2+2h^2(-4+\omega(10+\omega)))}{5c^2h^2\omega(1+\omega)}\right)u(x+h)-u''(x)$$

(۱۳)

$$=\frac{1}{3}(-1+\omega)\left(\frac{12u'(t)}{c^2}+u^{(3)}(t)\right)h+\left(\frac{2\big(1+\omega(5+\omega)\big)u''(t)}{5c^2}+\frac{1}{12}(1+(-1+\omega)\omega)u^{(4)}(t)\right)h^2+\frac{(-1+\omega)(8(1+\omega(10+\omega))u^{(3)}(t)+c^2(1+\omega^2)u^{(5)}(t))h^3}{60c^2}+O(h)^4$$

نکتهٔ ۲: با توجه به رابطهٔ (۱۳) برای تقریب $u''(x)$ مشـــتق دوم تابع، خطا برای نقاط غیر یکنواخت از مرتبهٔ ۱ و برای نقاط یکنواخت از مرتبهٔ ۲ است.

با انتخاب مقدار مناســب برای پارامتر شــکل می‌توان جوابی به دســت آورد که مرتبهٔ روش را افزایش دهد. هر چند در عمل این انتخاب سخت ا ست اما نتایج عددی ن شان می‌دهد که با انتخاب منا سب c می‌توان جواب بهتری ن سبت به روش‌های تفاضلات متناهی به دست آورد [۹].

۳- حل معادلات دیفرانسیل با هندسه نامنظم

یکی از چالش‌ها در روش‌های عددی حل معادلات دیفرا سیل با هند سه نامنظم ا ست. یک د سته از روش‌هایی که می‌توانند برای حل مسائل با هندسه نامنظم به کار روند، روش‌های بدون شبکه توابع پایهٔ شعاعی هستند.

روش‌های تفا ضلات متناهی مبتنی بر توابع پایهٔ شعاعی در عمل و پیاده‌سازی دقیقاً م شابه روش‌های تفا ضلات متناهی استاندارد هستند جز این‌که ضرایب وزن آنها متفاوت است و با استفاده از توابع شعاعی به د ست می‌آید. یکی از اهداف ما در این مقاله به کارگیری روش‌های RBF-FD برای م سائل با هند سهٔ نامنظم به عنوان یک روش بدون شبکه ا ست. در بسیاری از مقالات که با RBF-FD به حل معادلات پرداخته‌اند عملاً از شبکه استفاده شده است و این روش‌ها مشابه با روش‌های تفاضلات متناهی استاندارد به کار گرفته شده اند.

هدف اصــلی ما تقریب معادلهٔ دیفرانســیل با هندســهٔ نامنظم به کمک روش RBF-FD اســت. برای این منظور معادلهٔ پواسن دوبعدی را بر روی یک ناحیهٔ دلخواه حل خواهیم کرد. فرض کنید ناحیهٔ Ω به همراه N نقطه مجزا $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{N}$ بر روی مرز و داخل آن داده شده ا ست. می‌خواهیم $Lu(x_k,y_k)=u_{xx}(x_k,y_k)+u_{yy}(x_k,y_k)$ را به صورت ترکیبی از مقادیر تابع در Ns نقطه مجاور به نقطهٔ (x_k,y_k) تقریب بزنیم. به عبارتی c_i را طوری بیابیم که

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]

(۱۴)

$$Lu(x_k,y_k)=c_1u(x_1,y_1)+c_2\mathrm{u}(x_2\ ,y_2)+\cdots+c_k\mathrm{u}(x_k,y_k)+\cdots+c_{Ns}\mathrm{u}(x_k,y_k).$$

همانند حالت یک بعدی فرض می‌کنیم رابطهٔ (۱۴) برای توابع پایه $\emptyset_i(x,y), i=1,\dots,Ns$ برقرار باشد. در این‌جا $\emptyset_i(x,y)$ تابع شعاعی حول نقطهٔ (x_i,y_i) و به صورت زیر است:

(۱۵)

$$\emptyset_i(x,y)=\varphi(\|(x,y)-(x_i,y_i)\|)=\frac{1}{C^2+\|(x,y)-(x_i,y_i)\|^2},$$

پس باید رابطهٔ زیر برقرار باشد:

(۱۶)

$$L\emptyset_{\mathrm{i}}(x_k,y_k)=c_1\emptyset_{\mathrm{i}}(x_1,y_1)+c_2\emptyset_{\mathrm{i}}(x_2\ ,y_2)+\cdots+c_k\emptyset_{\mathrm{i}}(x_k,y_k)+\cdots+c_{Ns}\emptyset_{\mathrm{i}}(x_{Ns},y_{Ns}).$$

معادلات (۱۶) را می‌توان به فرم ماتریسی

(۱۷)

$$AC=L,$$

نوشت که $A_{i,j}=\emptyset_i(x_j,y_j), L_i=L(x_i,y_i)$. در اینجا A ماتریسی $Ns\times Ns$ و شامل تمام نقاط دامنه نیست. با حل این دستگاه عملگر لاپلاس به صورت ترکیبی از مقادیر تابع حول نقطه (x_k,y_k) تقریب زده می‌شود.

برای مثال در شکل (۱) تعداد $N=۱۱۲$ نقطهٔ مرزی و درونی بر روی ناحیه نامنظم پروانه‌ای شکل قرار داده شده است. همچنین نقطه (x_{49},y_{49}) و (x_{100},y_{100}) به همراه Ns=9 نقطهٔ مجاور آن نشان داده شده است. با نوشتن معادلات (۱۶) برای هر یک از این نقاط و حل دستگاه معادلات (۱۷) عملگر لاپلاس به صورت ترکیبی از مقادیر تابع در نقاط مجاور تقریب زده می‌شود. در زمانی که ما از نقاط غیر یکنواخت استفاده می‌کنیم لازم است تا برای هر نقطه این کار انجام شود. در حالت کلی هرگاه بخواهیم معادلهٔ

(۱۸)

$$Lu(x,y)=f(x,y)\ \ (x,y)\in\Omega,$$

را بر روی یک هندسهٔ نامنظم حل کنیم لازم است تا مراحل زیر را انجام دهیم.

- مجموعه نقاط $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{N}$ را در دامنه توزیع می‌کنیم. این نقاط می‌تواند غیریکنواخت باشد. این نقاط شامل Nb نقطه درونی و NI نقطهٔ مرزی هست.
- هر گاه (x_k,y_k) یک نقطهٔ درونی باشد و $\{(x_{ki},y_{ki})\}_{i=1}^{Ns}$ ، مجموعه نقاط مجاور باشد، برای این نقطهٔ درونی دستگاه معادلات (۱۷) را تشکیل داده و آن را حل می‌کنیم تا c_{ki}ها به دست آید. با این کار عملگر Lu را در نقطهٔ (x_k,y_k) بر حسب مقادیر تابع در Ns نقطه مجاور آن تقریب می‌زنیم.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]

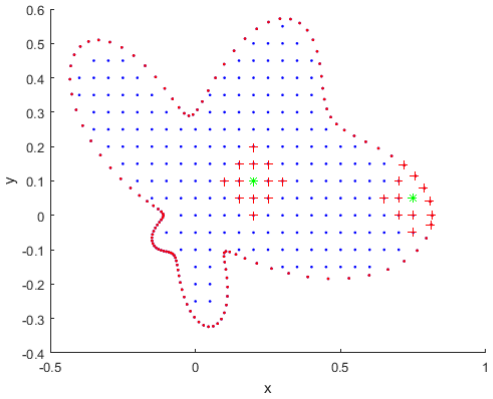
- در ادامه همانند روش تفاضلات متناهی به گسسته‌سازی معادلات (۱۸) می‌پردازیم. برای نقطهٔ درونی (x_k, y_k) داریم:

$$L(x_k, y_k) = u_{xx}(x_k, y_k) + u_{yy}(x_k, y_k) = f(x_k, y_k), \quad k = 1, \dots, Nb$$

یا

$$c_{k1}u(x_{k1}, y_{k1}) + c_{k2}u(x_{k2}, y_{k2}) + \cdots + c_{kk}u(x_{kk}, y_{kk}) + \cdots + c_{kNs}u(x_{kNs}, y_{kNs}) = f(x_k, y_k), \quad k = 1, \dots, N$$

- با حل معادلات فوق مقادیر تابع در نقاط درونی به دست می‌آید.



شکل ۱: دو نقطهٔ درونی از دامنه به همراه نقاط مجاور آنها.

در این‌جا برخلاف روش تفاضلات متناهی نیازی نیست تا نقاط به صورت منظم در دامنه چیده شده باشند و می‌توان روش را برای هر مسأله با هندسهٔ دلخواه به کار برد. همچنین این امکان وجود دارد تا جهت بالا بردن دقت هر تعداد از نقاط مجاور نقطه (x_k, y_k) را که می‌خواهیم انتخاب کنیم. در ادامه روش فوق برای حل معادله پواسن به کار می‌بریم.

۴- نتایج عددی

در این بخش روش را برای حل معادله پواسن با دامنه‌های متفاوت به کار خواهیم برد. در کلیه مثال‌ها با توجه به شکل هندسی مسأله امکان رسم توابع به صورت یک رویه پیوسته وجود ندارد و شکل تابع با نقاط نمایش داده شده است.

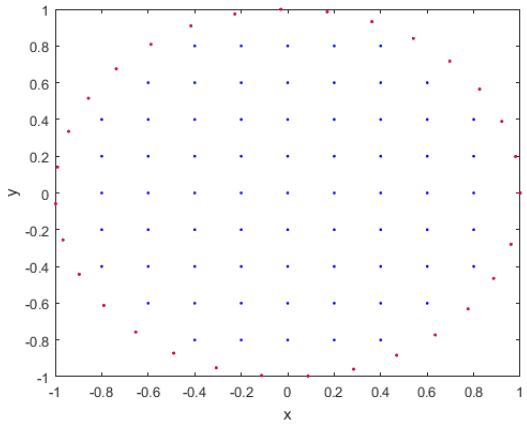
مثال اول: در این مثال به حل معادله پواسن بر روی یک ناحیه دایره شکل خواهیم پرداخت. برای این منظور معادله پواسن زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \qquad (x, y) \in \Omega$$
$$u = g(x, y) \ (x, y) \in \partial\Omega$$

در اینجا Ω دایره‌ای به شعاع واحد و مرکز مبدأ است. معادله فوق را در حالتی حل خواهیم کرد که جواب دقیق آن $u(x, y) = e^{-2(x^2+y^2)}$ است. دامنهٔ حل این مسأله در شکل ۲ برای $N = 231$ نقطهٔ درونی و مرزی رسم شده است. برای قرار دادن نقاط در این ناحیهٔ دایرهٔ شکل، ابتدا مجموعه‌ای از نقاط یکنواخت با فاصله h از یکدیگر در یک مستطیل

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]

که دایره را در بر دارد، قرار داده می‌شوند. سپس از این مجموعه از نقاط آنهایی که در داخل دایره قرار دارند به عنوان نقاط درونی انتحاب می‌شوند. نقاط روی مرز دایره نیز با توجه به معادله دایره انتخاب شده‌اند. همچنین c پارامتر شکل با توجه به h فاصله بین نقاط انتخاب می‌شود. در تمامی مثال‌ها $c = mh$ انتخاب شده است. برای این مثال $c = 40h$ اختیار شده است. با این انتخاب هر گاه تعداد نقاط زیاد شود، h کوچکتر و درنتیجه c هم کوچکتر می‌شود تا ماتریس‌های حاصل بدحالت نباشند.



شکل۲: دامنهٔ حل مسأله در مثال ۱ برای ۱۰۰ نقطهٔ مرزی و درونی

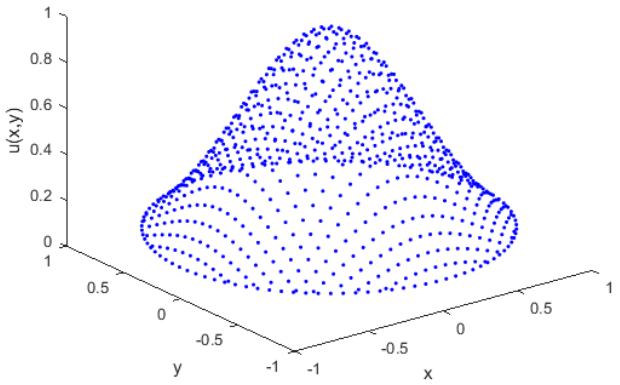
در ادامه در جدول ۲ مقدار خطای مطلق برای مقادیر مختلف N و Ns محاسبه شده است. نتایج عددی نشان می‌دهد با افزایش نقاط دامنه دقت افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش Ns نیز دقت افزایش یافته است. یک راه برای بالا بردن دقت افزایش مقدار Ns است. از طرفی هر چه Ns افزایش یابد ماتریس‌ها پرتر و بد حالت می‌شوند تا جایی که روش RBF-FD عملکردی مشابه با روش RBF خواهد داشت.

جدول ۲ : خطای مطلق به دست آمده برای مثال ۱.

Ns, N	Ns=7, N=100 (h=0.2)	Ns=7, N=367 (h=0.1)	Ns=7, N=791 ($h = \frac{1}{15}$)
خطا	0.0230	0.0053	0.0021
زمان	۱,۹	۲,۸	۸,۷
Ns, N	Ns=9, N=100 (h=0.2)	Ns=9, N=367 (h=0.1)	Ns=9, N=791 ($h = \frac{1}{15}$)
خطا	0.0126	0.0031	0.0012
زمان	۲,۲	۳,۹	۹,۸۹
Ns, N	Ns=13, N=100 (h=0.2)	Ns=13, N=367 (h=0.1)	Ns=13, N=791 ($h = \frac{1}{15}$)
خطا	0.0027	1.0107e-04	2.9343e-05
زمان	۳,۸	۶,۲	۱۲,۳۶

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]

جواب عددی برای مثال ۱ به ازای $N = 791$ و $Ns = 13$ در شکل ۳ رسم شده است.



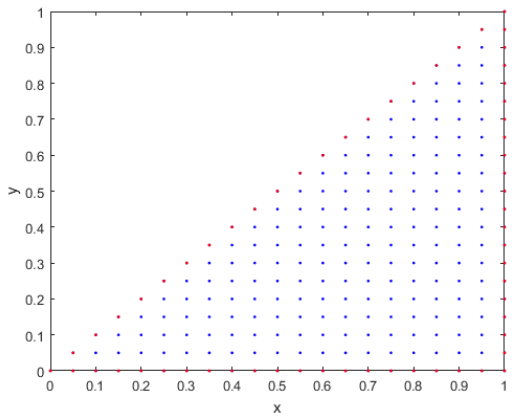
شکل ۳ : جواب عددی برای مثال ۱ به ازای $N = 791$ و $Ns = 13$.

مثال دوم: در این مثال به حل معادله پواسن بر روی یک ناحیه مثلث شکل خواهیم پرداخت.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y) \quad (x,y) \in \Omega$$
$$u = g(x,y)\ (x,y) \in \partial\Omega$$

در این‌جا Ω مثلثی محدود به خطوط $y = 0$ ، $x = 1$ و $y = x$ است. بر خلاف مثال ۱ دامنه انتخاب شده در این مثال غیر مستطیلی و دارای مرز غیر هموار است. این رو به عنوان یک مسأله آزمون مناسب است.

در این‌جا $u(x,y) = 1 - \tanh(5((x-.5)^2 + (y-0.5)^2))$ جواب دقیق م سأله ا ست. دامنه حل این م سأله برای $N = 231$ نقطهٔ درونی و مرزی در شکل ۴ ر سم شده ا ست. برای قرار دادن نقاط در این ناحیه مثلث شکل، همانند مثال ۱ ابتدا مجموعه‌ای از نقاط یکنواخت با فا صله h از یکدیگر در یک م ستطیل که مثلث را در بر می‌گیرد، قرار داده می‌شـوند سـپس از این مجموعه از نقاط آنهایی که در داخل مثلث قرار دارند به عنوان نقاط درونی انتحاب می‌شـوند. برای این مثال $c = 30h$ اختیار شده است.



شکل۴. دامنهٔ معادلهٔ پواسن در مثال ۲ برای ۲۳۱ نقطهٔ مرزی و درونی.

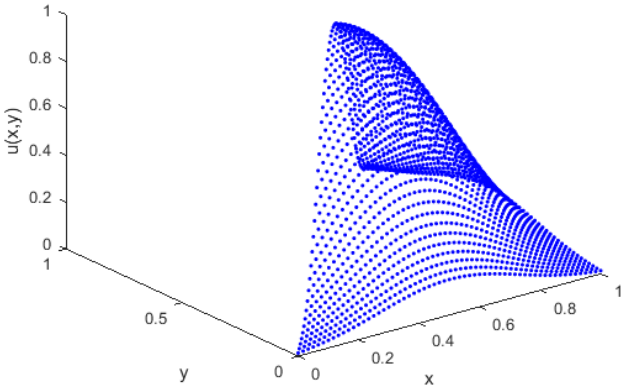
[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]

در جدول ۳ وضـــعیت همگرایی روش عددی با محاســـبهٔ مقدار خطای مطلق برای مقادیر مختلف N و Ns نمایش داده شده ا ست. نتایج عددی ن شان می‌دهد با افزایش N ، نقاط دامنه دقت افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش Ns نیز دقت افزایش یافته ا ست. در جدول ۳ هر چه در یک سطر جلوتر می‌رویم N بزرگتر و خطا کمتر می شود. همچمین هر چه در یک ستون پایین‌تر می‌رویم Ns بزرگتر و دقت بهتر می‌شود.

جدول ۳ : خطای مطلق به دست آمده برای مثال ۲.

Ns, N	Ns=7, N=231 (h=0.05)	Ns=7, N=861 (h=0.0250)	Ns=7, N=1891 ($h=\frac{1}{60}$)
خطا	0.0015	1.5585e-04	1.6355e-04
Ns, N	Ns=9, N=231 (h=0.05)	Ns=9, N=861 (h=0.0250)	Ns=9, N=1891 ($h=\frac{1}{60}$)
خطا	8.9684e-04	1.1102e-04	9.8024e-05
Ns, N	Ns=13, N=231 (h=0.05)	Ns=13, N=861 (h=0.0250)	Ns=13, N=1891 ($h=\frac{1}{60}$)
خطا	2.8999e-04	1.3388e-05	1.5761e-05

جواب تقریبی مثال ۲ در شکل ۵ رسم شده است.



شکل ۵. جواب به دست آمده در مثال ۲ به ازای $N = 1891$ و $Ns = 13$.

مثال سوم: در این مثال به حل معادله پواسن بر روی یک ناحیه نامنظم خواهیم پرداخت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y) \quad (x,y)\in\Omega,$$
$$u=g(x,y)\ (x,y)\in\partial\Omega.$$

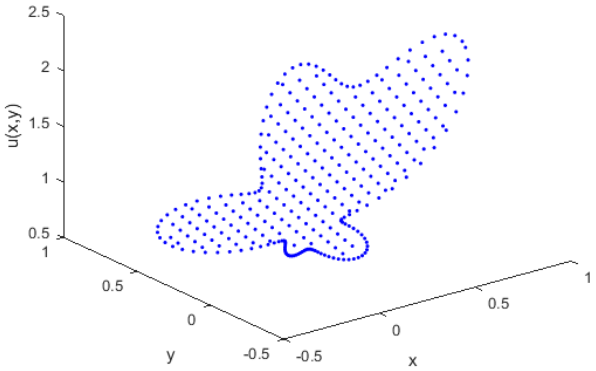
[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]

در این‌جا Ω ناحیه پروانه‌ای شکل نشان داده شده در شکل ۱ است و مرز آن به صورت زیر است:

(۱۹)

$$r = .3e^{\sin\theta}\sin^2(2\theta) + .3e^{\cos\theta}\cos^2(2\theta)$$
$$x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta,$$

جواب دقیق معادلهٔ $u(x,y) = e^{x+\frac{y}{2}}$ است. در این مثال روش تفاضلات متناهی تعمیم یافته بر روی یک ناحیهٔ نامنظم به کار گرفته می‌شود. در صورتی که حل این معادله بر روی چنین هندسه‌ای با استفاده از روش تفاضلات متناهی استاندارد بسیار سخت خواهد بود. جدول ۴ وضعیت همگرایی روش را برای این مثال نشان می‌دهد. در ادامه شکل ۶ جواب تقریبی را نشان می‌دهد. نتایج این جدول می توانند با برخی روش های دیگر مقایسه گردند. برای مثال در این‌جا روش‌های تفاضلات متناهی از مرتبه‌های مختلف و روش‌های تقریبی تحلیلی به دلیل وجود ناحیه نامنظم بسیار به سختی قابل اعمال هستند [۱۳، ۱۴]. روش بدون شبکه نیز در حالت تابع پایهٔ شعاعی عام دارای ماتریس‌ای بدوضع می‌باشد که در مقایسهٔ مزیتی خواهد داشت. تنها روشی که در مقایسه با روش پیشنخادی در این‌جا می‌تواند رقابتی عمل کند روش اجزاء محدود است که به دلیل پر کردن ماتریس جرم و مثلث‌بندی ناحیه از لحاظ زمانی از روش بیان شده مقداری کندتر خواهد بود.



شکل ۶. جواب تقریبی به دست آمده در مثال ۳.

جدول ۴: خطای مطلق به دست آمده برای مثال ۳.

Ns, N	Ns=7, N=15 (h=0.4)	Ns=7, N=112 (h=0.1)	Ns=7, N=335 (h=0.05)
خطا	0.0074	2.5180e-04	2.5225e-04
Ns, N	Ns=9, N=15 (h=0.4)	Ns=9, N=112 (h=0.1)	Ns=9, N=335 (h=0.05)
خطا	5.1845e-04	7.1339e-05	1.6851e-05

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]

Ns, N	Ns=13, N=15 (h=0.4)	Ns=13, N=112 (h=0.1)	Ns=13, N=335 (h=0.05)
خطا	3.1089e-04	1.6380e-05	6.8776e-06

۵- نتیجه‌گیری

چگونگی به د ست آوردن ضرایب وزن فرمول‌های تفا ضلات متناهی با ا ستفاده از توابع پایه شعاعی معرفی شد و فرمول‌های تفاضلی جدید با استفاده از تابع شعاعی چند ربعی تعمیم یافته به دست آمد. الگوریتمی برای استفاده از این فرمول‌ها بر روی هندسه‌های غیر مستطیلی ارائه شد. نتایج عددی نشان داد که روش RBF-FD را می‌توان همانند یک روش بدون شبکه برای هر هندسه دلخواه به کار برد. همچنین این امکان وجود دارد تا تعداد نقاط همسایگی یا تکیه‌گاه را به گونه‌ای انتخاب کنیم که ضمن داشتن دقت مناسب ماتریس‌های بدوضع نداشته باشیم.

References

1. Fasshauer G.E. (2007). Meshfree Approximation Methods with MATLAB, World Scientific Publishing Co., Singapore.

2. Bayona, V., et al. (2010). RBF-FD formulas and convergence properties, *Journal of Computational Physics*, **229 (22)**, 8281-8295.

3. Golbabai, A. and Mohebianfar E. (2017). A new method for evaluating options based on multiquadric RBF-FD method, *Applied Mathematics and Computation*, **308**, 130-141.

4. Davydov, O. and Dang T.O. (2011). On the optimal shape parameter for Gaussian radial basis function finite difference approximation of the Poisson equation, *Computers & Mathematics with Applications*, **62 (5)**, 2143-2161.

5. Flyer, N., Gregory A.B. and Louis J.W. (2016). Enhancing finite differences with radial basis functions: experiments on the Navier–Stokes equations, *Journal of Computational Physics*, **316**, 39-62.

6. Barfeie, M., Soheili, A.R. and Arab Ameri M. (2013). Application of variational mesh generation approach for selecting centers of radial basis functions collocation method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **37(12)**, 1567-1575.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]

7. Bayona, V., Miguel M. and Manuel K. (2012). Gaussian RBF-FD weights and its corresponding local truncation errors, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **36(9)**, 1361-1369.

8. Bayona V., Moscoso M., Carretero M., Kindelan M. (2010). RBF-FD formulas and convergence properties, *Journal of Computational Physics*, **229(82)**, 81–95.

9. Soleymani, F., Barfeie M. and Khaksar Haghani F. (2018). Inverse multi-quadric RBF for computing the weights of FD method: Application to American options, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **64**, 74-88.

10. Wright G.B., Fornberg B., (2006). Scattered node compact finite difference-type formulas generated from radial basis functions, *Journal of Computational Physics*, **212**, 99-123.

11. Wang, J.G., and Liu G.R. (2002). On the optimal shape parameters of radial basis functions used for 2-D meshless methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **191(23)**, 2611-2630.

12. S. Sabermahani, Y. Ordokhani, S.A. Yousefi, Numerical approach based on fractional-order Lagrange polynomials for solving a class of fractional differential equations, *Comp. Appl. Math.*, 37 (2018), 3846-386

13. S. Sabermahani, Y. Ordokhani, S.- A. Yousefi, Fractional- order Fibonacci- hybrid functions approach for solving fractional delay differential equations, *Engineering with Computers*, 36 (2020), 795-806.

14. S. Sabermahani, Y. Ordokhani, S.A. Yousefi, Fractional-order general Lagrange scaling functions and their applications, *BIT Numerical Mathematics*, 60 (2020), 101-128.

15. S. Sabermahani, Y. Ordokhani, S.A. Yousefi, Two-dimensional Müntz–Legendre hybrid functions: theory and applications for solving fractional-order partial differential equations, *Computational and Applied Mathematics*, 39 (2020), Art. ID: 111.

[Downloaded from mmr.khu.ac.ir on 2024-04-26]