Mathematical Researches

Print ISSN: 2588-2546
Online ISSN: 2588-2554

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

An upper bound for the size of a cross t-almost ntersecting family

Ali Taherkhani[1]

1. Department of Mathematics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan, Iran.

E-mail: ali.taherkhani@iasbs.ac.ir

Article Info

Article type:

Research Article

Article history:

Received:
6 July 2020
Revised form:
26 August 2020
Accepted:
26 August 2020
Published online:
14 May 2022

Keywords:

Erdős–Ko–Rado theorem;
Intersecting family;
Cross-intersecting family;
t-almost intersecting.

ABSTRACT

Introduction

Let n and k be two positive integers such that $n \geq k$. Let $[n] = \{1, \ldots, n\}$ be an n-elemen set and let symbol $\binom{[n]}{k}$ denote the family of all k-element subsets (or k-sets) of $[n]$. A family $\mathcal{A}$ of k-sets of $[n]$ is said to be intersecting if for every two members A, B in $\mathcal{A}$, we have $A \cap B \neq \emptyset$. For a fixed element $i \in [n]$, if all members of $\mathcal{A}$ contain i, then it is clear that $\mathcal{A}$ is an intersecting family, which is called star. For each $i \in [n]$, the family $S_i = \{A: |A| = k, A \subseteq [n], i \in A\}$ is a maximal star.

The well-known *Erdős* –Ko–Rado theorem is one of important results in extremal combinatorics. It has many interesting proofs and extensions. The *Erdős*-Ko-Rado theorem states that every intersecting family of $\binom{[n]}{k}$ has cardinality at most $\binom{n-1}{k-1}$ provided that $n \geq 2k$; moreover, if $n > 2k$, then the only intersecting families of this cardinality are isomorphic to S_i.

Two families $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ and $\mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{\ell}$ are called cross intersecting if for any $A \in \mathcal{A}$ and $B \in \mathcal{B}$, we have $A \cap B \neq \emptyset$. Strengthening the Erdős–Ko–Rado theorem, in 1986 Pyber showed an upper bound for $|\mathcal{A}||\mathcal{B}|$ as follows.

Theorem A. Let k, ℓ, n be positive integers such that $k \geq \ell$. Assume that $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ and $\mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{\ell}$ are cross intersecting.

- If $k > \ell$ and $n \geq 2k + \ell - 2$, then $|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{\ell-1}$.
- If $k = \ell$ and $n \geq 2k$, then $|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{k-1}^2$.

In 1989 Matsumoto and Tokushige slightly improved Pyber's result as follows.

Theorem B. Let k, ℓ, n be positive integers such that $n \geq 2\max\{k, \ell\}$. Assume that $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ and $\mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{\ell}$ are cross intersecting. Then $|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{\ell-1}$.

We say that a family $\mathcal{A}$ is *t*-almost intersecting if for every set $A \in \mathcal{A}$ there are at most *t* elements of $\mathcal{A}$ disjoint from A. In 2012 Gerbner, Lemons, Palmer, Patkós, and Szécsi proved an interesting generalization of the Erdős–Ko–Rado theorem for *t*-almost intersecting families.

Theorem C. Let *k*, *n*. *t* be positive integers and $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ is a *t*-almost intersecting family.

- If $n=n(k,t)$ is sufficiently large, then $|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{k-1}$ with equality if and only if $\mathcal{A} = S_i$ for some $i \in [n]$
- If $k \geq 3, n \geq 2k+2,$ *and* $t = 1$, then $|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{k-1}$ with equality if and only if $\mathcal{A} = S_i$ for some $i \in [n]$.

Main Results

We say two families $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ and $\mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{\ell}$ are cross *t*-almost intersecting if any $A \in \mathcal{A}$ is disjoint from at most *t* elements of $\mathcal{B}$ and any $B \in \mathcal{B}$ is disjoint from at most *t* elements of $\mathcal{A}$. As our main result we simultaneously extend the previous results for sufficiently large *n*.

Theorem 1. Let k, ℓ, n be positive integers such that $n=n(k, \ell, t)$ is sufficiently large. Assume that $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ and $\mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{\ell}$ are cross *t*-almost intersecting. Then $|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{\ell-1}$ with equality if and only if $\mathcal{A} = \mathcal{B} = S_i$ for some $i \in [n]$.

How to cite: Taherkhani, A.; (2022). An upper bound for the size of a cross t-almost ntersecting family. *Mathematical Researches*, 8 (1), 205-214

شاپا چاپی: ۲۵۴۶-۲۵۸۸
شاپا الکترونیکی: ۲۵۵۴-۲۵۸۸

پژوهش‌های ریاضی

دانشگاه خوارزمی

Homepage: https://mmr.khu.ac.ir/

کران بالایی برای مرتبهٔ یک خانوادهٔ ضربدری t-تقریباً اشتراکی

علی طاهرخانی[۱]✉

۱. دانشکدهٔ ریاضی، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان، ایران. پست الکترونیکی: ali.taherkhani@iasbs.ac.ir

اطلاعات مقاله | **چکیده**

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۴/۱۶
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۶/۰۵
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۶/۰۵
تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۲۴

واژه‌های کلیدی:
قضیهٔ اردوش-کو-رادو،
خانوادهٔ اشتراکی،
خانوادهٔ ضرب‌دری اشتراکی،
خانوادهٔ t-تقریباً اشتراکی.

فرض کنید $\mathcal{A}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی X باشد. به $\mathcal{A}$ اشتراکی گویند هرگاه برای هر دو عضو A و B متعلق به $\mathcal{A}$ داشته باشیم $A \cap B \neq \emptyset$. قضیهٔ معروف اردوش-کو-رادو بیان می‌کند اندازه‌ی یک خانواده اشتراکی از زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی حداکثر $\binom{n-1}{k-1}$ است و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $n > 2k$ و عضوی مانند $i \in X$ وجود داشته باشد که برای هر عضو در $\mathcal{A}$ مانند A داشته باشیم $i \in A$. فرض کنید k و ℓ دو عدد صحیح مثبت باشند که $n \geq max\{2k, 2\ell\}$. فرض کنید $\mathcal{A}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های k عضوی از مجموعه n عضوی X و $\mathcal{B}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های ℓ عضوی از مجموعه X باشد به دو خانواده $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو خانوادهٔ ضرب‌دری t–تقریباً اشتراکی گویند اگر هر عضو $\mathcal{A}$ با حداکثر t عضو از خانواده $\mathcal{B}$ اشتراک نداشته باشد و همین‌طور هر عضو $\mathcal{B}$ با حداکثر t عضو از خانواده $\mathcal{A}$ اشتراک نداشته باشد. در این مقاله به عنوان تعمیمی از قضیهٔ اردوش-کو-رادو نشان می‌دهیم اگر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو خانواده ضرب‌دری t– تقریباً اشتراکی باشند و n به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، آن‌گاه

$$|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{\ell-1}$$

و تساوی رخ می دهد اگر و تنها اگر عضوی مانند $i \in X$ وجود داشته باشد که برای هر عضو A متعلق به $\mathcal{A}$ و هر عضو B متعلق به $\mathcal{B}$ داشته باشیم، $i \in A$ و $i \in B$.

استناد: طاهرخانی، علی؛ (۱۴۰۱). کران بالایی برای مرتبهٔ یک خانوادهٔ ضربدری t-تقریباً اشتراکی. *پژوهش‌های ریاضی*، ۸ (۱)، ۲۱۴-۲۰۵.

ناشر: دانشگاه خوارزمی

۱. مقدمه و نتایج پیشین

برای عددهای صحیح و مثبت n و k فرض کنید نماد $[n]$ و $\binom{[n]}{k}$ به ترتیب نشان‌دهندهٔ مجموعهٔ n عضوی $\{1,\ldots,n\}$ و خانوادهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های k عضوی از $[n]$ باشند. به خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های k عضوی مانند $\mathcal{A}$ اشتراکی گویند هرگاه برای هر دو عضو A و B متعلق به $\mathcal{A}$ داشته باشیم $A \cap B \neq \emptyset$. برای $i \in [n]$ خانوادهٔ تمام زیرمجموعه‌های k عضوی $[n]$ را که شامل i باشند ستاره با مرکز i می‌نامیم و آن را با S_i نمایش می‌دهیم. همچنین واضح است که S_i یک خانواده اشتراکی است.

قضیهٔ معروف اردوش- کو- رادو در ارتباط با خانواده‌های اشتراکی است و در زمرهٔ مهمترین قضیه‌های ترکیبیات حدی است. این قضیهٔ کران بالایی برای اندازهٔ یک خانوادهٔ اشتراکی از زیرمجموعه‌های k عضوی $[n]$ می‌دهد و خانواده‌هایی که این کران را اخذ می‌کنند مشخص می‌کند.

قضیهٔ ۱. [۵] فرض کنید n و k دو صحیح مثبت باشند که $n \geq 2k$. اگر $\mathcal{A}$ خانواده‌ای اشتراکی از $\binom{[n]}{k}$ باشد، آن‌گاه $|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{k-1}$. همچنین، اگر $n > 2k$، تساوی برقرار است اگر و تنها اگر برای عضوی چون $i \in [n]$ داشته باشیم $\mathcal{A} = S_i$.

قضیهٔ اردوش- کو- رادو دارای تعمیم‌ها و اثبات‌های زیبا و جالب بسیاری است. برای مثال می‌توان به مقاله‌های [۱،۲،۳،۶،۸،۹،۱۰،۱۱،۱۲،۱۵،۱۶،۱۸،۱۹] اشاره کرد. یکی از تعمیم‌های پرکاربرد قضیهٔ اردوش-کو-رادو، قضیهٔ هیلتون – میلنر است که یک قضیهٔ پایداری برای خانواده‌های اشتراکی است.

فرض کنید B یک زیرمجموعهٔ k عضوی باشد که $1 \notin B$. دو خانوادهٔ اشتراکی

$$\mathcal{H} = \{A | 1 \in A, A \cap B \neq \emptyset\} \cup \{B\}$$

و

$$\mathcal{H}' = \{A | |A \cap \{1,2,3\}| \geq 2\}$$

زیر را در نظر بگیرید. حالت‌های تساوی در قضیهٔ هیلتون- میلنر فقط در آنها اتفاق می‌افتد.

قضیهٔ ۲. [۱۲] فرض کنید n و k دو عدد صحیح و مثبت باشند که $n > 2k$. اگر $\mathcal{A}$ خانواده‌ای اشتراکی از $\binom{[n]}{k}$ باشد که زیر خانواده هیچ ستاره‌ای نیست، آنگاه

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-1} + 1.$$

به علاوه، تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $\mathcal{A} \cong \mathcal{H}$ و یا $k = 3$ و $\mathcal{A} \cong \mathcal{H}'$.

یکی دیگر از تعمیم‌های معروف قضیهٔ اردوش- کو- رادو قضیه‌ای است که توسط پایبر در سال ۱۹۸۵ اثبات شده است. در ادامه به بیان این قضیه خواهیم پرداخت.

فرض کنید k و ℓ دو عدد صحیح و مثبت باشند. به دو خانوادهٔ $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ و $\mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{\ell}$ ضربدری اشتراکی گویند هرگاه برای هر عضو $A \in \mathcal{A}$ و هر عضو $B \in \mathcal{B}$ داشته باشیم $A \cap B \neq \emptyset$ پایبر قضیهٔ زیر را در ارتباط با خانواده‌های اشتراکی اثبات کرد.

قضیهٔ ۳. [۱۹] فرض کنید k، ℓ و n عددهای صحیح مثبت باشند. فرض کنید $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ و $\mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{\ell}$ دو خانوادهٔ ضربدری اشتراکی باشند.

- اگر $k > l$ و $n \geq 2k + \ell - 2$

$$|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{\ell-1}.$$

- اگر $k = \ell$ و $n \geq 2k$

$$|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{k-1}^2.$$

البته باید به این نکته اشاره کرد که ماتسوموتو و توکوشیگ [۱۸] قضیه پیش را بهبود بخشیدند و نتیجهٔ زیر را اثبات کردند.

قضیهٔ ۴. [۱۸] فرض کنید k، ℓ و n عددهای صحیح مثبت باشند که $n \geq max\{2k, 2l\}$.
فرض کنید $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ و $\mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{\ell}$ دو خانواده‌ی ضربدری اشتراکی باشند. آن‌گاه

$$|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{\ell-1}.$$

تعمیم دیگری از قضیهٔ اردوش-کو- رادو توسط گیربنر و همکاران در [۹] ارائه شد که در ادامه آن را بیان می‌کنیم. به خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های k عضوی $[n]$ مانند $\mathcal{A}$ خانواده t–تقریباً اشتراکی گویند اگر هر عضو $A \in \mathcal{A}$ حداکثر با t عضو $\mathcal{A}$ اشتراک نداشته باشد.

گیربنر و همکاران تعمیمی از قضیهٔ اردوش-کو-رادو را برای خانواده‌های t–تقریباً اشتراکی زمانی که n به اندازهٔ کافی نسبت به k و t بزرگ است ثابت کردند. البته آنها توانستند برای زمانی که $t = 2$ شرط $n \geq 2k + 2$ را جایگزین شرط n به اندازه کافی کنند.

قضیهٔ ۵. [۱۰] فرض کنید n، k و t سه عدد صحیح مثبت باشند که $n \geq 2k$. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک خانواده t–تقریباً اشتراکی از $\binom{[n]}{k}$ باشد.

- اگر $t \geq 2$ و $n = n(k,t)$ به اندازه کافی بزرگ باشد، آن‌گاه $|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{k-1}$. به علاوه، تساوی برقرار است اگر و تنها اگر برای عضوی چون $i \in [n]$ داشته باشیم $\mathcal{A} = S_i$.
- اگر $t = 1$ و $n \geq 2k + 2$، آن‌گاه $|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{k-1}$. به علاوه، تساوی برقرار است اگر و تنها برای عضوی چون $i \in [n]$ داشته باشیم $\mathcal{A} = S_i$.

ذکر این نکته مفید است که علیشاهی و طاهرخانی در [۱] کران بالایی برای $n(k,t)$ بیان شده در قضیهٔ قبل ارائه کردند و توانستند ثابت کنند که $n(k,t) \leq 3kt$ برقرار است. برای نتایجی از این دست و تعمیم‌های آنها می‌توانید مراجع [۱،۱۰،۱۶] را ببینید.

۲. نتیجهٔ اصلی و اثبات

در این مقاله دو مفهوم t–تقریباً اشتراکی و ضربدری اشتراکی را که در قسمت قبل تعریف شدند به مفهوم ضربدری t–تقریباً اشتراکی تعمیم می‌دهیم و نتیجه‌ای در این زمینه بیان و اثبات خواهیم کرد که قضیه‌های پیشین ذکر شده در این زمینه را نیز برای n به اندازهٔ کافی بزرگ نتیجه می‌دهد.

به دو خانواده $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ و $\mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{\ell}$ دو خانوادهٔ ضربدری t–تقریباً اشتراکی گویند اگر هر عضو $A \in \mathcal{A}$ با حداکثر t عضو از $\mathcal{B}$ اشتراک نداشته باشد و همین‌طور هر عضو $B \in \mathcal{B}$ با حداکثر t عضو از $\mathcal{A}$ اشتراک نداشته باشد.

قضیهٔ ۶. فرض کنید n، k، ℓ و t چهار عدد صحیح مثبت باشند که $k \geq 2$، $\ell \geq 2$ و $n = n(k,\ell,t)$ به اندازهٔ کافی بزرگ باشد. اگر $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ و $\mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{\ell}$ دو خانواده ضربدری t–تقریباً اشتراکی باشند، آن‌گاه

$$|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{\ell-1}.$$

به علاوه تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ ستاره‌هایی با مرکز یکسان باشند.

برای اثبات این قضیه به دو حکم زیر نیاز خواهیم داشت. حکم اول قضیه‌ای پرکاربرد است که توسط کاتونا و کروسکال به صورت مستقل در [۱۷،۱۴] اثبات شده است. حکم بعدی نیز لمی است که به صورت مستقل توسط فرانکل و کالای در [۱۳،۷] اثبات شده است که کاربردهایی فراوانی دارد.

برای بیان قضیهٔ کاتونا و کروسکال ابتدا نیاز به یک تعریف داریم. ترتیب الفبایی، $\prec$ روی مجموعه $\binom{[n]}{k}$ به این شکل تعریف می‌شود که اگر A و B دو زیرمجموعهٔ k عضوی از $[n]$ باشند، می‌نویسیم $A \prec B$ هرگاه $min(A\backslash B) \prec min(B\backslash A)$. فرض کنید $m \leq \binom{n}{k}$ عدد صحیح مثبت باشد. فرض کنید $\mathcal{L}^k(m)$ خانواده‌ی m زیرمجموعهٔ اول در خانواده‌ی $\binom{[n]}{k}$ نسبت به ترتیب الفبایی روی $\binom{[n]}{k}$ باشد. به‌عنوان مثال $\mathcal{L}^k\left(\binom{n-1}{k-1}\right)$ با ستاره S_1 یکی است.

قضیهٔ ۷. [۱۴،۱۷] فرض کنید k، ℓ و n عددهای صحیح مثبت باشند. اگر $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{k}$ و $\mathcal{B} \subseteq \binom{[n]}{\ell}$ دو خانوادهٔ ضربدری اشتراکی باشند. آن‌گاه $\mathcal{L}^k(|\mathcal{A}|)$ و $\mathcal{L}^k(|\mathcal{B}|)$ نیز ضربدری اشتراکی هستند.

لم ۸. [۷،۱۳] فرض کنید $\{(A_1,B_1),\ldots,(A_h,B_h)\}$ خانواده‌ای از زوج‌های مرتب از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای دلخواه باشند که برای هر $1 \leq i \leq h$ داریم $|A_i| = k$، $|B_i| = \ell$ و $A_i \cap B_i = \emptyset$ همچنین فرض کنید برای هر $1 \leq i < j \leq h$ داشته باشیم $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ آنگاه $\leq \binom{k+\ell}{k}$. $\square$

اثبات قضیهٔ ۶. فرض کنید که

$$|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \geq \binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{\ell-1}$$

بنابراین $|\mathcal{A}| \geq \binom{n-1}{\ell-1}$ یا $|\mathcal{B}| \geq \binom{n-1}{k-1}$. بدون این‌که به کلیت مسأله خللی وارد شود فرض کنید $|\mathcal{B}| \geq \binom{n-1}{k-1}$.

ابتدا فرض کنید که $\mathcal{B}$ یک خانوادهٔ اشتراکی نیست. فرض کنید $\emptyset \neq \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ طوری انتخاب شود که $\mathcal{A}'$ و $\mathcal{B}$ دو خانوادهٔ ضربدری اشتراکی باشند و فرض کنید $|\mathcal{A}'|$ بزرگ‌ترین مقدار ممکن را دارا باشد. چون $\mathcal{A}'$ و $\mathcal{B}$ دو خانوادهٔ ضربدری اشتراکی هستند پس با توجه به قضیهٔ ۴ داریم

$$|\mathcal{A}'||\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{\ell-1}.$$

چون $\mathcal{B}$ یک خانواده اشتراکی نیست، دو عضو از آن چون B و B' هستند که $B \cap B' = \emptyset$.

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت

$$|\mathcal{A}'| \leq k^2\binom{n-2}{\ell-2}.$$

چون $\mathcal{A}'$ و $\mathcal{B}$ دو خانوادهٔ ضربدری اشتراکی هستند، با توجه به قضیهٔ ۴ داریم $\mathcal{L}(|\mathcal{A}'|)$ و $\mathcal{L}(|\mathcal{B}|)$ خانواده‌های ضربدری اشتراکی هستند. همچنین می‌توان نتیجه گرفت که $|\mathcal{B}| \leq \sum_{i=1}^{\ell}\binom{n-i}{k-1}$. زیرا در غیر این صورت، اگر $|\mathcal{B}| > \sum_{i=1}^{\ell}\binom{n-i}{k-1}$، آن گاه $\{\ell+1,\dots,\ell+k\} \in \mathcal{L}(|\mathcal{B}|)$. چون $\{1,\dots,\ell\}$ به عنوان عضوی $\mathcal{L}(|\mathcal{A}'|)$ و $\{\ell+1,\dots,\ell+k\}$ به عنوان عضوی از $\mathcal{L}(|\mathcal{B}|)$ با هم اشتراک ندارند و این تناقض است با $\mathcal{L}(|\mathcal{A}'|)$ و $\mathcal{L}(|\mathcal{B}|)$ خانواده‌های ضربدری اشتراکی هستند.

در این قسمت ثابت می‌کنیم که $|\mathcal{A}\backslash\mathcal{A}'| \leq t\binom{k+\ell}{\ell}$. با توجه به تعریف خانوادهٔ $\mathcal{A}'$، زیرخانوادهٔ $\mathcal{A}\backslash\mathcal{A}'$ از $\mathcal{A}$ خانواده‌ای است که کمترین تعداد از اعضای $\mathcal{A}$ را دارد که با حذف آنها باقیماندهٔ خانوادهٔ $\mathcal{A}$ و خانوادهٔ $\mathcal{B}$ دو خانوادهٔ ضربدری اشتراکی می‌شوند. برای اثبات نامساوی ثابت می‌کنیم با حذف حداکثر $t\binom{k+\ell}{\ell}$ عضو از $\mathcal{A}$ باقیماندهٔ خانوادهٔ $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو خانوادهٔ ضربدری اشتراکی می‌شوند. تعریف کنید $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$. برای $j \geq 2$ فرض کنید $A_j \in \mathcal{A}_{j-1}$ و $B_j \in \mathcal{B}$ به گونه‌ای انتخاب شوند که $A_j \cap B_j = \emptyset$. چون $\mathcal{A}_j$ و $\mathcal{B}$ دو خانوادهٔ ضربدری t-تقریباً اشتراکی هستند، پس $t_j \leq t$ عضو از $\mathcal{A}_{j-1}$ مانند $A_{j,1},\dots,A_{j,t_j}$ وجود دارند که با B_j اشتراک ندارند. حال برای هر $j \geq 2$ قرار دهید $\mathcal{A}_j := \mathcal{A}_{j-1}\backslash\{A_{j,1},\dots,A_{j,t_j}\}$. فرض کنید $\hat{j}$ بزرگترین عدد j باشد که برای آن $A_j \in \mathcal{A}_{j-1}$ و $B_j \in \mathcal{B}$ وجود داشته باشند که $A_j \cap B_j = \emptyset$. بنابراین $\mathcal{A}_{\hat{j}}$ و $\mathcal{B}$ ضربدری اشتراکی هستند. به راحتی می‌توان دید که شرایط لم ۸ برقرار است پس $\hat{j} \leq \binom{k+\ell}{\ell}$. از طرف دیگر با توجه به نوع انتخاب $\mathcal{A}'$ داریم $|\mathcal{A}_{\hat{j}}| \leq |\mathcal{A}'|$ و در نتیجه $|\mathcal{A}\backslash\mathcal{A}'| \leq \mathcal{A}\backslash|\mathcal{A}_{\hat{j}+1}|$. بنابراین $|\mathcal{A}\backslash\mathcal{A}'| \leq t\binom{k+\ell}{\ell}$.

با توجه به بحث پیش و از آنجا که $|\mathcal{A}'||\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{\ell-1}$ و $|\mathcal{A}'| \leq k^2\binom{n-2}{\ell-2}$ و چون

$$|\mathcal{A}||\mathcal{B}| = (|\mathcal{A}'| + |\mathcal{A}\backslash\mathcal{A}'|)|\mathcal{B}|$$

پس داریم

$$|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq \left(k^2\binom{n-2}{\ell-2} + t\binom{k+\ell}{\ell}\right)|\mathcal{B}|.$$

بنابراین چون $|\mathcal{B}\,| \leq \ell \binom{n-1}{k-1}$ خواهیم داشت

$$|\mathcal{A}\,||\mathcal{B}\,| \leq (k^2 \binom{n-2}{\ell-2} + t\binom{k+\ell}{\ell})(\ell \binom{n-1}{k-1})$$

و در نتیجه اگر داشته باشیم

$$\ell k^2 \binom{n-2}{\ell-2} + \ lt\binom{k+\ell}{\ell}) < \binom{n-1}{\ell-1} \qquad (۱)$$

به تناقض می‌رسیم با فرض

$$|\mathcal{A}\,||\mathcal{B}\,| \geq \binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{\ell-1}$$

و حکم اثبات می‌شود. اما برقرار بودن نامساوی (۱) معادل برقراری نامساوی زیر است

$$\frac{lk^2\binom{n-2}{\ell-2}}{\binom{n-1}{\ell-1}} + \frac{\ell t\binom{k+\ell}{\ell}}{\binom{n-1}{\ell-1}} < 1 \qquad (۲)$$

که برای برقرار بودن نامساوی (۲) نیز کافی است نشان دهیم

$$\frac{\ell^2k^2}{n} + \frac{\ell t(k+\ell)\ldots(k+1)}{\ell(n-1)\ldots(n-\ell+1)} < 1$$

که این نامساوی نیز زمانی برقرار است که

$$\frac{\ell^2k^2}{n} + t(k+1)(\frac{k+\ell}{n})^{\ell-1} \leq 1$$

در نتیجه اگر

$$n \geq max\{\,2\ell^2k^2, (2t(k+1))^{\frac{1}{\ell-1}}(k+\ell)\}$$

بگیریم نامساوی‌های ذکر شده برقرار خواهند بود.

حال فرض کنید $\mathcal{B}$ خانواده‌ای اشتراکی باشد. آن‌گاه با توجه به قضیهٔ اردوش- کو- رادو داریم $|\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{k-1}$ و چون فرض کردیم $|\mathcal{B}| \geq \binom{n-1}{k-1}$ پس $|\mathcal{B}| = \binom{n-1}{k-1}$.

چون $n = n(k,\ell,t)$ به اندازهٔ کافی بزرگ فرض شده است به کمک قضیهٔ اردوش- کو- رادو می‌توان فرض کرد که $\mathcal{B}$ ستارهٔ S_1 است. همچنین مشابه قبل می‌توان فرض کرد $\mathcal{A}$ خانواده‌ای اشتراکی است. زیرا در غیر این صورت اگر $\mathcal{A}$ خانواده‌ای اشتراکی نباشد، مانند حالتی که $\mathcal{B}$ خانوادهٔ اشتراکی نبود می‌توان ثابت کرد

$$|\mathcal{A}\,||\mathcal{B}\,| < \binom{n-1}{k-1}\ \binom{n-1}{\ell-1}$$

که تناقض است. بنابراین با توجه به قضیهٔ اردوش- کو- رادو $|\mathcal{A}| \leq \binom{n-1}{\ell-1}$. اگر $|\mathcal{A}| < \binom{n-1}{\ell-1}$، آن‌گاه داریم $|\mathcal{A}\,||\mathcal{B}\,| < \binom{n-1}{k-1}\ \binom{n-1}{\ell-1}$ که تناقض است. بنابراین می‌توان فرض کرد $|\mathcal{A}| = \binom{n-1}{\ell-1}$ و $\mathcal{A}$ یک ستاره مانند S_i برای $i \in [n]$ است. اما می‌توان ثابت کرد که $i = 1$. زیرا اگر $i \neq 1$، آن‌گاه عضوی دلخواه مانند A متعلق به $\mathcal{A}\backslash S_1$ دقیقاً $\binom{n-\ell-1}{k-1}$ عضو در $\mathcal{B}$ هیچ اشتراکی ندارد و چون n به اندازهٔ کافی نسبت به

k, ℓ, t بزرگ فرض شده است پس $\binom{n-\ell-1}{k-1} > t$ که با فرض این که $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو خانواده ضربدری t– تقریباً اشتراکی هستند در تناقض است.

References

1. Alishahi M., Taherkhani A. "Extremal *G*-free induced subgraphsof Kneser graphs", J. Combin. Theory Ser. A, 159:269–282, 2018.
2. Balogh J., Bollobás B., Narayanan B. P., "Transference for the Erdős–Ko–Rado theorem", Forum Math. Sigma, 3:e23, 18, 2015.
3. Deza M., Frankl P., "Erdős-Ko-Rado theorem-22 years later. *SIAM* Journal on Algebraic Discrete Methods", 4(4):419–431, 1983.
4. Erdős P., "A problem on independent r-tuples", Ann. Univ. Sci. Budapest.Eötvös Sect. Math., 8:93–95, 1965.
5. Erdős P., Ko C., Rado R., "Intersection theorems for systems of finitesets", Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 12:313–320, 1961.
6. Frankl P., "On intersecting families of finite sets", J. Combin. Theory Ser. A, 24(2):146–161, 1978.
7. Frankl P., "An extremal problem for two families of sets", European J. Combin., 3(2):125–127, 1982.
8. Frankl P., "Improved bounds for Erdős' matching conjecture", J. Combin.Theory Ser. A, 120(5):1068–1072, 2013.
9. Frankl P., Füredi Z., "A new short proof of the EKR theorem", J. Combin. Theory Ser. A, 119(6):1388 – 1390, 2012.
10. Gerbner D., Lemons N., Palmer C., Patkós B., Szécsi V., "Almost intersecting families of sets", SIAM J. Discrete Math., 26(4):1657–1669, 2012.
11. Godsil C. and Meagher K., "A new proof of the Erdős-Ko-Rado theorem for intersecting families of permutations", European J. Combin., 30(2):404–414, 2009.

12. Hilton A. J. W., Milner E. C., "Some intersection theorems for systems of finite sets", Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 18:369–384, 1967.

13. Kalai G., "Intersection patterns of convex sets", Israel J. Math., 48(2-3):161–174, 1984.

14. Katona G. O. H., "A theorem of finite sets", Theory of Graphs, Proc. Coll. Tihany 1966, Akad, Kiado, Budapest, 1968; Classic Papers in Combinatorics,381–401, 1987.

15. Katona G. O. H., "A simple proof of the Erdős-Chao Ko-Rado theorem", J. Combin. Theory Ser. B, 13(2):183 – 184, 1972.

16. Katona G. O. H., Nagy D. T., "A new generalization of the Erdős–Ko–Rado theorem. Graphs Combin., 31(5):1507–1516, 2015.

17. Kruskal J. B., "The Number of Simplices in a Complex", Mathematical optimization techniques, 251: 251–278, 1963.

18. Matsumoto M., N. Tokushige, "The exact bound in the Erdős–Ko–Rado theorem for cross-intersecting families", J. Combin. Theory Ser. A, 52:90–97, 1989.

19. Pyber L., "Union-intersecting set systems", J. Combin. Theory Ser. A, 43:85–90, 1986.