







Kharazmi University

# Diagonal Reduction of Matrices over Refinement Rings

Marjan Sheibani Abdolyousefi<sup>1</sup>  , Rahman Bahmani Sangesari<sup>2</sup> , Nahid Ashrafi<sup>3</sup> 

1. Women's University of Semnan (Farzanegan), Semnan, Iran.

✉E-mail: [sheibani@fgusem.ac.ir](mailto:sheibani@fgusem.ac.ir)

2. Faculty of mathematics, Statistics and Computer Science, Semnan University, Semnan, Iran.

E-mail: [rbahmani@semnan.ac.ir](mailto:rbahmani@semnan.ac.ir)

3. Faculty of mathematics, Statistics and Computer Science, Semnan University, Semnan, Iran.

E-mail: [nashrafi@semnan.ac.ir](mailto:nashrafi@semnan.ac.ir)

---

---

## Article Info

## ABSTRACT

---

---

### Article type:

Research Article

### Article history:

Received:  
29 June 2020  
Revised form:  
2 February 2021  
Accepted:  
7 February 2021  
Published online:  
22 November 2022

### Keywords:

refinement;  
projective;  
exchange;  
diagonal  
reduction;  
regular.

### Introduction

All rings considered here are associative with an identity and all modules are unital. A ring  $R$  is called Bezout, if every finitely generated ideal of  $R$  is principal. Let  $R$  be a ring, an  $m \times n$  matrix  $A$  over  $R$  admits a diagonal reduction provided that there exist invertible matrices  $P$  and  $Q$  such that  $PAQ$  is a diagonal matrix, where by the diagonal matrix, we mean a matrix  $C = (c_{ij}), (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ , such that  $c_{ij} = 0$  for all  $i \neq j$ .

Following Kaplansky, a ring  $R$  is called a right (left) Hermite ring if every  $1 \times 2$  ( $2 \times 1$ ) matrix over  $R$  admits a diagonal reduction. He also called a ring  $R$  to be an elementary divisor ring if every  $m \times n$  matrix over  $R$  is equivalent to a diagonal matrix  $diag(d_1, d_2, \dots, d_m)$ , where  $d_i$  is a total divisor of  $d_{i+1}$ , ( $Rd_{i+1}R \subseteq d_iR \cap Rd_i$ ). We are interested to investigate the diagonalizability of matrices over wide class of rings, namely refinement rings, which are a generalization of exchange rings.

### Main results

Dubbertin defined a monoid to be refinement as the following:

---

---

---

A monoid  $(M, +, 0)$  is said to be a refinement monoid, if the following conditions are satisfied:

- (1) There are no non-zero inverse elements, that means, if  $x + y = 0$  then,  $x = y = 0$ .
- (2)  $M$  has the refinement property, that is, given  $x_i, y_j \in M$ , with,  $\sum x_i = \sum y_j$ , there are,  $z_{ij} \in M, i < n, j < m, n, m \in \mathbb{N}$  and  $n, m \geq 2$ , such that:

$$x_i = \sum_j z_{ij}, y_j = \sum_i z_{ij}.$$

We say that a ring  $R$  is a refinement ring, if the monoid of finitely generated projective  $R$ -modules,

$V(R)$ , with the operation  $P + Q = P \oplus Q$ , for all finitely generated projective  $R$ -modules  $P, Q$ , has the refinement property.

Let  $R$  be a commutative refinement ring and  $M, N$ , be two finitely generated projective  $R$ -modules. Then,  $M \cong N$  if and only if  $M_m \cong N_m$  for all maximal ideal  $m$  of  $R$ .

Also we study the diagonalizability of regular matrices over refinement rings based on the cancellation law.

For the refinement ring  $R$  with the following cancellation law,

$$2R \oplus A \cong R \oplus B \Rightarrow R \oplus A \cong B,$$

Where  $A, B$  are finitely generated projective  $R$ -modules and  $B$  is a generator. It is proved that, every regular square matrix over a refinement ring  $R$  admits diagonal reduction if and only if every regular matrix, over  $\frac{R}{J(R)}$  admits diagonal reduction, while it does not hold in non-refinement rings and by the regular matrix, we mean an  $m \times m$  matrix  $A$  such that there exists an  $m \times m$  matrix  $B$ , in which  $ABA = A$ .

---

**How to cite:** Sheibani Abdolyousefi, M., Bahmani Sangesari, R., Ashrafi, N., (2022) Diagonal Reduction of Matrices over Refinement Rings. *Mathematical Researches*, 8 (3), 132-143



© The Author(s).

Publisher: Kharazmi University

---

## قطری پذیری ماتریس‌ها روی حلقه‌ای نظریف پذیر

مرجان شیبانی عبدالیوسفی<sup>۱</sup>✉، رحمان بهمنی سنگسری<sup>۲</sup>، ناهید اشرفی<sup>۲</sup>

۱. نویسنده مسئول، دانشگاه خواران سمنان (فرزادگان)، سمنان، ایران. پست الکترونیکی: [sheibani@fgusem.ac.ir](mailto:sheibani@fgusem.ac.ir)

۲. گروه ریاضی، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران. پست الکترونیکی: [rbahmani@semnan.ac.ir](mailto:rbahmani@semnan.ac.ir)

۲. گروه ریاضی، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران. پست الکترونیکی: [nashrafi@semnan.ac.ir](mailto:nashrafi@semnan.ac.ir)

### چکیده

### اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

حلقه  $R$  را یک حلقه نظریف پذیر می‌نامیم، هرگاه تکواره  $R$ -مدول‌های تصویری با تولید متناهی آن، نظریف پذیر باشد. فرض کنیم  $R$  یک حلقه جابه‌جایی نظریف پذیر و  $M$  و  $N$ ،  $R$ -مدول تصویری متناهی مولد باشند. در این صورت،  $M \cong N$  اگر و تنها اگر برای هر ایده‌آل ماکسیمال  $m$  در حلقه  $R$ ،  $M_m \cong N_m$  باشد. یک ماتریس مستطیلی  $A$  روی حلقه  $R$  تقلیل یافته قطری نامیده می‌شود هرگاه، ماتریس‌های وارون پذیر  $P$  و  $Q$  موجود باشند، به طوری که  $PAQ$  یک ماتریس قطری باشد.

اگر  $R$  حلقه‌ای نظریف پذیر و خاصیت حذفی زیر برای  $R$  مدول‌های تصویری متناهی مولد دلخواه  $A$  و  $B$  که  $B$  مولد نیز است، برقرار باشد،

$$2R \oplus A \cong R \oplus B \implies R \oplus A \cong B.$$

آن‌گاه هر ماتریس مربعی منظم روی  $R$  تقلیل یافته قطری است.

همچنین نشان می‌دهیم، برای هر حلقه نظریف پذیر  $R$ ، هر ماتریس منظم روی  $R$ ، تقلیل یافته قطری است اگر

تنها اگر هر ماتریس منظم روی حلقه  $\frac{R}{J(R)}$ ، تقلیل یافته قطری باشد.

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۴/۰۹

تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۱۱/۱۴

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۱/۱۹

تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۹/۰۱

### واژه‌های کلیدی:

نظریف پذیر،

تصویری،

تبادلی،

قطری پذیر،

منظم.

استناد: شیبانی عبدالیوسفی، مرجان؛ بهمنی سنگسری، رحمان؛ اشرفی، ناهید؛ (۱۴۰۱). قطری پذیری ماتریس‌ها روی حلقه‌ای نظریف پذیر. پژوهش‌های ریاضی، ۸ (۳)، ۱۴۳-۱۳۲.



© نویسنده‌گان.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

## مقدمه

در این مقاله، تمامی حلقه‌ها یکدار و شرکت پذیر و تمام مدول‌ها یکانی می‌باشند. یادآوری می‌کنیم که یک حلقه  $R$  بزوت<sup>۱</sup> نامیده می‌شود، هر گاه هر ایده‌آل با تولید متناهی  $R$ ، دوری باشد.

ماتریس مستطیلی  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  روی  $R$  تقلیل یافته قطری نامیده می‌شود، هر گاه ماتریس‌های وارون پذیر  $P$  و  $Q$  موجود باشند به طوری که  $PAQ$  یک ماتریس قطری باشد. منظور از ماتریس قطری ماتریسی مانند  $(a_{ij})_{m \times n}$  است، که برای هر  $i \neq j$ ،  $a_{ij} = 0$ .

کاپلانسکی در مرجع [۱] حلقه  $R$  را هرمیتی<sup>۲</sup> راست (چپ) نامید، هر گاه هر ماتریس  $1 \times 2$  (یا  $2 \times 1$ ) روی  $R$ ، تقلیل یافته قطری باشد. او همچنین حلقه  $R$  را حلقه مقسوم علیه ابتدایی<sup>۳</sup> نامید هر گاه هر ماتریس  $m \times n$  در  $R$  تقلیل یافته قطری به فرم  $\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_m)$  باشد که برای هر  $1 \leq i \leq m$ ،  $d_i$  یک مقسوم علیه کلی از  $d_{i+1}$  باشد  $(Rd_{i+1}R \subseteq d_i R \cap Rd_i)$ . یعنی ایده‌آل دو طرفه تولید شده توسط  $d_{i+1}$  زیر مجموعه اشتراک ایده‌آل‌های چپ و راست تولید شده توسط  $d_i$  باشد. مطالعه قطری‌پذیری ماتریس‌ها روی حلقه‌ها، تاریخچه‌ای قوی دارد. قبل از مطالعه کاپلانسکی روی حلقه‌های مقسوم علیه ابتدایی، در سال ۱۹۴۸، [۱]، نویسندگان زیادی از جمله اسمیت [۲]، دیکسون [۳] و دربورن [۴] واردن [۵] و جاکوبسون [۶] این مسأله را روی دامنه‌های اقلیدسی جابه‌جایی و ناجابه‌جایی و دامنه ایده‌آل اصلی جابه‌جایی مطالعه کردند. هنریکسن [۷] ثابت کرد هر حلقه منظم یکه یک حلقه مقسوم علیه ابتدایی است و لوی در [۸] نشان داد هر ماتریس مربعی روی حلقه‌های سریال تقلیل یافته قطری است. یک حلقه  $R$  سریال نامیده می‌شود هر گاه به عنوان مدول  $R$ -مدول سریال باشد یعنی زیر مدول‌های آن با نسبت ترتیب مرتب کلی باشند. منال و منکیسی [۹] به مسأله قطری‌پذیری ماتریس‌ها روی حلقه‌های منظم<sup>۴</sup> با استفاده از قانون حذفی در تکواره  $R$ -مدول‌های تصویری متناهی مولد را مطالعه و ثابت کردند که هر ماتریس منظم روی حلقه منظم  $R$  تقلیل یافته قطری است اگر و فقط اگر  $R$ -مدول‌های تصویری متناهی مولد، در خاصیت حذفی زیر صدق کنند.

$$2R \oplus A \cong R \oplus B \implies R \oplus A \cong B$$

<sup>۱</sup> Bezout

<sup>۲</sup> Hermite

<sup>۳</sup> Elementary divisor ring

<sup>۴</sup> Regular rings

در سال ۱۹۷۷، آرا، گودرل، امرا و پارادو [۱۰] این نتیجه را از حلقه‌های منظم به حلقه‌های تبدالی<sup>۵</sup> گسترش دادند، و نشان دادند هر ماتریس منظم روی حلقه تبدالی  $R$ ، تقلیل یافته قطری است اگر و فقط اگر برای  $R$ -مدول‌های تصویری متناهی مولد دلخواه  $A$  و  $B$  رابطه حذفی زیر برقرار باشد.

$$2R \oplus A \cong R \oplus B \implies R \oplus A \cong B$$

چن در مرجع [۱۱] یک حلقه  $R$  را تبدالی نامید هرگاه برای هر  $R$ -مدول  $M$  و هر دو تجزیه  $M$  به صورت زیر

$$M = A \oplus B = \bigoplus_{i \in I} A_i$$

که  $A_i \cong R$  و  $I$  یک مجموعه اندیس گذار دلخواه، می‌باشند،  $R$ -مدول‌های  $A'_i \subseteq A_i$  موجود باشند، به طوری که

$$M = A \oplus \left( \bigoplus_{i \in I} A'_i \right)$$

از آن‌جا که دسته وسیعی از حلقه‌ها، از جمله حلقه چند جمله‌ای‌ها روی حلقه اعداد صحیح، تبدالی نیستند. ما علاقمندیم، قطری‌پذیری ماتریس‌ها را روی دسته وسیع‌تری از حلقه‌های تبدالی، حلقه‌های نظریف‌پذیر<sup>۶</sup>، را بررسی کنیم. بیشتر حلقه‌های شناخته شده نظریف‌پذیر هستند و در مرجع [۱۴] نویسندگان مثالی از حلقه‌ای غیر نظریف‌پذیر ارائه کرده‌اند. در بخش دوم، موضعی‌سازی حلقه‌های نظریف‌پذیر را بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم اگر  $R$  یک حلقه جابه‌جایی نظریف‌پذیر و  $M$  و  $N$  دو  $R$ -مدول باشند، آن‌گاه  $M \cong N$  اگر و تنها اگر برای هر ایده‌آل ماکسمال  $P$  از حلقه  $R$ ،  $M_P \cong N_P$ .

در بخش سوم، برخی خواص حلقه‌های هرمیتی را بررسی می‌کنیم و خاصیت هرمیتی بودن را روی حلقه چند جمله‌ای‌ها و سری‌های توانی بررسی می‌کنیم. مثالی از توسعه‌ی از یک حلقه هرمیتی ارائه می‌دهیم که هرمیتی نباشد. همچنین با ارائه یک مثال نشان می‌دهیم که ضرب تانسوری دو جبر هرمیتی، هرمیتی نیست. سپس نتایج مرجع [۱۰] را، از حلقه‌های تبدالی به حلقه‌های نظریف‌پذیر گسترش می‌دهیم.

نشان می‌دهیم، روی حلقه نظریف‌پذیر و جابه‌جایی  $R$ ، هر ماتریس تقلیل یافته قطری است اگر و تنها اگر هر ماتریس روی حلقه  $\frac{R}{J(R)}$  تقلیل یافته قطر می‌باشد.

در سراسر این مقاله، ایده‌آل‌ها، ایده‌آل‌های دوطرفه و  $R$ -مدول‌ها،  $R$ -مدول‌های راست یکانی می‌باشند. از نماد  $M_n(R)$  برای نشان دادن حلقه ماتریس‌های  $n \times n$  روی  $R$  استفاده می‌کنیم. نماد  $I_n$  نشان دهنده ماتریس همانی،  $GL_n(R)$  گروه خطی ماتریس‌های  $n \times n$  وارون‌پذیر روی  $R$  و  $FP(R)$  نیم گروه،  $R$ -مدول‌های تصویری متناهی مولد  $R$  با عمل

<sup>۵</sup> Exchange rings

<sup>۶</sup> Refinement rings

جمع را نشان می‌دهد.  $V(R)$  نماد تکواره  $R$  -مدول‌های تصویری متناهی مولد است که عمل جمع آن به صورت زیر است.

$$A + B = A \oplus B$$

از نماد  $Z$  برای نشان دادن مجموعه اعداد صحیح استفاده می‌کنیم و  $J(R)$  رادیکال جابکسون  $R$  را نشان می‌دهد.

### حلقه‌های جابه‌جایی نظریف پذیر

دربترین [۱۲] در سال ۱۹۸۲ یک تکواره  $(M, +, 0)$  را نظریف پذیر نامید اگر در شرایط زیر صدق کند.

۱- در تکواره  $M$ ، هیچ عنصر غیر صفر وارونی موجود نباشد. یعنی اگر برای هر

$$x + y = 0, x, y \in M \text{ آنگاه } x = y = 0$$

۲- تکواره  $M$  خاصیت نظریف پذیری داشته باشد، به عبارتی اگر

$$x_i, y_j \in M, \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{j=1}^n y_j, 2 \leq i \leq m, 2 \leq j \leq n$$

آنگاه  $z_{ij} \in M$  موجود باشد که

$$x_i = \sum_j z_{ij} y_j, y_i = \sum_j z_{ij} x_j, (n, m \in \mathbb{N}, j < m, i < n \text{ و } n, m \geq 2)$$

کافی است، رابطه بالا برای حالت  $m = n = 2$  برقرار باشد.

حلقه  $R$  را نظریف پذیر می‌نامیم، هر گاه تکواره،  $R$  -مدول‌های تصویری متناهی مولد آن،  $V(R)$ ، نظریف پذیر باشد. در سال ۱۹۶۴، کرای و جانسن [۱۳] نشان دادند که اگر  $R$  حلقه‌ای تبدالی باشد آنگاه تکواره  $R$  مدول‌های تصویری متناهی مولد آن نظریف پذیر است. اما عکس آن درست نیست. به عنوان مثال حلقه اعداد صحیح نظریف پذیر است اما تبدالی نیست. همچنین در مرجع [۱۵] نشان داده شده که هر حلقه تصویری آزاد<sup>۷</sup>، نظریف پذیر است اما لزوماً تبدالی نیست. این مسائل ما را ترغیب کرد تا قطری‌پذیری ماتریس‌ها را روی حلقه‌های نظریف پذیر بررسی کنیم. و نتایج مرجع [۱۰] را روی حلقه‌های نظریف پذیر گسترش دهیم.

فرض کنید  $R$  حلقه‌ای جابه‌جایی،  $M$  یک  $R$  -مدول تصویری متناهی مولد،  $P$  یک ایده‌آل ماکسیمال  $R$  و  $R_P$  حلقه موضعی‌سازی  $R$  باشد، لذا  $R_P$  حلقه‌ای موضعی است و  $R_P \cong M_P \otimes_{R_P} M$  یک  $R_P$  -مدول آزاد است.

<sup>۷</sup> Projective – free ring

اگر عدد ثابت  $n$  موجود باشد به طوری که به ازای هر ایده‌آل اول  $P$  از حلقه  $R$ ،  $M_P \cong R_P^n$ ، آن‌گاه گوییم  $M$  یک  $R$  مدول تصویری متناهی مولد از رتبه ثابت  $n$  نامیده می‌شود.

در این بخش برخی خواص حلقه‌های نظریف‌پذیر جابه‌جایی را بررسی می‌کنیم.

**قضیه ۱.** فرض کنید  $R$  یک حلقه جابه‌جایی نظریف‌پذیر و  $M$  و  $N$ ،  $R$ -مدول‌های تصویری متناهی مولد باشند، آن‌گاه شرایط زیر معادلند.

$$M \cong N \quad (1)$$

$$M_P \cong N_P, R \text{ از حلقه } P \text{ اول ایده‌آل اول}$$

اثبات. (۱)  $\Leftrightarrow$  (۲) بدیهی است.

$$(2) \Leftrightarrow (1) \text{ فرض کنیم } M \cong N \text{ مشابه آن چه در مرجع [۱۶] قضیه ۲.۱، ثابت شده است، خود توان‌های متعامد}^9$$

$e_1, e_2, \dots, e_n$  از حلقه  $R$  موجودند به طوری که،

$$N \cong t_{21}(e_1R) \oplus \dots \oplus (t_{2k}e_kR) \text{ و } M \cong t_{11}(e_1R) \oplus \dots \oplus t_{1k}(e_kR)$$

پس  $1 \leq j \leq k$  موجود است به طوری که  $e_j \neq 0$  و  $t_{1j} \neq t_{2j}$ . چون  $e_j$  پوچ توان نیست، لذا ایده‌آل اول  $P$  از  $R$

موجود است که  $e_j \notin P$  برای هر  $i \neq j$  چون  $e_i e_j = 0$  لذا  $e_i \in P$ . بنابراین،

$$M_P \cong M_R \otimes_R P \cong \bigoplus_{i=1}^k t_{1i}(e_iR) \otimes_R R_P$$

اگر  $i \neq j$  چون  $e_i \in P$ ، لذا  $1 - e_i \notin P$ . همچنین  $(1 - e_i)e_i = 0$ ،  $R_P = 0$ ،  $e_i R \otimes_R P \cong \frac{e_i}{1}$ .

بنابراین

$$N_P \cong t_{2j}R_P, \text{ به طریق مشابه، } M_P \cong t_{1j}R_P$$

همچنین  $R_P$  حلقه‌ای جابه‌جایی است و دارای بعد ثابت پایاست.<sup>۱۰</sup> بنابراین،  $M_P \cong N_P$  که تناقض است.

**نتیجه ۱.** فرض کنید  $R$  یک حلقه جابه‌جایی نظریف‌پذیر باشد. در این صورت، هر  $R$ -مدول تصویری متناهی مولد و از

رتبه ثابت، آزاد است.

**اثبات:** فرض کنید  $M$  یک  $R$ -مدول تصویری متناهی مولد و از رتبه ثابت  $n$  باشد. داریم،

$$M \cong R_P^n \cong (R^n)_P$$

<sup>۸</sup> Constant rank

<sup>۹</sup> Orthogonal idempotent

<sup>۱۰</sup> Invariant basis number

که  $P$  ایده‌آل اولی از حلقه  $R$  است. بنا بر قضیه ۱،  $M$  آزاد است.

چون در مرجع [۱۱] یک  $R$ -مدول تصویری متناهی مولد  $P$  را به طور پایدار آزاد نامید، هر گاه اعداد طبیعی  $m, n$

$$P \oplus R^n \cong R^m.$$

موجود باشند به طوری که

نتیجه ۲. فرض کنید  $R$  یک حلقه نظریف‌پذیر جابه‌جایی باشد. آن‌گاه هر  $R$  مدول به طور پایدار آزاد، آزاد است.

اثبات: طبق نتیجه ۱، اثبات بدیهی است.

قضیه ۲. فرض کنید،  $R$  یک حلقه جابه‌جایی نظریف‌پذیر و  $M$  و  $N$   $R$ -مدول‌های تصویری متناهی مولد باشند. در این

صورت شرایط زیر معادلند،

$$M \cong N \quad (۱)$$

$$M_P \cong N_P \quad (۲)$$

برای هر ایده‌آل ماکسیمال  $P$  از حلقه  $R$ .

اثبات: (۱)  $\Leftrightarrow$  (۲) بدیهی است.

(۲)  $\Leftrightarrow$  (۱) فرض کنید  $M \not\cong N$ ، بنا بر قضیه ۲.۱ از مرجع [۱۶]، خود توان‌های متعامد  $e_1, \dots, e_k \in R$  و اعداد

صحیح نامنفی  $t_{ij}$  موجودند به طوری که،

$$N \cong t_{21}(e_1R) \oplus t_{22}(e_2R) \dots \oplus t_{2k}(e_kR)$$

$$M \cong t_{11}(e_1R) \oplus t_{12}(e_2R) \oplus \dots \oplus t_{1k}(e_kR)$$

چون  $M \not\cong N$  سپس  $1 \leq j \leq k$  موجود است به طوری که،  $t_{1j} \neq t_{2j}$  و  $e_j \neq 0$ . لذا ایده‌آل ماکسیمال  $P$  از حلقه  $R$

موجود است که  $e_j \notin P$ ، زیرا در غیر این صورت  $e_j \in J(R)$  و لذا  $e_j = 0$  که متناقض است با این‌که  $e_j \notin P$ .

از طرفی به ازای هر  $i \neq j$ ،  $e_i e_j = 0$ . حال با روشی مشابه قضیه ۱، نتیجه می‌گیریم که  $M \cong N$ .

فرض کنید،  $R$  حلقه‌ای جابه‌جایی و  $x \in R$ ،  $x \neq 0$ . قرار دهید،

$$R_{(x)} = S^{-1}R, S = \{1, x, x^2, \dots\}$$

قضیه ۳. فرض کنید  $R$  حلقه‌ای جابه‌جایی و نظریف‌پذیر باشد و  $R = (f_1, \dots, f_n)$ . فرض کنیم  $M$  و  $N$   $R$ -مدول‌های

تصویری متناهی مولد باشند در این صورت شرایط زیر معادلند.

$$M \cong N \quad (۱)$$

$$M_{(f_i)} \cong N_{(f_i)} \quad \text{برای هر } 1 \leq i \leq n \quad (۲)$$

(۱)  $\Leftrightarrow$  (۲) بدیهی است.

(۲)  $\Leftrightarrow$  (۱) فرض کنید  $P$  یک ایده‌آل اول  $R$  باشد، چون  $R = (f_1, \dots, f_n)$ ،  $f_i \in R$ ،  $f_i \in P$  است که  $f_i \notin P$  لذا



$f_i \in R - P$ . فرض کنید  $T = R - P$ . در این صورت

$$M_P \cong T^{-1}M_{(f_i)}$$

به طریق مشابه،

$$N_P \cong T^{-1}N_{(f_i)}$$

چون

$$M_{(f_i)} \cong N_{(f_i)}$$

داریم،

$$M_P \cong N_P$$

طبق قضیه ۱، نتیجه می‌گیریم که  $M \cong N$ .

نتیجه ۳. فرض کنید  $R$  حلقه‌ای نظریف‌پذیر جابه‌جایی،  $a \in R$ ،  $M$ ،  $N$  و  $R -$  مدول‌های تصویری متناهی مولد باشند

آن‌گاه شرایط زیر معادلند:

$$M \cong N \quad (1)$$

$$M_{(a)} \cong N_{(a)} \text{ و } M_{(1-a)} \cong N_{(1-a)} \quad (2)$$

اثبات: بدیهی است.

### حلقه‌های هرمیتی و قطری‌پذیری ماتریس‌ها روی حلقه‌های نظریف‌پذیر

در این بخش برخی خواص حلقه‌های هرمیتی را بررسی می‌کنیم.

حلقه  $R$  را یک حلقه هرمیتی نامیم، هر گاه هر ماتریس  $1 \times 2$  و هر ماتریس  $2 \times 1$  روی  $R$ ، تقلیل یافته قطری باشد.

مثال ۱. فرض کنید  $R = Z_4[x]$  در این صورت  $\frac{R}{J(R)}$  حلقه‌ای هرمیتی است ولی  $R$  هرمیتی نیست.

اثبات: واضح است که  $J(R) = \{0, 2\}[x]$ . بنابراین  $\frac{R}{J(R)} \cong Z_2[x]$  که یک دامنه ایده‌آل اصلی و لذا هرمیتی است. در

حالی که  $I = 2R + xR$ ، ایده‌آلی از حلقه  $R$  است، که دوری نیست. بنابراین  $R$  حلقه بزوت نیست و لذا هرمیتی نیست.

گزاره ۱. فرض کنید،  $R$  حلقه‌ای هرمیتی و  $x$  یک متغیر روی  $R$  باشد، به طوری که  $R[[x]]$  حلقه‌ای بزوت باشد. در

این صورت

$R[[x]]$  هرمیتی است.

**برهان:** فرض کنید  $\psi: R[[x]] \rightarrow R$  با ضابطه  $\psi(f(x)) = f(0)$ . در این صورت،  $\ker\psi \subseteq J(R[[x]])$  و  $\psi$  همریختی پوشاست. بنابراین  $R \cong \frac{R[[x]]}{\ker\psi}$  که نشان می‌دهد  $\frac{R[[x]]}{\ker\psi}$  هرمیتی است، چون  $R[[x]]$  بزوت است. طبق مرجع [۱۵]،  $R[[x]]$  هرمیتی است.

تگانیو (Toganbaev) در مطالعه خود روی حلقه‌های بزوت، در مرجع [۱۶] لم ۳، نشان داد که برای هر حلقه  $R$ ، حلقه بزوت  $S$  و خود توان  $e \in S$  موجودند به طوری که  $R \cong eSe$ . بنابراین برای هر حلقه  $R$  و هر خودتوان  $e$ ، حلقه  $eRe$  لزوماً بزوت نیست. این مسأله که برای هر حلقه هرمیتی  $R$ ، تحت چه شرایطی  $eRe$  یک حلقه هرمیتی است همچنان یک سؤال باز است.

**مثال ۲.** فرض کنید  $F$  یک میدان و  $x$  و  $y$  دو متغیر روی  $F$  باشند در این صورت  $F[x]$  و  $F[y]$  جبرهای هرمیتی هستند اما  $F[x] \otimes_F F[y]$  یک جبر هرمیتی نیست.

**اثبات:** چون  $F[x]$  و  $F[y]$  دامنه ایده آل اصلی جابه‌جایی هستند لذا دامنه بزوت هستند پس بنابر قضیه ۲.۵. از مرجع [۱]،  $F[x]$  و  $F[y]$  هرمیتی هستند. در حالی که،  $F[x] \otimes_F F[y] \cong F[x, y]$  و  $F[x, y]$  بزوت نیست. زیرا ایده‌آل

$$I = (x, y) \text{ دوری نیست. پس این جبر هرمیتی نیست.}$$

فرض کنید  $R$  یک حلقه و  $M$  یک  $R - R$  دو مدول باشد در این صورت مجموعه  $\{(r, m) | r \in R, m \in M\}$  با دو عمل زیر تشکیل یک حلقه می‌دهد که حلقه توسعه بدیهی<sup>۱۱</sup> نامیده می‌شود و با نماد  $T(R, M)$  نشان داده می‌شود.

$$\forall r_1, r_2 \in R, m_1, m_2 \in M, (r_1, m_1) + (r_2, m_2) = (r_1 + r_2, m_1 + m_2)$$

$$(r_1, m_1) \cdot (r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + m_1 r_2)$$

$$\text{واضح است که } T(R, M) \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in R, b \in M \right\}$$

حال نشان می‌دهیم که خاصیت هرمیتی بودن از حلقه  $R$  به حلقه توسعه بدیهی آن انتقال داده نمی‌شود.

ابتدا مفهوم FP-انژکتیو بودن را بیان می‌کنیم.

بنابر مرجع [۱۷] یک  $R - M$  مدول FP، انژکتیو نامیده می‌شود هر گاه برای هر  $R - M$  مدول با نمایش متناهی  $N$ ،  $\text{Ext}^1(N, M) = 0$  واضح است که  $\text{Ext}^1(Z_4, Z) \neq 0$  که نشان می‌دهد حلقه  $Z$  FP-انژکتیو نیست. همچنین یک حلقه  $R$ ، کاهشی<sup>۱۲</sup> نامیده می‌شود، هر گاه هیچ پوچ توان غیربدیهی نداشته باشد.

<sup>۱۱</sup> Trivial ring extension

<sup>۱۲</sup> Reduced ring

یک حلقه  $R$  منسجم<sup>۱۳</sup> نامیده می‌شود. هر گاه هر ایده‌آل با تولید متناهی آن با نمایش متناهی باشد.

**مثال ۳.** فرض کنید حلقه  $R$  به صورت،  $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in Z \right\}$  باشد. در این صورت  $R$  حلقه‌ای غیر هرمیتی است، در حالی که،  $Z$  حلقه هرمیتی است.

**برهان:** بنا بر قضیه ۶.۲.۱ از مرجع [۱۸]،  $Z$  یک حلقه مقسوم علیه ابتدایی و لذا هرمیتی است. فرض کنید  $R$  حلقه‌ای هرمیتی باشد، لذا بنابر نتیجه ۳.۳ مرجع [۱۷]،  $Z$  حلقه‌ای بزو و  $FP$ -انژکتیو است که متناقض با مثال بالاست. لذا  $R$  هرمیتی نیست.

بنا بر مرجع [۱۱] برای هر دو عدد طبیعی  $n, m$ ، یک همریختی  $f \in \text{Hom}_R(nR, mR)$  منظم نامیده می‌شود هرگاه همریختی  $g \in \text{Hom}_R(nR, mR)$  موجود باشد به طوری که  $fgf = f$ .

گزاره زیر در مرجع [۱۰] برای حلقه‌های تبدیلی اثبات شده است، ما آن را به حلقه‌های نظریف‌پذیر تعمیم می‌دهیم.

**گزاره ۲.** فرض کنید  $R$  حلقه‌ای نظریف‌پذیر،  $(n \geq m)$ ،  $f \in M_{m \times n}(R)$ ، منظم باشد. در این صورت  $f$  تقلیل یافته قطری است اگر و فقط اگر تجزیه‌های زیر، برای  $\text{Ker}(f), \text{Im}(f), \text{Coker}(f)$  موجود باشند.

$$\text{Ker}(f) = K_1 \oplus \dots \oplus K_n, \text{Im}(f) = I_1 \oplus \dots \oplus I_m, \text{Coker}(f) = C_1 \oplus C_2 \dots \oplus C_m$$

به طوری که،

$$K_j \oplus I_j \cong C_j \oplus I_j \cong R, \quad j = 1, \dots, m \text{ و } j = m+1, \dots, n \text{ برای هر } R.$$

و اگر  $m \geq n$  آن‌گاه  $f$  تقلیل یافته قطری است اگر و تنها اگر

$$\text{Ker} f = K_1 \oplus \dots \oplus K_n \text{ و } \text{Im}(f) = I_1 \oplus \dots \oplus I_n, \text{Coker}(f) = C_1 \oplus \dots \oplus C_m$$

به طوری که

$$K_j \oplus I_j \cong C_j \oplus I_j \cong R, \quad j = 1, \dots, n, \quad K_j \cong R, \quad j = n+1, \dots, m$$

**برهان:** اثبات شبیه اثبات گزاره ۲.۳ از مرجع [۱۰] است.

فرض کنید  $K, C, I, R$ -مدول‌های با تولید متناهی باشند به طوری که،

$$(n \geq m)mR \cong R \oplus C \text{ و } nR \cong K \oplus I$$

در این صورت یک نظریف قطری برای این تجزیه‌ها در صورت وجود به شکل،

$$K = K_1 \oplus K_2 \dots \oplus K_n, I = I_1 \oplus I_2 \dots \oplus I_n, C_1 \oplus C_2 \dots \oplus C_m$$

<sup>۱۳</sup> Coherent ring

می‌باشد، به طوری که

$$K_i \cong R, K_j \oplus I_j \cong C_j \oplus I_j \cong R, i = m+1, \dots, n, j = 1, \dots, m.$$

لم ۱. فرض کنید  $R$  حلقه‌ای نظریف پذیر باشد.  $n$  و  $m$  اعداد طبیعی،  $K, I, C$  و  $R$  -مدول‌های با تولید متناهی باشند

و

$$C \cong C' \oplus X \text{ و } K \cong K' \oplus X \text{ همچنین } n \geq m \text{ و } mR \cong R \oplus C, nR \cong K \oplus I$$

برای  $R$  -مدول‌های  $K', X$  و  $C'$ . در این صورت اگر تجزیه‌های بالا دارای نظریف قطری باشند، آن‌گاه، تجزیه

$$mR \cong R \oplus C \text{ و } nR \cong K \oplus I$$

دارای نظریف قطری است.

**برهان:** مشابه برهان گزاره ۲.۲، از مرجع [۱۰] است.

قضیه زیر در مرجع [۱۰] برای هر حلقه تبدالی ثابت شد که ما آن را برای حلقه نظریف پذیر تعمیم می‌دهیم.

**قضیه ۴.** فرض کنید  $R$  حلقه‌ای نظریف پذیر با این خاصیت که  $2R \oplus A \cong R \oplus B$  ایجاب کند که  $R \oplus A \cong B$  برای

$R$  -مدول‌های تصویری با تولید متناهی  $B$  و  $A$  که  $B$  مولد نیز باشد. در این صورت هر ماتریس مربعی منظم روی  $R$

تقلیل یافته قطری است.

**برهان:** فرض کنیم  $f: nR \rightarrow nR$  یک ماتریس منظم باشد، قرار دهید،

$$\text{Coker}(f) = C \text{ و } \text{Im}(f) = I, \text{Ker}f = K$$

طبق لم ۱، کافی است، نشان دهیم که  $K, I, C$  می‌توانند به صورت،

$$C = C_1 \oplus \dots \oplus C_n \text{ و } I = I_1 \oplus \dots \oplus I_n, K = K_1 \oplus K_2 \dots \oplus K_n$$

باشند، به طوری که

$$K_j \oplus I_j \cong I_j \oplus C_j \cong R \text{ برای } j = 1, \dots, n.$$

چون  $f$  یک هم‌ریختی منظم است طبق لم ۱.۱.۱۴ از مرجع [۴]،

$$K \oplus I \cong I \oplus C \cong nR.$$

همچنین  $R$  حلقه‌ای نظریف پذیر است و  $K \oplus I \cong I \oplus C$  برای  $R$  -مدول‌های تصویری متناهی مولد  $I, K$  و  $R$ . پس

$R$  -مدول‌های  $K_1, K_2, I_1$  و  $I_2$  موجودند به طوری که،

$$K_2 \oplus I_2 \cong C \text{ و } K_1 \oplus I_1 \cong I, I = I_1 \oplus I_2, K = K_1 \oplus K_2$$

طبق لم ۱، کافی است، یک نظریف قطری برای تجزیه‌های زیر داشته باشیم.

$$nR \cong K_1 \oplus (I \oplus K_2) \cong (I \oplus K_2) \oplus I_2$$

بنابراین می‌توان فرض کرد، که  $K$  با جمعوندی از  $I$  و  $nR$  با جمعوند مستقیمی از  $2I$  یکریخت است و لذا  $I$  یک مولد است.

حال از یکریختی‌های

$$nR \cong K \oplus I \cong I \oplus C \cong (n-1)R \oplus R$$

و

$$(n-1)R \oplus C \cong K \oplus I \oplus C \cong (n-1)R \oplus (R \oplus K)$$

نتیجه می‌شود که  $R \oplus K$  یک مولد است. با به کار بردن رابطه حذفی فرض،  $n-1$  مرتبه داریم،

$$R \oplus K \cong R \oplus C.$$

چون  $R$  حلقه‌ای نظریف‌پذیر و  $R, K$  و  $C, R$  -مدول‌های تصویری با تولید متناهی هستند  $R$ -مدول‌های تصویری با

تولید متناهی  $R_1, R_2, C_1$  و  $C_2$  موجودند، به طوری که

$$R \cong R_1 \oplus R_2, \quad C \cong C_1 \oplus C_2,$$

$$R_1 \oplus C_1 \cong R, \quad C_2 \oplus C_2 \cong k.$$

طبق گزاره ۱ کافی است، یک نظریف قطری برای تجزیه‌های زیر داشته باشیم.

$$R_2 \oplus (I \oplus C_2) \cong (I \oplus C_2) \oplus C_1.$$

بنابر این تجزیه می‌توان فرض کرد که  $R$  مدول تصویری متناهی مولد  $E$  چنان موجود است که

$$E \oplus K \cong E \oplus C \cong R.$$

پس می‌توان نوشت

$$nR \oplus E \cong 2R \oplus (n-2)R \oplus E \cong K \oplus I \oplus E \cong R \oplus I.$$

چون  $I$  مولد هست طبق فرض می‌توان  $R$  را از طرفین تجزیه بالا حذف کرد و داریم

$$(n-1)R \oplus E \cong I.$$

بنابراین

$$I \cong E \oplus R \oplus \dots \oplus R, \quad K \cong K \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0, \quad C \cong C \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0$$

و طبق گزاره ۱. نتیجه حاصل می‌شود.

در نتیجه زیر می‌خواهیم قطری پذیری ماتریس‌های منظم روی حلقه‌های نظریف‌پذیر را با استفاده از خاصیت حذفی

قضیه ۴ بررسی کنیم.

نتیجه ۴. فرض کنیم  $R$  یک حلقه نظریف‌پذیر باشد. در این صورت هر ماتریس منظم  $m \times n$  روی  $R$  تقلیل یافته قطری

است، اگر و تنها اگر خاصیت حذفی زیر، برای  $R$ -مدول‌های تصویری متناهی مولد برقرار باشد.

$$2R \oplus A \cong R \oplus B \implies R \oplus A \cong B.$$

در مثال ۱، نشان داده شد که خاصیت قطری پذیری ماتریس‌ها از حلقه  $\frac{R}{J(R)}$  به حلقه  $R$  انتقال داده نمی‌شوند. در گزاره زیر این موضوع را تحت شرایط خاص بررسی می‌کنیم.

**قضیه ۵.** فرض کنید  $R$  یک حلقه نظریف پذیر باشد به طوری که هر ماتریس منظم روی  $\frac{R}{J(R)}$  تقلیل یافته قطری باشد آن‌گاه هر ماتریس منظم روی  $R$  تقلیل یافته قطری است.

**برهان:**

فرض کنید  $A$  و  $B$  و  $R$  -مدول‌های تصویری با تولید متناهی باشند به طوری که

$$2R \oplus A \cong R \oplus B$$

بنابراین داریم،

$$2 \frac{R}{J(R)} \oplus \frac{A}{RJ(A)} \cong \frac{2R \oplus A}{J(2R \oplus A)} \cong \frac{R \oplus B}{J(R \oplus B)} \cong \frac{R}{J(R)} \oplus \frac{B}{RJ(B)}.$$

چون هر ماتریس منظم روی  $\frac{R}{J(R)}$  تقلیل یافته قطری است طبق نتیجه ۴،

$$\frac{R}{J(R)} \oplus \frac{A}{RJ(A)} \cong \frac{R}{RJ(R)}.$$

چون  $A$  و  $R$  هر دو مدول‌های تصویری با تولید متناهی هستند پس،  $R \oplus A \cong B$ . طبق نتیجه ۴ حکم حاصل می‌شود.

**قدردانی**

از داوران محترم که با ارائه نظرات ارزشمند خود، باعث شدند که نسخه ابتدایی از نظر کیفیت علمی و نگارشی ارتقا یابد، سپاسگزاری می‌کنیم.

## References

1. Kaplansky, I., Elementary divisors and modules, Trans. Amer. Math. Soc, 66 (1949), 464-491.
2. Smith, H. J. S., On systems of linear indeterminate equations and congruences, Philos Trans R Soc., 151 (1861), 293-326.
3. Dickson L. E., Algebras and their arithmetics, University of Chicago press, Chicago, 1923.
4. Wedderburn, J. H., Non-commutative domains of integrity, J. Reine Angew Math, 167 (1930), 129-141.
5. Waerden, B. L. V., Modern Algebra, Springer, Berlin, New York.

6. Jacobson N., Pseudo- Linear Transformations, Ann of Math, 38 (1937) 484-507.
7. Henriksen M., On a class of regular rings that are elementary divisor rings, Archiv der Mathematik, 24 (1973), 133-141.
8. Levy. L. S., Sometimes only square matrices can be diagonalized, Proc. Amer. Math. Soc., 52 (1979), 18-22.
9. Menal. P., Moncasi J., On regular rings with stable range 2, 24 (1982), 25-40.
10. Ara. P., Goodearl. K., Omera K. C., Pardo. E., Diagonalizations of matrices over regular rings, Linear Algebra Appl., 265 (1997), 147-163.
11. Chen. H., Rings related to stable range conditions, World scientific publishing, (2001).
12. Dubbertin. H., On vaught's criterion for isomorphisms of countable Algebra Universalis. 15 (1982), 95-144.
13. Crawly. P., Jonsson. B., Refinement for infinite decompositions of algebraic systems. 14 (1964), 797-855.
14. Bahmani Sangesari R., Sheibani Abdolyousefi M., Ashrafi N., Extension of refinement rings, Turk J Math, 40 (2016), 71-79.
15. Tongsuo. Wu., Finitely generated projective modules over exchange rings, Manuscript Math,
16. Tuganbaev, A. A., Bezout modules and rings, Journal of Mathematical Science, 5 (2009), 596-597.
17. Couchot F., Gaussian trivial ring extensions and Fqp rings. Communications in Algebra, 43(2015), 2863-2874.
18. Zabavsky B., Diagonal reduction of matrices over rings, Mathematical studies monograph series, Vol XVI, VNTL Publishers.