Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

The robust vertex centdian location problem with interval vertex weights on general graphs

Nazanin Eskandari Arjomand[1] ✉, Fahimeh Baroughi[2]
Soudabeh Seyyedi Ghomi[3], Behrooz Alizadeh[4]

1. Department of Mathematics, Sahand University of Technology, Sahand, Iran.
✉E-mail: n_gouchi_eskandari@yahoo.com
2. Department of Mathematics, Sahand University of Technology, Sahand, Iran.
E-mail: baroughi@sut.ac.ir
3. Department of Mathematics, Sahand University of Technology, Sahand, Iran.
E-mail: s.seyyedighomi@gmail.com
4. Department of Mathematics, Sahand University of Technology, Sahand, Iran.
E-mail: alizadeh@sut.ac.ir

Article Info

Article type:
Research Article

Article history:
Received:
12 June 2020
Revised form:
20 January 2021
Accepted:
31 January 2021
Published online:
22 November 2022

Keywords:
Centdian location problem;
Min-max regret riterion;
Robust optimization.

ABSTRACT

Introduction

The problem of locating a new facility on a transportation graph in which each node represents a different customer has been considered in the literature according to different cost models. Most of the cost models define a monotone nondecreasing function of travel distances between the customers and the new server as the objective function that must be minimized. The median and center models are particular versions of such cost functions. The optimal locations of these two models exhibit good properties of efficiency and equity, respectively. Unfortunately, both models drive to, in general, different optimal locations. In order to reconcile both tendencies, the convex combination of the two criteria was introduced by Halpern who called the new cost function, centdian criterion. In this paper, we will study the robust vertex centdian location problem with uncertain vertex weights on general graphs. One of the criteria used in the literature in these text is the min- max regret criterion.

Material and methods

In this method, let $G=(V(G),E(G))$ be a connected, undirected graph with the vertex set $V(G)=\{v_1,...,v_n\}$ and the edge set $E(G)$. Also, let us assume that each vertex $v_i \in V(G)$ has two nonnegative weights w_i and u_i such that

$$w_i \in [\underline{w_i}, \overline{w_i}] \text{ and } u_i \in [\underline{u_i}, \overline{u_i}], \quad (\underline{u_i}, \underline{w_i} \geq 0)$$

and each edge $e \in E(G)$ has the positive length $l(e)$.For each vertex $v \in V(G)$ on the graph G, the objective function of the centdian problem under the scenario $s \in S$ is considered as follows:

$$f(v,s)=\lambda_1 f_1(v,s)+\lambda_2 f_2(v,s),$$

in which f_1(v,s) and f_2(v,s) , are the objective functions of the 1-center location problem and the objective function of the 1-median location problem under the scenario s, respectively. Then, The min-max regret criterion can be written as follows:

$$\min_{v\in V(G)} \max_{w\in V(G)} \max_{s\in S} (\mathrm{f}(v,s)-f(w,s)).$$

We use some combinatorial methods to solve the problem.

Results and discussion

Suppose that for both vertices v and w the objective function of the centdian problemis as follows:

$$\mathrm{f}(v,s)-f(w,s)=\lambda_1\left[\max_{1\le i\le n} \mathrm{u}_i(s)d(v_i,v)-\max_{1\le i\le n} \mathrm{u}_i(s)d(v_i,w)\right]+\lambda_2\left[\sum_{i=1}^{n} w_i(s)(d(v_i,v)-d(v_i,w))\right].$$

Instead of solving the problem on the set of scenarios of S, we can solve the problem on the set of scenarios $S_m \times S_c$.

Thus,the robust vertex centdian problem on general graphs under min-max regret criterion is solved in $O(n^3)$ time.

Conclusion

In this paper, we investigated the robust vertex centdian location problem with uncertain vertex weights on general graphs. We used the min-max regret criterion and solved the problem with objective function contains λ and proposed a polynomial time algorithm for the problem under investigation.

How to cite: Eskandari Arjomand, N., Baroughi, B., Seyyedi Ghomi, S., Alizadeh, B., (2022) The robust vertex centdian location problem with interval vertex weights on general graphs. *Mathematical Researches*, 8 (3), 15-26

Publisher: Kharazmi University

شاپا چاپی: ۲۰۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۰۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

مسأله مکان‌یابی مرکز-میانه رأسی استوار با وزن‌های رأسی بازه‌ای روی گراف‌های کلی

نازنین اسکندری ارجمند[۱]، فهیمه باروقی[۲]✉، سودابه سیدی قمی[۳]، بهروز علی‌زاده[۴]

۱. گروه ریاضی، دانشکدهٔعلوم پایه، دانشگاه صنعتی سهند تبریز، تبریز، ایران. پست الکترونیکی: n_gouchi_eskandari@yahoo.com

۲. نویسندهٔ مسئول، گروه ریاضی، دانشکدهٔعلوم پایه، دانشگاه صنعتی سهند تبریز، تبریز، ایران. پست الکترونیکی: baroughi@sut.ac.ir

۳. گروه ریاضی، دانشکدهٔعلوم پایه، دانشگاه صنعتی سهند تبریز، تبریز، ایران. پست الکترونیکی: s.seyyedighomi@gmail.com

۴. گروه ریاضی، دانشکدهٔعلوم پایه، دانشگاه صنعتی سهند تبریز، تبریز، ایران. پست الکترونیکی: alizadeh@sut.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۳/۲۳
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۱۱/۰۱
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۱/۱۲
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۹/۰۱

واژه‌های کلیدی:
مسأله مکان‌یابی مرکز- میانه،
معیار مینی- ماکس پشیمانی،
بهینه‌سازی استوار.

در این مقاله، مسألهٔ مکان‌یابی مرکز-میانهٔ استوار رأسی با وزن‌های رأسی غیرقطعی روی گراف‌های کلی مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد. معیار مورد استفاده برای حل مسئله در این مقاله معیار مینی-ماکس پشیمانی است. این مسأله با تابع هدفی که دارای ضریبی از λ بوده مورد بررسی قرار گرفته و یک الگوریتم با زمان اجرای چند جمله‌ای برای آن ارائه می‌شود. نشان داده می‌شود که مسأله مرکز-میانه استوار رأسی روی گراف‌های کلی در زمان $O(n^3)$ حل می‌شود.

استناد: اسکندری ارجمند، نازنین؛ باروقی، فهیمه؛ سیدی قمی، سودابه؛ علی‌زاده، بهروز؛ (۱۴۰۱). مسأله مکان‌یابی مرکز-میانه رأسی استوار با وزن‌های رأسی بازه‌ای روی گراف‌های کلی. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۳)، ۲۶-۱۵.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱.مقدمه

مسائل مکان‌یابی مرکز و میانه از مدل‌های معروف در نظریهٔ مکان‌یابی می‌باشند که با توجه به کاربردهای فراوانی که در تئوری و عمل دارند، همواره مورد توجه محققین قرار گرفته‌اند .در مسائل مکان‌یابی p -مرکز هدف قرار دادن p تا سرویس‌دهندهٔ روی شبکه است به طوری‌که ماکزیمم فاصلهٔ وزن‌دار مشتریان از نزدیکترین سرویس‌دهنده مینیمم شود. در مسائل مکان‌یابی p -میانه هدف قرار دادن p تا سرویس‌دهندهٔ روی شبکه است به طوری‌که مجموع فواصل وزن‌دار مشتریان از نزدیکترین سرویس‌دهنده مینیمم شود. در ادبیات تحقیقی برای در نظر گرفتن معیار میانه و مرکز به طور همزمان توابع هدف و رویکردهای مختلفی را بررسی کرده‌اند .دو رویکردی که بیشتر مورد مطالعه قرار گرفته‌اند روش مقید و روش ترکیبی هستند. روش مقید نیازمند مینیمم کردن یک هدف است به طوری‌که تابع هدف دیگر از یک مقدار ثابت بزرگتر نباشد یا تا آن‌جا که امکان دارد مینیمم باشد. روش ترکیبی ترکیب محدب دو تابع هدف را به عنوان یک هدف جدید در نظر می‌گیرد.

سوین و روله اولین بار مسأله مرکز-میانه مقید را معرفی کردند و آن را مسأله مکان‌یابی تسهیلات مرکزی نامیدند [۱]. آنها p تا سرویس‌دهنده را به عنوان مکان‌های مرکز قرار دادند به طوری‌که تابع هدف میانه با تبدیل مسأله به یک مسأله برنامه‌ریزی خطی مینیمم شود. هم‌چنین، سوین، تورگاس و برگمن مسأله مرکز-میانه مقید را با نام مسأله p -میانه اصلاح شده توصیف کردند [۲]. در مسأله p - میانه اصلاح شده p نقطهٔ میانه باید طوری پیدا شوند که تابع هدف مرکز از یک مقدار داده شده تجاوز نکند. اخیراً محققان مسأله مرکز-میانه مقید را به عنوان یک حالتی از مسأله مرکز-میانه در نظر گرفتند. برای اطلاعات بیشتر به [۶,۵,۴,۳] مراجعه کنید. مسأله مکان‌یابی مرکز-میانه با استفاده از روش ترکیبی اولین بار توسط هالپرن در سال ۱۹۷۶ معرفی شد. هالپرن تابع هدف این مدل را به صورت ترکیب محدب تابع هدف مرکز و میانه در نظر گرفت. مجموعه نقاط مرکز-میانه متناظر با p نقطه روی درخت است به طوری‌که کمترین مقدار تابع هدف را داشته باشد. برخی از محققان این گونه مسائل را مسائل مکان‌یابی λ -مرکز-میانه می‌نامند تا آن را از حالتی که تابع هدف مسأله مرکز-میانه به صورت جمع ساده توابع میانه و مرکز هست، متمایز کنند. بیشتر مطالعات اولیه در مسأله مکان‌یابی مرکز-میانه، برای حالتی است که تابع هدف میانه وزن‌دار و تابع هدف مرکز غیر وزن‌دار باشد. هالپرن مسأله مکان‌یابی ۱-مرکز-میانه روی درخت را در نظر گرفت و روش ساده‌ای برای پیدا کردن نقطه مرکز-میانه معرفی کرد [۷]. دو سال بعد هالپرن مسأله مکان‌یابی ۱-مرکز-میانه روی گراف‌های کلی را که تابع هدف مرکز غیر وزن‌دار بود، مورد مطاله قرار داد [۸]. مسأله مکان‌یابی مرکز-میانه، مسأله مکان‌یابی مرکز-میانه جفت وزن‌دار نامیده می‌شود، هرگاه هم تابع هدف میانه و هم تابع هدف مرکز وزن‌دار باشند و این وزن‌ها با هم برابر نباشند. بعلاوه، مسأله مکان‌یابی مرکز-میانه به عنوان مسأله مرکز-میانه وزن‌دار نامیده می‌شود، هرگاه توابع هدف میانه و مرکز وزن‌دار باشند و این وزن‌ها برای هر دو مسأله با هم برابر باشند. بریتو و همکاران یک الگوریتمی با زمان اجرای $O(m^2n^4)$ برای مسأله مکان‌یابی ۲-مرکز-میانه روی شبکه‌های کلی و الگوریتمی با زمان اجرای $O(n^2)$ برای حل این مسأله روی شبکه‌های

درختی پیشنهاد داده‌اند [۹]. تامیر و همکاران مسأله مکان‌یابی p -مرکز-میانه جفت وزن‌دار روی درخت‌ها را در نظر گرفته و الگوریتم‌هایی با زمان اجرای $O(pn^6)$ به‌ازای $p \geq 4$ و $O(n^p)$ به‌ازای $p < 4$ معرفی کرده‌اند [۱۰]. مسأله مکان‌یابی $p - \lambda$ -مرکز-میانه روی شبکه‌های کلی برای اولین بار توسط بریتو و مورنو مورد بررسی قرار گرفت و الگوریتمی با زمان اجرای $O(n^{p+2}m^p)$ برای آن مطرح کردند [۱۱]. هالپرن همچنین ثابت کرد که روی گراف‌های کلی در بعضی حالت‌ها، مسأله مکان‌یابی ۱-مرکز-میانه نشان‌دهنده دوگان مسائل مرکز-میانه مقید است [۱۲]. در این بررسی، فرض بر این است که مکان مرکز-میانه با یک نقطه نشان داده می‌شود. آورباخ و برمن مسأله پیدا کردن مسیر بهینه روی درخت را با ترکیب معیار میانه و مرکز در نظر گرفتند [۱۳]. تامیر الگوریتمی با زمان اجرای $O(n\log n)$ در یک شبکه‌ی درختی را پیشنهاد داد که تابع هدف مرکز-میانه برابر با مجموع توابع میانه وزن‌دار و مرکز وزن‌دار هستند [۱۴]. کولبروک و سیسیلیا مسأله مکان‌یابی مرکز-میانه چندمعیاره روی یک شبکه با چند وزن در هر گره و چند طول در هر یال را در نظر گرفتند [۱۵]. وانگ مسأله مرکز-میانه رأسی در یک جنگل کاملا پویا را مورد بررسی قرار داد [۱۶]. کانده اولین کسی بود که مسأله مرکز-میانه وزن‌دار دوگانه را با وزن‌های رأسی بازه‌ای روی گراف‌های درختی در نظر گرفت [۱۷]. لی و همکارانش مسأله λ-مرکز-میانه را با وزن‌های رأسی بازه‌ای یکسان برای هر دو مسأله مرکز و میانه روی گراف‌های کلی بررسی کردند و الگوریتمی با زمان اجرای $O(n^3 logn)$ برای آن ارائه دادند [۱۸].

رویکردهای بهینه‌سازی استوار با تحقیقات سویستر در سال ۱۹۷۳ بر روی یک مدل بهینه‌سازی خطی آغاز شد. در این رویکرد که مقدار هر داده از یک بازه انتخاب می‌شد، بدترین حالت برای مقدار هر داده در نظر گرفته شد [۱۹]. بنابراین، جواب بهینه بدست آمده با استفاده از این روش بسیار متفاوت‌تر از جواب بهینه مسأله اسمی است. رویکرد وی سال‌ها بعد توسط مال‌وی، در مسائل بهینه‌سازی گسسته مورد بررسی قرار گرفت [۲۰]. بن‌تال و نمیروفسکی در سال ۲۰۰۰ رویکرد دیگری ارائه دادند که از کارایی لازم برخوردار نبود [۲۱]. برتسیماس و سیم در سال ۲۰۰۴ رویکرد دیگری ارائه دادند که سطح محافظه‌کاری را کنترل می‌کرد. نتیجه‌ی رویکرد وی یک مدل برنامه‌ریزی خطی بود که همتای استوار مدل اولیه نامیده می‌شد [۲۲]. رویکرد بهینه‌سازی استوار از جمله تکنیک‌های برنامه‌ریزی تصادفی، بدون نیاز به تابع توزیع پارامتر غیرقطعی می‌باشد.

برای پیدا کردن جواب استوار یک مسأله معیارهای مختلفی وجود دارد. معیار استفاده شده در اکثر مسائل مکان‌یابی با رویکردهای ترکیبیاتی، معیار مینی-ماکس پشیمانی است. این معیار در حالت کلی یک جواب تقریبی به‌ازای همه سناریوها ارائه می‌کند. این جواب تقریبی از طریق مینیمم کردن ماکسیمم اختلاف مقدار تابع هدف روی همه سناریوها با مقدار بهینه‌ی تابع هدف مسأله روی آن سناریوها بدست می‌آید. اگرچه معیار مینی-ماکس پشیمانی برای مسائل مکان‌یابی میانه و مرکز به‌طور قابل ملاحظه‌ای بررسی شده است، ولی برای مسأله مکان‌یابی مرکز-میانه این معیار به‌طور محدودی بررسی شده است.

۲. بیان مسأله و بررسی ویژگی‌های آن

فرض کنید $G=(V(G),E(G))$ یک گراف همبند، بدون جهت و ساده با مجموعه رأسی $V(G)=\{v_1,...,v_n\}$ و مجموعه یالی $E(G)$ باشد، همچنین، فرض کنید به هر رأس $v_i \in V(G)$ دو وزن نامنفی w_i و u_i اختصاص داده شده است که در آن $w_i \in [\underline{w_i},\overline{w_i}]$ و $u_i \in [\underline{u_i},\overline{u_i}]$، $(\underline{u_i},\underline{w_i} \geq 0)$ و هر یال $e \in E(G)$ دارای طول مثبت $l(e)$ است. مجموعهٔ S را برابر با حاصلضرب دکارتی بازه‌های $[\underline{w_i},\overline{w_i}]$ و $[\underline{u_i},\overline{u_i}]$ به‌ازای $i=1,...,n$ قرار دهید. مجموعهٔ S نشان دهندهٔ تمامی رخدادهای ممکن برای وزن رأس‌های گراف می‌باشد که در آن هر رخداد ممکن از مجموعه S را یک سناریو می‌نامیم. به ازای هر سناریوی $s \in S$، $w_i(s)$ و $u_i(s)$ به ترتیب برابر با وزن رأس v_i متناظر با مسأله ۱-میانه و ۱-مرکز روی سناریوی s می‌باشد. به ازای هر رأس $v \in V(G)$ روی گراف G، تابع هدف مسأله مرکز-میانه روی سناریوی $s \in S$ به فرم زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$f(v,s)=\lambda_1 f_1(v,s)+\lambda_2 f_2(v,s),$$

که در آن $\lambda_1+\lambda_2=1$ و $\lambda_1,\lambda_2 \in [0,1]$ و

$$f_1(v,s)=\max_{1\leq i\leq n} u_i(s)\, d(v_i,v),$$

$$f_2(v,s)=\sum_{i=1}^{n} w_i(s)\, d(v_i,v),$$

به ترتیب تابع هدف مسأله مکان‌یابی ۱-مرکز و تابع هدف مسأله ۱-میانه تحت سناریوی s هستند. فرض کنید به ازای هر رأس $v \in V(G)$،

$$Z(v)=\max_{s\in S} \mathrm{R}(v,s),$$

که در آن

$$R(v,s)=f(v,s)-f(v_s^*,s).$$

توجه کنید که v_s^* مکان مرکز-میانه رأسی روی گراف G تحت سناریوی s می‌باشد. یعنی

$$f(v_s^*,s)=\min_{w\in V(G)} \mathrm{f}(w,s)$$

پس می‌توان $R(v,s)$ را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$R(v,s)=\max_{w\in V(G)} (\mathrm{f}(v,s)-f(w,s)).$$

بنابراین به ازای $v \in V(G)$ داریم:

$$Z(v)=\max_{s\in S}\max_{w\in V(G)} (\mathrm{f}(v,s)-f(w,s)).$$

در نتیجه معیار مینی-ماکس پشیمانی به فرم زیر خواهد بود:

$$\min_{v\in V(G)}\max_{w\in V(G)}\max_{s\in S} (\mathrm{f}(v,s)-f(w,s)).$$

تعریف ۱. به‌ازای هر نقطهٔ دلخواه v روی گراف G سناریوی بدترین حالت s_v، سناریویی است که مقدار تابع هدف $R(v,s)=f(v,s)-f(v_s^*,s)$ را ماکسیمم می‌کند.

به ازای هر جفت رأس v و w، فرض کنید $s(v,w)$ سناریویی باشد که در آن وزن رأس v_i به این فرم به دست آید: وزن رأس‌هایی که در شرط

$$d(v,v_i)-d(w,v_i)\geq 0$$

صدق می‌کنند را برابر کران بالای بازه‌ی وزن متناظرشان و وزن بقیه‌ی رأس‌ها را برابر کران پایین بازهٔ وزن متناظرشان قرار دهید. فرض کنید: $S_m=\cup\{s(v,w):v,w\in V(G)\}$ آن‌گاه داریم:

لم ۱. مجموعهٔ سناریوهای S_m، شامل سناریوهای بدترین حالت برای مسأله مکان‌یابی ۱-میانه استوار به‌ازای تمامی نقاط روی گراف می‌باشد.

حال فرض کنید s_i سناریویی باشد که وزن رأس v_i برابر با کران بالای بازه‌ی متناظرش یعنی $\overline{u_i}$ و وزن بقیهٔ رأس‌ها برابر با کران پایین بازهٔ متناظرشان یعنی $\underline{u_i}$ باشند. همچنین، فرض کنید $\bar{s_i}$ سناریویی باشد که در شرط زیر صدق می‌کند:

به‌ازای $v_i\in V(G)$، اگر

$$f_c(v_i,\bar{s})\geq \bar{u}_v\, d(v_i,v) \qquad \forall v\in V(G),$$

آن‌گاه، $u_v^{\bar{s_i}}=\overline{u_v}$. اگر

$$f_c(v_i,\bar{s})<\bar{u}_v\, d(v_i,v),$$

آن‌گاه $u_v^{\bar{s_i}}=\dfrac{f_c(v_i,\bar{s})}{d(v,v_i)}$. قرار دهید $S_c=\cup\{\overline{s_i}\ ,\ s_i : v_i\in V(G)\}$ دراین‌صورت داریم:

لم ۲. مجموعهٔ سناریوهای S_c، شامل سناریوهای بدترین حالت به ازای تمامی نقاط روی گراف برای مسأله مکان‌یابی ۱- مرکز استوار می‌باشد.

لم ۳. مجموعه سناریوهای $S_m\times S_c$ مجموعه سناریوهای بدترین حالت برای مسأله مرکز-میانه استوار است.

اثبات: به ازای هر رأس v روی گراف G و به ازای هر سناریو دلخواه $s\in\bar{S}$،

$$f_1(v,s)-f_1(w,s)\leq \max_{s\in S_c}(f_1(v,s)-f_1(w,s))$$

با ضرب رابطهٔ فوق در λ_1 داریم:

$$\lambda_1(f_1(v,s)-f_1(w,s))\leq \lambda_1\left[\max_{s\in S_c}(f_1(v,s)-f_1(w,s))\right].$$

از طرفی چون $\lambda_1\geq 0$ پس به ازای هر $s\in\bar{S}$ نتیجه می‌شود:

$$\lambda_1(f_1(v,s)-f_1(w,s))\leq \max_{s\in S_c}\lambda_1(f_1(v,s)-f_1(w,s)).$$

با فرض آن که $\bar{S}$ برابر با حاصلضرب دکارتی بازه‌های متناظر با مسأله مرکز باشد داریم:

$$\max_{s\in\bar{S}}\lambda_1(f_1(v,s)-f_1(w,s))\leq \max_{s\in S_c}\lambda_1(f_1(v,s)-f_1(w,s)).$$

هم‌چنین، فرض کنید S' برابر با حاصلضرب دکارتی بازه‌های متناظر با وزن رأس‌های مسأله ۱-میانه باشد. در این صورت به ازای هر $s\in S'$ داریم:

$$f_2(v,s)-f_2(w,s)\leq \max_{s\in S_m}(f_2(v,s(v,w))-f_2(w,s(v,w)))$$

با ضرب رابطهٔ فوق در λ_2 داریم:

$$\lambda_2(f_2(v,s)-f_2(w,s)) \le \lambda_2\left[\max_{s\in S_m}(f_2(v,s(v,w)-f_2(w,s(v,w)))\right].$$

از طرفی چون $\lambda_2 \ge 0$ ، پس به ازای هر $s \in S'$ نتیجه می‌شود:

$$\lambda_2(f_2(v,s)-f_2(w,s)) \le \max_{s\in S_m}\lambda_2(f_2(v,s(v,w))-f_2(w,s(v,w))).$$

پس به ازای $s \in \bar{S}\times S'$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(f_1(v,s)-f_1(w,s))+\lambda_2(f_2(v,s)-f_2(w,s))\\
&\le \max_{s\in S_c}\lambda_1(f_1(v,s)-f_1(w,s))+\max_{s\in S_m}\lambda_2(f_2(v,s)-f_2(w,s))\\
&=\max_{s\in S_m\times S_c}\left[\lambda_1(f_1(v,s)-f_1(w,s))+\lambda_2(f_2(v,s)-f_2(w,s))\right].
\end{aligned}$$

که تساوی آخر از مستقل بودن S_m و S_c نتیجه می‌شود. بنابراین

$$\begin{aligned}
Z(v) &= \max_{w\in V(G)}\ \max_{s\in S'}\ (\lambda_1(f_1(v,s)-f_1(w,s))+\lambda_2(f_2(v,s(v,w))-f_2(w,s(v,w)))\\
&= \max_{w\in V(G)}\ \max_{s\in S_c}\ (\lambda_1(f_1(v,s)-f_1(w,s))+\lambda_2(f_2(v,s(v,w))-f_2(w,s(v,w)))\\
&= \max_{w\in V(G)}\ \max_{s\in S_c\times \bigcup_{w\in V(G)} s(v,w)}(\mathrm{f}(v,s)-f(w,s)).
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\min_{v\in V(G)} Z(v)=\min_{v\in V(G)}\ \max_{w\in V(G)}\ \max_{s\in S_m\times S_c}(\mathrm{f}(v,s)-f(w,s)).$$

۳. رویکرد جواب برای حل مسأله مکان‌یابی مرکز-میانه استوار رأسی روی گراف‌های کلی

فرض کنید به‌ازای هر دو رأس v و w تابع هدف مسأله مرکز-میانه به فرم زیر باشد:

$$\mathrm{f}(v,s)-f(w,s)=\lambda_1\left[\max_{1\le i\le n}\ \mathrm{u}_i(s)d(v_i,v)-\max_{1\le i\le n}\ \mathrm{u}_i(s)d(v_i,w)\right]+\lambda_2\left[\sum_{i=1}^{n}w_i(s)(d(v_i,v)-d(v_i,w))\right].$$

با توجه به نتایج ارائه شده در بخش قبل می‌توان به جای حل مسأله روی مجموعه سناریوهای S ، مسأله را روی مجموعه سناریوهای $S_m\times S_c$ حل کرد. رویکرد پیشنهادی برای حل مسأله را می‌توان به فرم زیر بیان کرد:

الگوریتم ۱:

۱. ماتریس فاصلهٔ بین رأس‌های گراف را محاسبه کنید.

۲. به ازای هر جفت رأس v و w مقادیر زیر را محاسبه کنید.

۲. ۱. به ازای $i=1,\dots,n$ مقادیر $d(v_i,v)-d(v_i,w)$ را حساب کنید.

۲. ۲. وزن همهٔ رأس‌هایی که در شرط $d(v_i,v)-d(v_i,w)\ge 0$ صدق می‌کنند را برابر با کران بالای بازهٔ متناظرشان قرار دهید.

۲. ۳. وزن رأس‌های باقی‌مانده را برابر با کران پایین بازه‌ی متناظرشان قرار دهید.

۳. به ازای هر جفت رأس v و w مقادیر

$$\sum_{\{i:d(v_i,v)\ge d(v_i,w)\}}\overline{w_i}(d(v_i,v)-d(v_i,w)+\sum_{\{i:d(v_i,v)<d(v_i,w)\}}\underline{w_i}(d(v_i,v)-d(v_i,w)$$

را محاسبه کنید.

۴. مجموعهٔ S_c را تشکیل دهید.

۵. به ازای هر جفت رأس v و w، مقدار تابع هدف مرکز را روی سناریوهای S_c محاسبه کنید.

۶. به ازای هر جفت رأس v و w، مقدار $\max_{s\in S_m\times S_c}(f(v,s)-f(w,s))$ را محاسبه کنید.

۷. رأس w^* را طوری پیدا کنید که مقدار $\max_{s\in S_m\times S_c}(f(v,s)-f(w,s))$ را ماکزیمم کند.

۸. رأس v^* را طوری پیدا کنید که مقدار $\max_{s\in S_m\times S_c}(f(v,s)-f(w^*,s))$ را مینیمم کند.

قضیهٔ ۱. الگوریتم ۱، جواب بهینهٔ مسأله مکان‌یابی مرکز-میانه استوار رأسی را روی گراف‌های کلی تحت معیار پشیمانی مینی-ماکس در زمان $O(n^3)$ به دست می‌آورد.

اثبات: گام ۱ الگوریتم با استفاده از اجرای الگوریتم فلوید-وارشال در زمان $O(n^3)$ محاسبه می‌شود. گام ۲ الگوریتم در زمان $O(n^3)$ اجرا می‌شود. گام ۳ و گام ۴ الگوریتم هر کدام در زمان $O(n)$ انجام می‌شود. برای محاسبهٔ گام ۵ الگوریتم زمان $O(n^3)$ مورد نیاز است. این کار به این صورت انجام می‌شود: به ازای هر جفت رأس v و w دو ماتریس A_v و A_w را به این فرم تشکیل دهید که سطر i ام آن ماتریس متناظر با سناریوی i ام باشد. در واقع سطر اول را برابر با سناریویی در نظر بگیرید که وزن رأس v_i برابر با کران بالای بازهٔ متناظرش و وزن بقیهٔ رأس‌ها برابر با کران پایین بازهٔ متناظرشان باشند و به همین ترتیب، سطر nام متناظر با سناریوی S_n باشد که در آن وزن رأس v_n برابر با کران بالای بازهٔ متناظرش و وزن بقیهٔ رأس‌ها برابر با کران پایین بازهٔ متناظرشان هستند. پس می‌توان برای محاسبهٔ تمامی مؤلفه‌های ماتریس A_v و A_w، سطر اول آنها را محاسبه کرده و بقیهٔ مؤلفه‌های سطرهای دیگر را از روی آن به دست آورد. پس ابتدا سطر اول ماتریس A_v و A_w را محاسبه کنید. تفاوت سطر اول و سطر دوم در مؤلفهٔ اول و دوم این سطرها می‌باشد. زیرا در سطر دوم وزن رأس v_2 برابر با کران بالا و وزن بقیهٔ رأس‌ها برابر با کران پایین بازهٔ متناظرشان می‌باشند. هم‌چنین، برای محاسبهٔ مولفه‌های سطر سوم کافی است مؤلفهٔ اول و سوم سطر اول را تغییر دهیم. در واقع تمامی مؤلفه‌های سطر iام به جز مؤلفهٔ iام و اول آنها برابر با مؤلفه‌های سطر اول هستند. زمان اجرای محاسبهٔ سطر اول برابر با $O(n)$ و زمان اجرای محاسبهٔ هر کدام از سطرهای دیگر برابر با $O(2)$ می‌باشد. پس زمان اجرای محاسبهٔ ماتریس‌های A_v و A_w برابر با $O(n)$ می‌باشد. حال باید مقدار ماکزیمم هر سطر را برای محاسبهٔ تابع هدف متناظر با مسأله مرکز روی همه سناریوها پیدا کنیم. برای این کار باید مؤلفهٔ ماکزیمم هر سطر را در ماتریس‌های A_v و A_w پیدا کنیم. برای این منظور کافی است مؤلفهٔ ماکزیمم هر سطر ماتریس A_v را پیدا کنیم. برای A_w نیز روند مشابه خواهد بود. برای پیدا کردن مؤلفه‌های ماکزیمم هر سطر ماتریس A_v مؤلفهٔ ماکزیمم سطر اول را پیدا کنید. فرض کنید

$$w_{j^*}(s_1)d(v_{j^*},v)=\max_{1\le j\le n}u_j(s_1)d(v_j,v),$$

یعنی $v_{j^*}(s_1)$ نقطه‌ی کلیدی v روی سناریوی ۱ باشد. هم‌چنین، فرض کنید

$$u_{k^*}(s_1)d(v_{k^*},v)=\max_{1\le j\le n}u_j(s_1)d(v_j,v).$$

با استفاده از این مقادیر مشخص شده، مقدار ماکزیمم سطرهای بعدی و به عبارت دیگر مقدار ماکزیمم روی سناریوهای بعدی نیز مشخص می‌شود. برای پیدا کردن مؤلفهٔ ماکزیمم سطر iام نیز به فرم زیر عمل می‌کنیم:

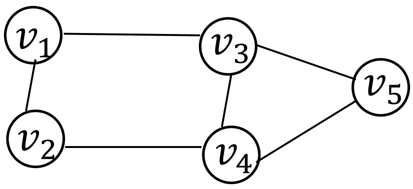
اگر $j^* = i$ ، آن‌گاه مؤلفهٔ iام در سطر iام نیز مؤلفهٔ ماکزیمم است. یعنی

$$u_i(s_i)d(v_i,v) = u_{j^*}(s_i)d(v_{j^*},v) = \max_{1\le i\le n} u_j(s_i)d(v_j,v).$$

اگر $j^* \neq 1, i$ ، آن‌گاه مؤلفهٔ ماکزیمم سطر iام، یا مؤلفهٔ iام است یا مؤلفه j^*. اگر $j^* = 1$، آن‌گاه مؤلفهٔ ماکزیمم یا مؤلفهٔ k^* است یا مؤلفهٔ iام یا مؤلفهٔ j^*ام. پس مؤلفهٔ ماکزیمم سطر اول در زمان $O(n)$و مؤلفهٔ ماکزیمم هر کدام از سطرهای دیگر در زمان $O(3)$ پیدا می‌شود. پس زمان اجرای پیدا کردن ماکزیمم مقدار (در واقع مقدار تابع هدف مرکز) روی همه سناریوها در زمان $O(n)$ صورت می‌گیرد. پس به ازای هر جفت رأس v و w، روی همه سناریوها مقدار تابع هدف مرکز در زمان $O(n^3)$ محاسبه می‌شود. گام ۶ الگوریتم چون به‌ازای هر جفت رأس مقدار تابع هدف مرکز-میانه را محاسبه می‌کند، در نتیجه زمان اجرای این گام $O(n^3)$ است. گام ۷ و ۸ الگوریتم چون رأس‌های w^* و v^* را به ازای سناریوهای $S_m \times S_c$ پیدا می‌کند در نتیجه هر کدام در زمان $O(n^2)$ اجرا می‌شوند.

۴. مثال عددی

در این بخش نتیجهٔ عددی به دست آمده از پیاده‌سازی روش برای حل مسأله مکان‌یابی مرکز-میانه رأسی استوار با وزن‌های رأسی بازه‌ای روی گراف‌های کلی را ارائه می‌هیم. برای این منظور گراف زیر را در نظر بگیرید.



بازه‌های متناظر با وزن رأس‌ها و فاصله بین رأس‌ها به شرح زیر می‌باشد:

$$w_1 \in [1,2]\ ,\ w_2 \in [1,4]\ ,\ w_3 \in [1,3]\ ,\ w_4 \in [1,5]\ ,\ w_5 \in [1,6]$$

$$u_1 \in [2,3]\ ,\ \mathrm{u}_2 \in [2,5]\ ,\ \mathrm{u}_3 \in [2,4]\ ,\ \mathrm{u}_4 \in [2,6]\ ,\ \mathrm{u}_5 \in [2,7]$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2)=1\ ,\ \mathrm{d}(\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_3)=2\ ,\ \mathrm{d}(\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_4)=3\ ,\ \mathrm{d}(\mathrm{v}_3,\mathrm{v}_4)=2\ ,\ \mathrm{d}(\mathrm{v}_3,\mathrm{v}_5)=1\ ,\ \mathrm{d}(\mathrm{v}_4,\mathrm{v}_5)=2$$

به ازای $i = 1,2,3,4,5$ و به ازای هر جفت رأس v و w مقادیر $d(v_i,v) - d(v_i,w)$ را حساب کرده و $w_i(s)$ متناظر با هر یک را به دست می‌آوریم.

به ازای $i = 1,2,3,4,5$ سناریوهای متناظر با تابع هدف مرکز را محاسبه می‌کنیم، در این صورت داریم:

در سناریو s_1

$$u_1(s) = 3\ ,\ \mathrm{u}_2(\mathrm{s}){=}2\ ,\ \mathrm{u}_3(s) = 2\ ,\ \mathrm{u}_4(s) = 2\ ,\ \mathrm{u}_5(s) = 2$$

در سناریو s_2

$$u_1(s) = 2\ ,\ \mathrm{u}_2(\mathrm{s}){=}4\ ,\ \mathrm{u}_3(s) = 2\ ,\ \mathrm{u}_4(s) = 2\ ,\ \mathrm{u}_5(s) = 2$$

در سناریو s_3

$$u_1(s) = 2\ ,\ \mathrm{u}_2(\mathrm{s}){=}2\ ,\ \mathrm{u}_3(s) = 5\ ,\ \mathrm{u}_4(s) = 2\ ,\ \mathrm{u}_5(s) = 2$$

در سناریو s_4

$$u_1(s) = 2\ ,\ \mathrm{u}_2(\mathrm{s}){=}2\ ,\ \mathrm{u}_3(s) = 2\ ,\ \mathrm{u}_4(s) = 6\ ,\ \mathrm{u}_5(s) = 2$$

در سناریو s_5

$$u_1(s)=2\ ,\ u_2(s)=2\ ,\ u_3(s)=2\ ,\ u_4(s)=2\ ,\ u_5(s)=7$$

به ازای هر جفت رأس v و w مقادیر تابع هدف مرکز روی سناریوهای s_1 ، s_2 ، s_3 ، s_4 و s_5 را محاسبه می‌کنیم. سپس به ازای هر v، w^* را که ماکزیمم مقدار دارد انتخاب می‌کنیم و از بین این ماکزیمم‌های به دست آمده، مینیمم مقدار را انتخاب می‌کنیم که رأس متناظر با آن رأس مرکز-میانه استوار خواهد بود.

از آن‌جایی که تابع هدف دارای ضریبی از λ است، پس می‌توان برای آن مقادیر مختلفی در نظر گرفت. در نهایت به ازای $v=v_3$ و $w^*=v_4$ و مقدار تابع هدف $10\lambda_1+5\lambda_2$، رأس v_3 رأس مرکز-میانه استوار است.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، مسأله مکان‌یابی مرکز-میانه‌ی رأسی استوار با وزن‌های رأسی غیرقطعی روی گراف‌های کلی مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. معیار مورد استفاده برای حل مسأله در این مقاله معیار مینی-ماکس پشیمانی است. این مسأله با تابع هدفی که دارای ضریبی از λ بوده مورد بررسی قرار گرفت و الگوریتم چند جمله‌ای برای آن ارائه شد.

References

1. Revelle CS., Swain RW., "Central facilities location", *Geographical Analysis*, 2 (1970) 30-42.

2. Toregas CR., Swain R. and Bergman L., "The location of emergency service facilities", *Operation Research*, 19 (1971) 1363-1373.

3. Berman O., Yang EK., "Medi-center location problems", *Journal of the Operational Research Society*, 42 (1991) 313-322.

4. Handler GY., "Medi-centers of a tree", *Transpotation Scince*, 19 (1985) 246-260.

5. Khumawala BM., "An efficient algorithm for the p-median problem with maximum distance constraints", *Geographical Analysis*, 5 (1973) 309-321.

6. Toregas CR., Revelle CS., "Optimal location under time or distance constraints", *Paper of the Regional Science Association*, 28 (1972) 131-143.

7. Halpern J., "The location of a center- median convex combination on an undirected tree", *Journal of Regional Science*, 16 (1976) 237-245.

8. Halpern J., "Finding minimal center-median convex combination (cent-dian) of a graph", *Management Science*, 24 (1978) 535-544.

9. Perez-Brito D., Moreno-Perez JA., and Rodriguez-Martin I., "The 2-facility centdian network problem", *Location Science*, 6 (1998) 369-381.

10. Tamir A., Perez-Brito D., and Moreno-perez JA., "A polynomial algorithm for the p-centdian problem on a tree", *Networks*, 32 (1998) 255-262.

11. Perez-Brito D., Moreno-Perez JA., "The generalized p-centdian on network", *Top*, 8 (2000) 265-285.

12. Halpern J., "Duality in the cent-dian of a graph, ", *Operations Research*, 28 (1980) 722-735.

13. Averbakh I., Berman O., "Algorithms for path medi-centers of a tree", *Computers & Operation Research*, 26 (1999) 1395-1409.

14. Tamir A., Puerto J. and Perez-Brito D., "The centdian subtree on tree networks", *Discrete Applied Mathematics*, 118 (2002) 263-278.

15. Colebrook M., Sicilia J., "A polynomial algorithm for the multicriteria cent-dian location problem", *European Journal of Operational Research*, 179 (2007) 1008-1024.

16. Wang H-L., "Maintaining centdians in a fully dynamic forest with top trees", *Discrete Applied Mathmatics*, 181 (2015) 310-315.

17. Conde, E., "A note on the minmax regret centdian location on trees", Operations Research Letters, 36 (2008) 271-275.

18. Li, Hongmei, Taibo Luo, Yinfeng Xu, and Jiuping Xu. "Minimax regret vertex centdian location problem in general dynamic networks", *Omega,* 75 (2018) 87-96.

19. Soyster, A. L, "Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming." *Operations Research*, 21 (1973) 1154-1157.

20. Mulvey, John M., Robert J. Vanderbei, and Stavros A. Zenios. "Robust optimization of large-scale systems. "*Operations Research*, 43 (1995) 264-281.

21. Ben-Tal, Aharon, and Arkadi Nemirovski. "Robust solutions of uncertain linear programs. "*Operations Research letters* 25 (1999) 1-13.

22. Bertsimas, D., and Melvyn S.و "The price of robustness." *Operations Research* 52 (2004) 35-53.